DOKAZ METATEOREMA ADEKVATNOSTI ZA LOGIKU SUDOVA U SUSTAVU PRIRODNE DEDUKCIJE I U RAČUNU SUDOVA[1]

pregledni rad

Dora KUNOVIĆ

Diplomski studij filozofije i anglistike
Filozofski fakultet
Sveučilište u Rijeci
e-mail: kunovic.dora@gmail.com

Sažetak

Ovaj se rad bavi dokazom metateorema adekvatnosti za logiku sudova. Sustavi u kojima će se dokazivati sam metateorem adekvatnosti prirodna su dedukcija i račun sudova. Na samom početku bit će predstavljen povijesni pregled sustava računa sudova, kao i sustava prirodne dedukcije. Nakon toga bit će govora o simboličkoj logici općenito. U tom će se dijelu ukratko prikazati logika sudova, razlika između sintakse i semantike u logici sudova te će daljnji fokus biti na samoj sintaksi. Nadalje, pomnije će se predstaviti sustav prirodne dedukcije i račun sudova gdje će se posebno prikazati svako pravilo izvoda kao i aksiomi koji se vežu uz račun sudova. Zatim će se spomenuti osnovno o metateoremima potpunosti i adekvatnosti te će se prijeći na samu srž rada, a to je dokaz metateorema adekvatnosti za prirodnu dedukciju te za račun sudova.

Ključne riječi

metateorem adekvatnosti, dokaz metateorema adekvatnosti, prirodna dedukcija, račun sudova, izvodi, logika sudova

---

[1] 1 Ovaj rad pisan je kao završni rad na Odsjeku za filozofiju Filozofskog fakulteta u Rijeci za potrebe ostvarivanja prvostupništva na studiju filozofije.

Uvod

Bili ljudi toga svjesni ili ne, logika igra jako veliku ulogu u današnjem svijetu. No, logika nije nova grana – samostalno se razvija kao grana još od Aristotela, a njeno usavršavanje i izgradnja ne staju ni danas. Jedna od važnih grana logike simbolička je logika koja je nastala kako bi se iz logike mogle izbaciti višeznačnost i nejasnoća koju sa sobom povlači prirodni jezik. Logika sudova jedan je od formalnih logičkih sustava simboličke logike. Kada gradimo jedan takav formalni sustav, stvaramo ga kako bi bio bolji i jasniji od prirodnog jezika, a kako bi se njime obuhvatilo sve bitno iz prirodnog jezika.

Svaki sustav ima svoje vrline i mane, a mi težimo tome da ima određena svojstva koja ga čine boljim i obuhvatnijim od nekog drugog sustava, što često znači da zbog jednog dobrog svojstva koje sustav posjeduje, drugo svojstvo neće biti prisutno. Logiku sudova, uz ostalo, krase dva vrlo važna svojstva, a to su potpunost i adekvatnost. Metateorem potpunosti tvrdi da sve što je valjano jest i izvedivo. Metateorem adekvatnosti tvrdi da sve što je izvedivo, ujedno je i valjano. Ta su svojstva potrebna i korisna upravo zbog činjenice da se vidi snažna povezanost semantike i sintakse u logici sudova. Kako bismo znali posjeduje li određeni sustav neko svojstvo, to svojstvo valja dokazati. Za to će nam služiti metateoremi koji nam govore o formalnom sustavu koristeći metajezik. Ovaj će se rad baviti upravo dokazivanjem jednog od ta dva metateorema za logiku sudova, a to je metateorem adekvatnosti i to u sustavu prirodne dedukcije i računu sudova.

Započet ćemo ovaj rad dajući kratki povijesni pregled prirodne dedukcije i računa sudova kako bi se vidio povijesni razvoj tih sustava i kako bi se bolje razumjeli. Nakon kratkog povijesnog pregleda, prijeći ćemo se na logiku sudova govoreći osnovno o njoj. Podijelit ćemo je na semantiku i sintaksu, prikazati njihove razlike i usredotočiti se na sintaksu. Zatim ćemo objasniti što su i od čega se sastoje račun sudova i prirodna dedukcija te u sklopu prirodne dedukcije razliku dvije metode rješavanja izvoda – Lemmon-Suppes metoda i Fitch metoda. Potom ćemo prikazati osnove o samim metateoremima adekvatnosti i potpunosti, a nakon toga ćemo krenuti sa suštinom rada – dokazom metateorema adekvatnosti za prirodnu dedukciju te za račun sudova u sklopu kojih ćemo objasniti matematičku indukciju i njenu važnost u dokazivanju metateorema.

Simbolička logika – Povijesni pregled

S Aristotelom[2] započinje ozbiljno istraživanje i razvijanje logike kao samostalnog dijela filozofije. Aristotelova se logika većinom bavi kvantifikatorima (ili količiteljima) “svi” (univerzalni ili opći) i “neki” (egzistencijalni, opstojni ili partikularni), dok se propozicijska logika (logika sudova, iskazna logika) ne bavi kvantifikatorima, već uzima jednostavne sudove kao nedjeljive cjeline. No, Aristotel se bavio i dvama principima iznimno važnima za klasičnu logiku općenito, pa onda i za logiku sudova, a to su: pravilo „isključenje trećeg“ koji kaže da je svaki iskaz ili istinit ili lažan te zakon kontradikcije koji kaže da nijedan iskaz nije istovremeno istinit i lažan. Ta dva zakona predstavljaju osnovu i temelj klasične logike sudova. Postoje određeni dokazi da se Aristotel bavio i kompleksnim propozicijama koje obuhvaćaju disjunkte, konjunkte i kondicionale, ali to je bilo u vrlo maloj mjeri.

Stoici su se više bavili veznicima, no kako je toliko malo njihovih zapisa ostalo očuvano, teško je reći tko se od njih točno time bavio. Diodor Kron[3] sa svojim je učenikom raspravljao o istinosti kondicionala – ovisi li istinost samo o tome da nije tako da je antecedens istinit, a konsekvens lažan ili je potrebna neka snažnija veza između antecedensa i konsekvensa. Hrizip[4], pripadnik stoičke škole, bio je značajan u razvoju logike sudova jer je naveo razne načine na koje možemo formirati kompleksne premise za dokazivanje konkluzije argumenata (u njegovoj su logici glavni veznici „ako“, „ili“, „i“ te „ne“) te uz to naveo shemu valjanih zaključaka. Za Hrizipa su ova pravila zaključivanja bila

---

[2] Aristotel (384.–322. pr. Kr.), antički filozof i prirodoslovac iz Stagire.
[3] Diodor Kron (umro oko 284. pr. Kr.), grčki filozof, logičar i dijalektičar iz megarske škole.
[4] Hrizip iz Solija (oko 280. - 207. pr. Kr.), antički matematičar, filozof i fizičar iz stoičke škole.

temeljna[5]:

1) Ako p, onda q; p; dakle, q.

2) Ako p, onda q; ne q; dakle, ne p.

3) Ili p ili q; p; dakle, ne q.

4) Ili p ili q; ne q: dakle, p.

5) Ne i p i q; p; dakle, ne q.

Kasnije je sam Hrizip nadogradio svoju shemu, ali su u nadogradnji sudjelovali i drugi stoici. Nakon stoika se kroz povijest razni filozofi bave ovom temom kao što su Galen[6]5, Boecije[7] srednjovjekovni filozofi Petar Abelard[8] i William Occam[9]. Većina se fokusirala na poboljšavanje formalizacije već danih Aristotelovih i Hrizipovih principa te na usavršavanje terminologije, kao i na raspravu oko veznika.[10] Sljedeći značajni korak dolazi s razvojem simboličke logike sredinom devetnaestog stoljeća, a važni logičari tog područja su De Morgan[11] i George Boole[12]. Boole je htio razviti "algebru" kojom bi zamijenio Aristotelovu logiku gdje bi broj "1" označavao univerzalnu klasu, "0" praznu klasu, "xy" presjek x-a i y-a te "x+y" za uniju x-a i y-a.

[5] http://www.iep.utm.edu/prop-log/
[6] Aelije ili Klaudije Galen (129. – 200.), rimski liječnik, filozof i logičar grčkoga podrijetla.
[7] Anicije Manlije Torkvat Severin Boecije (oko 480. – oko 524.), rimski matematičar, filozof i retoričar.
[8] Petar Abelard (1079. – 1142.), srednjovjekovni francuski skolastički filozof i teolog i logičar.
[9] William Occam (oko 1288. – oko 1348.) engleski franjevac, skolastički filozof i teolog.
[10] http://www.iep.utm.edu/prop-log/
[11] Augustus De Morgan (1806.– 1871.), britanski logičar i matematičar najpoznatiji po De Morganovim zakonima i matematičkoj indukciji. De Morgan1847.
[12] George Boole (1815. – 1864.), britanski matematičar, filozof i logičar. Boole 1847.

Na taj bi se način iskazi mogli tretirati kao jednadžbe. No, ako uzmemo da "x=1" znači "x je istinit" i "x=0" znači "x je lažan", njegova se pravila mogu izmijeniti i primijeniti na logiku sudova gdje bi "x+y=1" značilo da je x ili y istinit te "xy=1" značilo da su x i y istiniti. Time je Boole privukao mnoge matematičare na područje filozofije.

Početkom dvadesetog stoljeća Bertrand Russell[13] daje drugačiju aksiomatizaciju logike sudova u svom radu *Teorija implikacije*. Istinosne tablice postaju popularne i važne dvadesetih godina devetnaestog stoljeća zbog rada Emila Posta[14] i Ludwiga Wittgensteina[15].

Račun sudova

Logika sudova napredak je i poboljšanje naspram silogističke logike, ali je i ona sama unaprijeđena Fregeovom[16] predikatnom logikom gdje se kombiniraju određena svojstva propozicijske i silogističke logike.[17]

Gottlob Frege krajem devetnaestoga stoljeća predstavio je logiku kao granu sustavnog propitivanja, osnovniju od matematike ili algebre. Upravo je on zaslužan za aksiomatizaciju računa sudova. Račun je sudova sačinjen od šest aksioma i jednog pravila zaključivanja: *modus ponens* te se u njemu koriste samo dva veznika, negacija i kondicional.[18]

Račun sudova aksiomatski je sustav, odnosno skup čiji su elementi aksiomi (točnije aksiomske sheme) i jedno pravilo

---

[13] Bertrand Arthur William Russell (1872. – 1970.), britanski filozof, logičar, matematičar i povjesničar. Russell 1906.

[14] Emil Leon Post (1897. – 1954.), američki matematičar i logičar. Post 1921.

[15] Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889. – 1951.), britanski filozof koji je uglavnom radio na području filozofije jezika, logike i filozofije matematike. Wittgenstein 1922.

[16] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848. – 1925.), njemački matematičar, logičar i filozof. Frege 1879.

[17] Hurley 2007, str. 392

[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Frege's_propositional_calculus

zaključivanja, a služi za dokazivanje teorema.1[19]

Uz Fregea, u ovom je području značajan i Łukasiewicz[20]. Zaslužan je za velik broj aksiomatizacija u klasičnoj propozicijskoj logici. U ovom ćemo radu koristiti Frege-Łukasiewiczev sustav koji spada u hilbertovski sustav, a sastoji se od tri aksioma/aksiomske sheme i jednog pravila izvođenja (*modus ponendo ponens*).

Prirodna dedukcija

Povijest prirodne dedukcije razlikuje se između dva razdoblja: razdoblja kada je prvi sustav prirodne dedukcije formiran i predstavljen, te razdoblja kroz povijest prije prvog usustavljivanja prirodne dedukcije kad su se sama pravila već koristila.

Gerhard Gentzen[21] i Stanisław Jaśkowski[22] 1934. godine napisali su radove na temu o kojoj se prije nije pisalo. Oba su autora, unatoč tome što nisu pisali zajedno niti bili i u kakvom kontaktu, imali istu osnovnu ideju – osmisliti sustav kojim bi se zamijenio postojeći.[23]

Sustav prirodne dedukcije alternativni je sustav računu sudova te je nastao kao zamjena za aksiomatski sustav računa sudova. Aksiomatski su sustavi umjetni te se uvelike razlikuju od dokaza koje koriste matematičari. Dokazi u aksiomatskom sustavu komplicirani su i poprilično dugački. S druge strane, matematičari često koriste neformalne dokaze u kojima se koriste tehnike koje počivaju na pretpostavkama.

Gentzen i Jaśkowski htjeli su odrediti teoretsko i formalno točno opravdanje tradicionalne metode zaključivanja te stvoriti sustav koji podupire traženje dokaza.

Tako se sustav prirodne dedukcije razlikuje od aksiomatskog sustava po tome što se dokazi zasnivaju na

---

[19] http://webspace.ship.edu/jehamb/f07/333/axsystems.pdf

[20] Jan Łukasiewicz (1878. – 1956.), poljski logičar i filozof. Łukasiewicz 1970.

[21] Gerhard Karl Erich Gentzen (1909. – 1945.), njemački matematičar i logičar. Gentzen 1934.

[22] Stanisław Jaśkowski (1906. – 1965.), poljski logičar. Jaśkowski 1934.

[23] Pelletier 1999, str. 1

pretpostavkama koje se slobodno uvode te se pod određenim uvjetima odbacuju. Gentzen je svojim sustavom utjecao na razvoj moderne teorije dokazivanja i filozofsko istraživanje teorije značenja. No, pravila prirodne dedukcije koristila su se čak u antičkog Grčkoj, dakle puno prije tridesetih godina prošlog stoljeća kada je sustav formalno nastao. Corcoran[24] je u svome djelu *Aristotle's Natural Deduction System* dao moguću interpretaciju Aristotelove silogistike kao korištenja pravila izvođenja te zaključivanja na temelju pretpostavki. Mnogi povjesničari pronalaze začetke prirodne dedukcije još u stoičkoj logici. No, unatoč mnogobrojnim primjerima, sve su to samo tehnike dokazivanja, bez teoretiziranja o opravdavanju.

Ključan korak u nastajanju prirodne dedukcije jest teorem dedukcije.[25] Jacques Herbrand[26] 1930. dao je formalan dokaz teorema dedukcije za aksiomatski sustav. U isto ga je vrijeme Tarski[27] uključio kao aksiom u svom djelu *Consequence Theory*.

Jaśkowski je svoj prvi sustav napravio kao odgovor na izazov Łukasiewicza kako na formalan način prikazati metode dokazivanja koje koriste matematičari, dok je Gentzen svoje rješenje napisao pod utjecajem Hertza u djelu *Untersuchungen uber das Logische Schliessen*. Prirodna dedukcija praktičnija je zamjena za aksiomski sustav kojeg mnogi, kao što je već spomenuto, smatraju neadekvatnim i umjetnim.

Logika sudova (propozicijska logika, iskazna logika)

U ovom ćemo se radu usredotočiti na dokazivanje metateorema konzistentnosti/adekvatnosti za logiku sudova. Logika sudova pripada formalnoj logici kojoj je cilj riješiti

---

[24] John Corcoran (rođen 1937.), logičar, filozof, matematičar i povjesničar logike. Corcoran 1972.

[25] Metateorem matematičke logike koji tvrdi da ukoliko je formula B izvediva iz premise A, onda je kondicional A→B izvediv iz praznog skupa premisa.

[26] Jacques Herbrand (1908. – 1931.), francuski matematičar. Herbrand 1930.

[27] Alfred Tarski (1901. – 1983.), poljski logičar, matematičar i filozof. Tarski 1930, str. 361-404

komplikacije, mnogoznačnosti i nejasnoće u prirodnom jeziku (naravnom jeziku) koje se javljaju u neformalnoj logici. Logika sudova spada u klasičnu logiku, što znači da je bivalentna (koristi točno dvije istinosne vrijednosti: istinu i laž). Logika sudova spada i u simboličku logiku gdje se prirodni jezik prevodi na jezik logike koji je napravljen upravo zato da bi se izbjegle dodatne konotacije, implikature i očekivanja koja se javljaju u prirodnom jeziku, i u tom jeziku koristimo određene simbole. Iskazi prevedeni na jezik logike sadrže samo ono što je logički važno.[28] Ono po čemu se logika sudova razlikuje od nekih drugih grana logike jest to da se jednostavan sud (iskaz, propozicija) gleda kao nedjeljiva cjelina. Jednostavni (atomarni) sudovi su koji ne sadrže logičke veznike. Sud je spoj pojmova kojim nešto tvrdimo ili, pak, poričemo.[29] Sudovi, kao što smo napomenuli i za logiku sudova ranije, mogu imati dvije istinosne vrijednosti: istinu i laž. Uzmimo za primjer jednostavan sud „Neki ljudi su profesori“. Logika sudova ne bavi se pojmovima ili kvantifikatorima koji se u tom sudu nalaze, nego uzima cijeli jednostavan sud kao nedjeljivu cjelinu, tj. kao najmanji, osnovni dio.

Jednostavni se sudovi mogu označavati velikim latiničnim slovima (A, B, C, D,...) ili velikim slovom P_n (P_0, P_1, P_2, P_3,...). U radu će se koristiti druga opcija kako se znakovi za određene sudove ne bi miješali s metavarijablama koje ćemo označavati velikim latiničnim slovima (A, B, C itd.) i koji su znakovi metajezika. Metajezik je jezik pomoću kojeg govorimo o logici sudova—našem objektnom jeziku, u ovom slučaju to je hrvatski jezik uz dodatne simbole. Metavarijable nisu formule već varijable koje predstavljaju formule.

Osim jednostavnim sudovima, logika sudova bavi se i složenim sudovima te načinima na koje se jednostavni sudovi mogu kombinirati i slagati u složene sudove.[30] Jednostavne sudove možemo slagati u složene sudove pomoću veznika (poveznika) i zagrada (razgodaka). Alfabet logike sudova skup je simbola koji se koriste u jeziku, a to su:

[28] Za više detalja pogledati Kovač 2010, str. 50
[29] Petrović 1996, str. 40
[30] http://www.iep.utm.edu/prop-log/

skup propozicionalnih varijabli(iskazna slova) {P0, P1, P2, P3,...}, skup logičkih veznika {¬, ∧,∨, →, ↔} i skup zagrada { (,) }.

Značenje jednostavnih sudova svodimo na njihovu istinosnu vrijednost što može biti istina i/1/T ili neistina/laž n/0/F.[31] Istinosna vrijednost složenih sudova, pak, ovisi o istinosnoj vrijednosti jednostavnih sudova od kojih je složeni sud sastavljen. Veznici određuju na koji način istinitost složenog suda ovisi o jednostavnim sudovima od kojih je složen.[32] U logici sudova postoji ukupno pet veznika:

1) *Negacija* ili *nijek* (~, ¬) najjednostavniji je oblik veznika u logici sudova. Sastoji se od jednog jednostavnog suda ispred kojeg je stavljen znak negacije, pa tako iz jesnog suda nastaje niječni.

Uzmimo za primjer jednostavan sud „Danas je sunčan dan". Kada ispred njega stavimo negaciju, dobijemo sud „Nije tako da je danas sunčan dan" ili „Danas nije sunčan dan". Ako je istinosna vrijednost suda „Danas je sunčan dan" istina, onda je za sud „Danas nije sunčan dan" istinosna vrijednost neistina. S druge strane, ako je istinosna vrijednost suda „Danas je sunčan dan" neistina, onda je istinosna vrijednost suda „Danas nije sunčan dan" istina. Dakle, za negaciju vrijedi da ima suprotnu istinosnu vrijednost od jednostavnog suda koji negira. Ovaj primjer možemo prevesti na jezik logike sudova gdje će P0 označavati sud „Danas je sunčan dan" i prikazati istinosnim tablicama:

P0	¬P0
1	0
0	1

[31] Kovač 2010, str. 51
[32] Kovač 2010, str. 52

Budući da se u logici sudova, uz jednostavne sudove, može negirati i bilo koji složeni sud, istinosnu tablicu treba prikazati i općenito pomoću metavarijabli koje pripadaju metajeziku kojim govorimo o jeziku logike sudova:

A	¬A
1	0
0	1

2) *Konjunkcija* ili *sveza* (∧, &, •) vrsta je veznika koja u prirodnom jeziku najviše odgovara vezniku „i".

Uzmimo za primjer složeni sud „Danas je srijeda i danas pada kiša". Ovaj složeni sud sastoji se od dva jednostavna suda, koja nazivamo konjunkti („Danas je srijeda." i „Danas pada kiša."), te veznika „i" koji ih povezuje. Postoje četiri moguće situacije za ovaj složeni sud, a to je da su oba konjunkta istinita; da je prvi konjunkt istinit, a drugi lažan; da je prvi konjunkt lažan, a drugi istinit; da su oba konjunkta lažna. Da bi cijela konjunkcija bila istinita, oba suda (konjunkta) od kojih se složeni sud sastoji moraju biti istinita. U svakom drugom slučaju konjunkcija je neistinita. To možemo prikazati semantičkom tablicom:

A	B	A & B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

U prirodnom jeziku ima mnogo više veznika od samo „i" kao što su „ali“, „a“, „no“, „nego“, „međutim“, „premda“ i sl. koji se u logici sudova označavaju konjunkcijom jer razlike koje vidimo u prirodnom jeziku nisu problematične i ne čine razliku u jeziku logike sudova.

3) *Disjunkcija*, *alternacija* ili *rastava* (∨) vrsta je veznika koja u prirodnom jeziku odgovara vezniku „ili“.

Uzmimo primjer suda „Marko voli duge šetnje ili voli pse“. Ovaj složeni sud sastoji se od dva jednostavna suda koja nazivamo disjunkti „Marko voli duge šetnje“ i „Marko voli pse“ te veznika „ili“ koji ih povezuje. Kao i za svaki složeni sud, istinosne vrijednosti disjunkcije ovise o sudovima od kojih je sastavljena. Kao i za konjunkciju, imamo četiri moguće situacije: da su oba disjunkta istinita; da je prvi disjunkt istinit, a drugi lažan; da je prvi disjunkt lažan, a drugi istinit; da su oba disjunkta lažna. Da bi cijela disjunkcija bila istinita, barem jedan disjunkt mora biti istinit. To vrijedi u prva tri slučaja što znači da je disjunkcija lažna samo kad su oba disjunkta lažna. To možemo prikazati tablicom:

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) *Kondicional*, *implikacija* ili *pogodba* (⊃, →) vrsta je veznika koji u prirodnom jeziku najviše odgovara „ako…, onda…“. Prvi podiskaz u kondicionalu naziva se antecedens (antecedent, prednjak), a drugi se naziva konsekvens (konsekvent,

posljednjak).[33] Kao i kod konjunkcije i disjunkcije, kod kondicionala također imamo četiri mogućnosti za istinosnu vrijednost: kad su i antecedens i konsekvens istiniti; kad je antecedens istinit, a konsekvens lažan; kad je antecedens lažan, a konsekvens istinit; kad su i antecedens i konsekvens lažni. Da bi kondicional bio istinit, antecedens mora biti lažan ili konsekvens mora biti istinit.

Dakle, jedini slučaj kad je kondicional lažan jest kad je antecedens istinit, a konsekvens lažan.

To možemo prikazati tablicom:

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) *Bikondicional*, *ekvivalencija* ili *dvopogodba* (↔, ≡) vrsta je veznika koja u prirodnom jeziku odgovara „ako i samo ako“ to jest „upravo ako“.

Uzmimo primjer „Tamara kuha ako i samo ako Ivan posprema“. Svaki podiskaz kondicionala dovoljan je i nužan razlog drugog podiskaza.[34] Bikondicional u sebi sadrži dva kondicionala. Raspisat ćemo ga za gornji primjer:

a) Ako Ivan posprema, onda Tamara kuha.
b) Ako Tamara kuha, onda Ivan posprema.

Bikondicional je istinit ako su oba podiskaza istinita. Isto tako, bikondicional je istinit ako su oba podiskaza lažna. Dakle, možemo

[33] Kovač 2010, str. 58
[34] Kovač 2010, str. 62

reći da je bikondicional istinit ako i samo ako podiskazi imaju istu istinosnu vrijednost. To možemo prikazati tablicom:

A	B	A ↔ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Semantika i sintaksa

Kao i svaki jezik, jezik logike sudova možemo podijeliti na semantiku i sintaksu. Sintaksa se bavi promatranjem i uređivanjem unutarnje strukture, gramatičkim dijelom, pravilima kojima se stvaraju složeni sudovi iz onih jednostavnih te pravilima izvođenja.

U sintaksu, dakle, spadaju definicije, pravila formiranja formula, pravila zaključivanja, pravila izvođenja (sustav prirodne dedukcije ili račun sudova), sintaktičko određenje logičkih veznika i sl. Semantika se, s druge strane, bavi značenjem i istinosnim vrijednostima. U semantici se određuje značenje logičkih veznika. To je značenje određeno semantičkim tablicama koje na jasan način grafički prikazuju kako se određuje istinosna vrijednost složenih sudova koja ovisi o jednostavnim sudovima i veznicima od kojih je složeni sud sačinjen. U ovome ćemo se radu fokusirati na sintaksu.

Sintaksa

Već smo spomenuli od čega se alfabet sastoji i čime se sintaksa bavi, a u ovom ćemo poglavlju to malo proširiti. Kako bi se jezik logike sudova mogao koristiti i proučavati, mora se definirati što su u njemu osnovni znakovi te kako te osnovne znakove spajamo u smislene cjeline, odnosno nizove znakova koje zovemo „formule". Kada to znamo, onda se može reći da je zadan jezik teorije.[35] Alfabet logike sudova skup je simbola ili znakova koje koristimo u tom jeziku, što znači da taj skup nije prazan. Riječ u jeziku konačan je niz znakova iz alfabeta, a duljina riječi ovisi o broju simbola od kojih je ta riječ sastavljena.[36]

Alfabet se sastoji od unije skupa propozicionalnih varijabli {P0, P1, P2, P3, ..., Pn, ...} koji je prebrojiv, skupa logičkih veznika {¬, ∧,∨, →, ↔}[37] i skupa pomoćnih simbola, to jest zagrada { (,) }.

Riječ može biti sastavljena bilo kojom kombinacijom znakova alfabeta, ali nas ne zanimaju sve moguće kombinacije, već samo formule. Riječi kao što je)P3↔)())¬∧ neće nas zanimati i njima se ne ćemo baviti. Formule su gramatički točno iskonstruirane tvrdnje.

Postoje točno određena pravila kako se smiju i mogu formirati formule. Prije no što nabrojimo pravila za formiranje formula, treba objasniti razliku objektnog jezika i metajezika. Objektni jezik je o kojem se govori, to je predmet našeg istraživanja i promatranja. U ovom radu to je jezik logike sudova. Metajezik je jezik pomoću kojeg govorimo o objektnom jeziku, u ovom slučaju hrvatski jezik uz dodatne simbole. Atomarna formula isto je što i propozicionalna varijabla, najmanja moguća formula. Formulu definiramo na sljedeći način:

1. Svaka atomarna formula je formula.

2. Ako je A formula, onda je i ¬A isto formula.

---

[35] Vuković 2007, str. 11

[36] Ibid.

[37] Nije potrebno uvijek koristiti svih pet veznika već je moguće koristiti samo negaciju i još jedan veznik kako bi se pomoću njih izrazili drugi veznici što će se moći vidjeti dalje u radu na str. 15. No najčešće ipak koristimo svih pet veznika zbog jednostavnosti i preglednosti izraza.

3. Ako su A i B formule, onda je i $A \wedge B$ formula.

4. Ako su A i B formule, onda je i $A \vee B$ formula.

5. Ako su A i B formule, onda je $A \rightarrow B$ formula.

6. Ako su A i B formule, onda je $A \leftrightarrow B$ formula.

Formule su oni i samo oni nizovi znakova dobiveni korištenjem konačno mnogo koraka gornjih šest pravila.[38]

Prilikom zapisivanja gornjih pravila za formule koristila se poljska notacija, što znači da nismo koristili zagrade. Uz to, postoji i sustav vanjskih zagrada $(\neg A)$ i sustav unutarnjih zagrada $\neg(A)$. Ubuduće se nećemo oslanjati na sustav vanjskih i unutarnjih zagrada, već na prioritet logičkih veznika. Po redoslijedu prioriteta veznika, najveći prioritet pripada negaciji, nakon toga slijede konjunkcija i disjunkcija te su na kraju kondicional i bikondicional. Iako ćemo se služiti prioritetom logičkih veznika, po potrebi ćemo koristiti zagrade kako bismo naglasili prioritet nekog veznika.[39]

Iz semantičkih se tablica može iščitati je li neki argument valjan, no uz korištenje tablica pojavljuju se i neki nedostaci – broj redaka u tablici drastično raste s brojem propozicionalnih varijabli.[40] Postoji sustav u kojem se može dokazati da konkluzija slijedi iz premisa i to na nedvosmislen i precizan način, a naziva se deduktivni sustav. U deduktivnom sustavu logički se slijed više ne shvaća semantički, kao u tablicama, već sintaktički. Gledaju se pravila koja se tiču forme, a ne značenja i istinosnih vrijednosti.[41] Deduktivni sustavi utemeljeni su na određenom broju aksioma i/ili pravilima izvoda. U ovom ćemo radu koristiti račun sudova koji se sastoji od nekoliko aksioma i modus ponensa, i sustav prirodne dedukcije koji se sastoji samo od određenih pravila izvoda, bez aksioma. Dokaz ili izvod je „niz zaključaka gdje od unaprijed prihvaćenih pretpostavaka zaključujemo na zadanu

---

[38] http://www.iep.utm.edu/prop-log/
[39] Vuković 2007, str. 13
[40] Ibid., str. 43
[41] Ibid., str. 94

postavku“[42]. Izvod formule B iz zadanog skupa premisa $\{A_1, \ldots , A_n\}$ formalno se definira kao konačan niz formula takav da je svaka formula niza ili premisa ili formula izvedena iz prethodnih formula u nizu na osnovi pravila izvođenja te mora vrijediti da je zadnja formula u nizu formula B, odnosno konkluzija. Teorem ili poučak formula je koja je izvedena iz praznog skupa premisa, bez pretpostavki. U idućim ćemo poglavljima podrobnije objasniti što je sustav prirodne dedukcije i račun sudova, koja pravila izvođenja i aksiome koriste te na koji se način konkluzija izvodi iz skupa premisa.

Račun sudova (Frege-Łukasiewiczev sustav)

Testovi valjanosti mogu pokazati je li određeni argument valjan ili ne, no često nije jasno vidljivo kako u argumentu iz danih premisa slijedi konkluzija. Zato je potreban sustav koji daje precizan i nedvosmislen način na koji se može ispitati logički slijed. Takav se sustav zove deduktivni sustav.[43]42 Deduktivnih sustava ima više, ali ćemo se u ovom radu usredotočiti na račun sudova i sustav prirodne dedukcije.

Račun sudova potpada u hilbertovski sustav, a hilbertovski se sustavi sastoje od aksioma i pravila izvoda. Račun sudova razlikuje se od sustava prirodne dedukcije po tome što se u prirodnoj dedukciji ne koriste aksiomi.

Napomenuli smo da se alfabet u logici sudova sastoji od skupa propozicionalnih varijabli $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots\}$, skupa logičkih veznika $\{\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ i skupa zagrada { (,) }, no u ovom sustavu ne ćemo koristiti sve veznike iz skupa, već samo veznike negacije i kondicionala $\{\neg, \rightarrow\}$. Sve preostale veznike moguće je izraziti s negacijom i kondicionalom te će tako izraženi skratiti dokaze.[44] Zato će se izbačeni veznici označavati na sljedeći način:

$A \land B$	označava	$\neg(A \rightarrow \neg B)$
$A \lor B$	označava	$\neg A \rightarrow B$

[42] Ibid.
[43] Ibid., str. 43
[44] Ibid.

$A \leftrightarrow B$ označava $\neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$[45]

Budući da se neće koristiti svi veznici[46], mijenja se i definicija formule koja glasi:

1. Svaka atomarna formula je formula.

2. Ako je A formula, onda je i $\neg A$ formula.

3. Ako su A i B formule, onda je $A \rightarrow B$ formula.

Formule su oni i samo oni nizovi znakova dobiveni korištenjem konačno mnogo koraka gornjih pravila.

Sheme aksioma koje se koriste u sustavu računa sudova su:

(A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$[47]

Uz ove se aksiome koristi i jedno pravilo izvoda, a to je *modus (ponendo) ponens* (MPP, MP). $A \rightarrow B, A \vdash B$.

Da bi neki konačan niz formula $A_1, \ldots, A_n$[48] u sustavu računa sudova bio dokaz za formulu A, mora vrijediti:

a) formula A_n je A, odnosno ekvivalentne su $A_n \equiv A$,

---

[45] Ibid.

[46] Na str. 13 već smo napomenuli da nije nužno korištenje svih veznika, već su dovoljna dva od kojih je jedan veznik negacija.

[47] Vuković 2007, str. 45

[48] Prisjetimo se da su A i B metavarijable. Na str. 9 smo spomenuli da su metavarijable zapravo varijable koje predstavljaju formule te umjesto njih možemo uvesti neku proizvoljnu formulu objektnog jezika. Metavarijable najčešće označavamo velikim tiskanim slovima (A, B, C…). Ukoliko obuhvaćamo veliki broj formula, često se označavaju velikim slovom i indeksom ($A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ili $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$)

b) za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$ formula Ak je ili aksiom ili nastala korištenjem pravila izvoda modus ponens na neke formule A_i i A_j gdje su $i, j < k$.[49]

Sustav prirodne dedukcije

Kao što je rečeno u prethodnom poglavlju, sustav računa sudova spada u hilbertovske sustave koji su kompleksni i neprirodni. Kompleksni su i neprirodni jer su zadani s nekoliko aksioma (odnosno aksiomskih shema) i jednim pravilom izvoda, što dokazivanje formula u tom sustavu čini potencijalno nejasnim.[50] Upravo zbog toga nastaje sustav koji pokušava riješiti te potencijalne nejasnoće i kompleksnosti te ponuditi puno prirodniju alternativu, a zove se sustav prirodne dedukcije. Sustav prirodne dedukcije razlikuje se od hilbertovskih sustava po tome što ne koristi shema aksioma, već samo nekoliko pravila izvoda. Prvi sustavi prirodne dedukcije nastali su tridesetih godina prošloga stoljeća, a za njih su zaslužni Gentzen i Jaśkowski.

Broj pravila izvoda (ili izvođenja) varira, pa će se u ovome radu koristiti sveukupno deset pravila od kojih će sedam biti osnovnih, a tri pravila pomoćnih premisa. Osnovna pravila tiču se logičkih veznika: negacije, konjunkcije, disjunkcije i kondicionala.

Negacija

Jedno pravilo za negaciju koje ćemo koristit i u radu jest *dvostruka negacija* (DN). Iz proizvoljne formule A slijedi, ili je izvediva, formula ¬¬A. To znači da su formula A i dvostruka negacija te formule međusobno zamjenjivi.[51]

$A \vdash \neg\neg A$

$\neg\neg A \vdash A$

[49] Vuković 2007, str. 45
[50] Ibid., str. 77
[51] Cauman 2004, str. 43

Konjunkcija

Za konjunkciju će se koristiti dva pravila, a to su *uvođenje konjunkcije* (∧U) ili adjunkcija (ADJ) ili introdukcija konjunkcije (∧I) i drugo pravilo *eliminacija konjunkcije* (∧E) ili simplifikacija (SIMP).

Uvođenje konjunkcije: iz dvije proizvoljne formule A i B slijedi formula A ∧ B. Odnosno, iz dvaju iskaza koji su u nekom dijelu dedukcije slijedi njihova konjunkcija.[52]

$A, B \vdash A \land B$

$A, B \vdash B \land A$

S druge strane, eliminacija konjunkcije glasi da iz konjunkcije dviju formula A∧B slijedi formula A, a također slijedi i formula B.

$A \land B \vdash A$

$A \land B \vdash B$

Disjunkcija

Kao i za konjunkciju, za disjunkciju ćemo koristiti dva pravila, a to su *uvođenje disjunkcije* (∨U) ili tanjenje (TAN) ili introdukcija disjunkcije (∨I) i drugo pravilo *disjunktivni silogizam* (DS).

Uvođenje disjunkcije govori da se iz proizvoljne formule A izvodi ili slijedi A∨B, pri čemu je B proizvoljna formula.

$A \vdash A \lor B$

$A \vdash B \lor A$

Disjunktivni silogizam tvrdi da iz proizvoljne disjunkcije i iz negacije jednog od disjunkata slijedi drugi disjunkt.

$A \lor B, \neg A \vdash B$

---

[52] Ibid. str. 38

$A \lor B, \neg B \vdash A$

Kondicional

Za kondicional, kao i za disjunkciju i konjunkciju prije toga, imamo dva pravila, a to su *modus (ponendo) ponens* (MPP, MP, →E) i *modus (tollendo) tollens* (MTT, MT).

Pravilo *modus ponens* tvrdi da se iz proizvoljnog kondicionala i formule, koja je antecedens tog kondicionala, može izvesti formula koja je konsekvens tog kondicionala.

$A \rightarrow B, A \vdash B$

Pravilo *modus tollens* tvrdi da iz formule koja je proizvoljni kondicional i formule koja je negacija konsekvensa tog kondicionala možemo izvesti, odnosno slijedi formula koja je negacija antecedensa tog istog kondicionala.

$A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

Može se vidjeti da se pravila uglavnom mogu podijeliti na pravila introdukcije, to jest uvođenja, i pravila eliminacije, to jest isključenja, veznika.

Izvod možemo ispisati na dva načina: Lemmon-Suppes metodom i Fitch metodom. Uzmimo jedan primjer na kojem ćemo objasniti kako i koja je razlika između ova dva načina dokazivanja.

Primjer 1[53]

$(A \land B) \lor C, \neg C \vdash B$

[53] Kovač 2010, str. 104

Lemmon-Suppes metoda

1	1)	$(A \wedge B) \vee C$	p
2	2)	$\neg C$	p
1, 2	3)	$(A \wedge B)$	$\vee$ 1), 2) DS
1, 2	4)	B	3) $\wedge$E

U Lemmon[54]-Suppesovoj[55] metodi (L-sustav) imamo tri stupca. U srednjem stupcu pišemo broj redaka i formulu (bilo da je ta formula premisa, to jest početna pretpostavka, ili izvedena formula). U desnom stupcu opravdavamo srednji stupac – zašto pišemo baš tu formulu koju pišemo, to jest koje smo retke i koja pravila koristili ili, pak, naznačujemo da se radi o početnoj pretpostavci. Na primjer, možemo uzeti redak 2) gdje vidimo da je naznačeno da je formula ¬C premisa (početna pretpostavka) ili redak 3) gdje možemo uočiti da smo formulu dobili iz redaka 1 i 2 koristeći pravilo disjunktivnog silogizma. U lijevom stupcu pišemo brojeve premisa o kojima taj redak ovisi. Na primjer, vidimo da redak 3) ovisi o premisama 1 i 2.

[54] Edward John Lemmon (1930. – 1966.), engleski logičar i filozof
[55] Patrick Colonel Suppes (1922. – 2014.), američki filozof

Fitch metoda

S druge strane, postoji Fitch[56] način dokazivanja.

1	$(A \land B) \lor C$	P
2	$\neg C$	P
3	$(A \land B) \lor$	1, 2/ DS
4	B	3/ $\land E$

Lijevi nam stupac u Fitch metodi predstavlja broj redaka. U srednji se stupac zapisuju formule kao i kod Lemmon-Suppes načina gdje pišemo ili premise ili formule izvedene iz premisa. Desni stupac služi kako bismo zapisali o kojim recima i pravilima ovisi neka formula. Na primjer, formula B dobivena je iz retka 3 pravilom eliminacije konjunkcije.

U ovom ćemo se radu ograničiti na Lemmon-Suppes način izvođenja.[57]

Osnovna nam pravila neće biti dovoljna u nešto kompleksnijim izvodima, pa je potrebno uvesti dodatna pravila koja omogućavaju korištenje pomoćnih premisa. U bilo kojem koraku izvoda moći ćemo dodati, to jest pretpostaviti, jednu ili više pomoćnih premisa, pod uvjetom da konkluzija o njima ne ovisi, odnosno pod uvjetom da se tih uvedenih premisa riješimo prije kraja izvoda. Pomoćne premise možemo dodavati proizvoljno i koliko želimo, no svake se dodane premise moramo adekvatno riješiti prije kraja izvoda.

Tri pravila pomoćnih premisa su: *kondicioni (kondicionalni) dokaz*, dokaz po implikaciji (KD, DI); *reductio ad*

[56] Frederic Brenton Fitch (1908. –1987.), američki logičar, profesor na Yaleu

[57] Za više primjera Lemmon-Suppes metode izvoda pogledati Cauman Uvod u logiku prvog reda te pogledati Kovač Logika za Fitch metodu izvoda

absurdum (RAA, RED); *eliminacija disjunkcije*, vel eliminacija, dilema (∨E, DIL).

Kondicioni dokaz tvrdi sljedeće:

ako je formula B izvediva iz skupa premisa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, A\}$, onda je formula $A \rightarrow B$ izvediva iz preostalih premisa.

$(\{A1, A2\ldots An, A\} \vdash B) \rightarrow (\{A1, A2\ldots An\} \vdash A \rightarrow B)$

Reductio ad absurdum tvrdi da “prema pravilima proveden postupak izvođenja izravnog proturječja iz premise opravdava negiranje te premise.”[58]

Shema njegove upotrebe često se naziva „indirektni“ dokaz. Struktura mu je uglavnom ista kao kod dokaza po implikaciji: polazište mu je premisa koja se uzima s određenim ciljem, za dobro rasprave; slijedi logički rad prema pravilima; premisa se na kraju odbacuje pri pozivanju na pravilo.[59]

Kada imamo sintaktički niz takav da je (barem) jedna od premisa disjunkcija, pravilo vel eliminacije tvrdi sljedeće: ako iz prvog disjunkta i preostalih premisa možemo izvesti konkluziju i ako iz drugog disjunkta i preostalih premisa možemo također izvesti konkluziju, onda možemo zaključiti da je konkluzija izvediva iz zadane disjunkcije i preostalih premisa.

Zadani (početni) sintaktički niz:

$$\{A_1 \vee A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vdash B$$

$$((\{A_1, A_3, \ldots, A_n\} \vdash B) \wedge (\{A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vdash B)) \rightarrow \{A_1 \vee A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vdash B$$

Cilj ovog sustava jest imati očita, prirodna pravila, a prednost mu je jednostavnost i kratkoća izvoda u usporedbi s aksimoatskim sustavima.

Metateoremi logike sudova

Logika sudova ima svoje prednosti, ali i nedostatke, a

[58] Cauman 2004, str.42
[59] Ibid.

jedna od najvećih prednosti u logici sudova jest to što su semantika i sintaksa povezane. Logika sudova potpun je i adekvatan sustav. Pogledajmo o kojim je svojstvima riječ. Kada se kaže da je određeni sustav potpun, to znači da je sve što je u tom sustavu valjano, ujedno i izvedivo. S druge stane, kada kažemo za neki sustav da je adekvatan, misli se da je sve što je u tom sustavu izvedivo, ujedno i valjano.

Na stranici 59 uveli smo metajezik i rekli da je to jezik kojim govorimo o objektnom jeziku. Pomoću metajezika možemo govoriti o svojstvima određenog formalnog sustava, a u ovom je radu to logika sudova. Sve tvrdnje o nekom sustavu spadaju u metateoriju koju možemo definirati kao teoriju teorije.

Kako bi se provjerilo vrijede li neke tvrdnje za određeni sustav, koristit će se metateoremi. U ovom ćemo radu uvesti metateorem adekvatnosti (konzistentnosti) i metateorem potpunosti te ćemo pogledati dokaz metateorema adekvatnosti.

Metateorem potpunosti

Ako je proizvoljan semantički niz $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\} \vDash B$ tautologija[60], onda je sintaktički niz {A1, A2, A3…An }⊢B izvediv. U slučaju da je skup premisa prazan, metateorem glasi:

> Ako je formula B tautologija, onda je formula B i teorem[61]. Dakle, logički je sustav potpun ako je sve što je valjano ujedno i izvedivo, odnosno ako je svaka tautologija ujedno i teorem.

Metateorem adekvatnosti

Ako je $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$ izvedivo, onda je odgovarajući semantički niz $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B$ tautologija. U slučaju da je skup premisa prazan, metateorem glasi: Ako je formula B teorem, onda

---

[60] Tautologija ima dva značenja. Jedno značenje tautologije jest kada kažemo da je neka formula tautologija i tada je ta formula nužno istinita, a drugo je kada govorimo da je neki semantički niz tautologija, onda znači mislimo na to da je argument valjan.

[61] Podsjetimo se da smo rekli da je teorem formula izvedena iz praznog skupa premisa.

je formula B i tautologija. Dakle, sve što je izvedivo jest i valjano, odnosno svaki je teorem ujedno i tautologija.

Dokaz metateorema adekvatnosti za prirodnu dedukciju

Budući da se ovaj dokaz odnosi na izvode, u dokazu ćemo koristiti matematičku indukciju po duljini izvoda. Na stranici 60 vidjeli smo da je izvod po definiciji konačan niz formula te da je duljina izvoda jednaka broju formula u izvodu. Duljina je svakog izvoda, stoga, neki prirodni broj. Ako želimo dokazati metateorem za svaku moguću duljinu izvoda, onda to znači da metateorem moramo dokazati za svaki prirodni broj m≥1. Koristit ćemo matematičku indukciju po duljini izvoda.

Matematička indukcija ne samo da se tiče prirodnih brojeva, već pomoću nje možemo dokazati tvrdnje za beskonačno mnogo (prirodnih) brojeva, odnosno za svaki prirodni broj. Dakle, treba pokazati da ako je neki sintaktički niz izvediv, da je onda isti takav semantički niz tautologija. Ta se tvrdnja u logici sudova zapisuje na sljedeći način:

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B \Rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B$.

Kada se matematičkom indukcijom dokazuje određena tvrdnja, potrebno je:

(1) u prvom koraku dokazati tvrdnju za najmanji prirodni broj za koji tvrdnja vrijedi (u našem je slučaju to broj 1 jer je to najmanji mogući broj koraka u nekom izvodu). Nakon što se provjeri tvrdnja za najmanji broj, slijedi

(2) drugi korak u kojem se dokazuje sljedeće:

ako tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj m, onda tvrdnja vrijedi i za neposrednog sljedbenika, odnosno m+1.

Najmanja duljina izvoda d_i=1 jer u izvodu ne može biti manje od jednog retka. Zbog toga će se prvi korak u indukciji sastojati u provjeri pretpostavke za d_i=1.

1. KORAK INDUKCIJE: d_i=1

U slučaju da je d_i=1, metateorem glasi:

$A \vdash A \Rightarrow A \vDash A$.

Postavlja se pitanje zašto ovaj sintaktički i semantički niz izgleda upravo tako, tj. zašto je premisa jednaka konkluziji. Budući da je duljina izvoda 1, imamo samo jedan korak u izvodu, a to je ujedno i zadnji korak, pa je upisana premisa A ujedno i konkluzija.[62]

Je li u slučaju da je formula A izvediva iz A, formula A semantička posljedica od A?

Kako bismo to provjerili, gledamo istinosne vrijednosti od A. Vidljivo je da je semantički niz tautologija jer istu istinosnu vrijednost imaju i premisa i konkluzija. To jest, ako je istinosna vrijednost premise A istina I(A)=1, istinosna vrijednost konkluzije A također će biti istina I(A)=1. Isto tako, ako je istinosna vrijednost premise A laž I(A)=0, istinosna vrijednost konkluzije A također će biti laž I(A)=0. Stoga je nemoguć protuprimjer[63] te je argument valjan.[64]

2. KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki izvod čija je duljina d_i manja ili jednaka m.

$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B \Rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vDash B$ za duljinu redaka manju ili jednaku m ($d_i \leq m$). Provjerimo sada tvrdnju za duljinu redaka m+1 (d_i =m+1).

Dodajemo redak m+1 na osnovi definicije izvoda koristeći neko od pravila izvođenja. Stoga ćemo pogledati dodani redak za svako pravilo izvoda posebno.

(I) *Eliminacija konjunkcije* ($\wedge$E)

---

[62] Prisjetimo se da je zadnji redak izvoda uvijek formula koja je konkluzija.

[63] Protuprimjer bi u ovom slučaju bio situacija u kojoj je premisa istinita, a konkluzija lažna.

[64] Newton-Smith 1985, str. 94

Po pretpostavci metateorem adekvatnosti vrijedi za svaki izvod čija je duljina m ili manja ($d_i \leq m$). To znači da se izvod formule B iz premisa $A_1, \ldots, A_n$, sastoji od m ili manje redaka, te da u tom slučaju vrijedi $\{A_1, \ldots, A_n\} \vDash B$ (B je semantička posljedica premisa).

Sada je potrebno dokazati metateorem za slučaj kada je duljina izvoda $d_i = m+1$ (2. korak matematičke indukcije).

Kako bismo produljili izvod za jedan korak, pretpostavimo da se u izvodu nalazi formula oblika $C \wedge D$ (formula $C \wedge D$ može biti konkluzija ili jedna od formula u nizu). Kako bismo proširili izvod za jedan redak, pravilom eliminacije konjunkcije iz formule $C \wedge D$ možemo izvesti formulu C (ili formulu D), te dobijemo sintaktički niz koji izgleda: $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash C$. Pretpostavimo da su $A_1, \ldots, A_n$ istinite. Ako to vrijedi, onda vrijedi i da je konjunkcija $C \wedge D$ istinita. Dakle, kada koristimo pravilo eliminacije konjunkcije i izvedemo jedan konjunkt, formulu C, ona je istinita jer je cijela konjunkcija istinita, a konjunkcija je istinita ako i samo ako su oba konjunkta istinita. Prema tome semantički je niz $\{A_1, \ldots, A_n\} \vDash C$ tautologija. Stoga metateorem vrijedi i za drugi korak matematičke indukcije.[65]

(II) *Uvođenje konjunkcije* (∧U)

Pretpostavimo ponovno, kao i kod eliminacije konjunkcije, da imamo izvod u kojem je dobivena formula B iz premisa A1…An u m broj redaka ili manje te vrijedi $\{A_1, \ldots, A_n\} \vDash B$. Da bi se proširila duljina izvoda s m broja redaka na m+1 pomoću pravila uvođenja konjunkcije, potrebno je već prethodno u izvodu imati retke u kojima se pojavljuju formula C i formula D koje se pojavljuju u m retku ili prije. Pomoću ta dva retka pravilom ∧U dobivamo novi redak s formulom $C \wedge D$. Po pretpostavci vrijedi $A_1, \ldots A_n \vDash C$ i $A_1, \ldots, A_n \vDash D$, pa vrijedi i da su C i D istinite formule. Konjunkcija je istinita kad su oba konjunkta istinita, pa je zato $C \wedge D$ te vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash C \wedge D$.[66]

(III) *Dvostruka negacija* (DN)

[65] Newton-Smith 1985, str. 94-95

[66] Ibid. str. 65.

Pretpostavlja se da imamo izvod u kojem je dobivena formula B iz premisa A1…An u m broj redaka ili manje te vrijedi $\{A_1,\ldots, A_n\}\vDash B$. Proširujemo duljinu izvoda na m+1. U samom izvodu već postoji formula oblika ¬¬C u retku m ili prije te se primjenom pravila dvostruke negacije dobije formula C. Po pretpostavci vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash \neg\neg C$, što znači da ako su premise A1,…An istinite, onda je i formula ¬¬C istinita. Budući da su formule ¬¬C i C ekvivalentne, istinita je i formula C. Prema tome, vrijedi da je semantički niz $\{A_1, \ldots, A_n\}\vDash C$ tautologija.[67]

(IV) *Modus ponendo pollens* (MPP)

Pretpostavlja se da imamo izvod u kojem je dobivena formula B iz premisa $A_1, \ldots, A_n$ u m broj redaka ili manje te vrijedi { $\{A_1, \ldots, A_n\}\vDash B$. Kako bi se izvod mogao produljiti na m+1 broj redaka, u redcima m ili prije mora postojati formula oblika $C\rightarrow D$ i formula C gdje slijedi $A_1, \ldots, A_j \vdash C$ i $A_k, \ldots, A_n \vdash C\rightarrow D$, od kojih svaki izvod mora imati duljinu izvoda m ili manje od m. Po pretpostavci vrijedi da $\{A_1, \ldots, A_n\}\vdash B \Rightarrow \{A_1, \ldots, A_n\}\vDash B$. Prema tome, znamo da $A_1, \ldots, A_j \vDash C$ i $A_k,\ldots, A_n \vDash C\rightarrow D$. Nakon što je to utvrđeno, može se iskoristiti pravilo modus ponens kako bismo proširili izvod na m+1 redaka i izvukli konsekvens D. Kondicional je istinit kad je antecedens lažan ili konsekvens istinit. Znamo da je kondicional $C\rightarrow D$ istinit kao i njegov antecedens C, pa zato formula D mora biti istinita. Prema tome, vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash D$.[68]

(V) *Modus tollendo tollens* (MTT)

Kao i kod modus ponensa, kako bismo mogli produljiti izvod na duljinu redaka m+1, u izvodu moramo imati formulu $C\rightarrow D$, ali i formulu ¬D u retku m ili prije te slijedi $A_1, \ldots, A_j \vdash \neg D$ i $A_k, \ldots, A_n \vdash C\rightarrow D$. Po pretpostavci vrijedi da je semantički niz $A_1,\ldots A_n \vDash B$ tautologija ako iz premisa $A_1, \ldots, A_n$ možemo izvesti formulu B u m broj koraka ili manje. Prema tome, znamo da vrijedi $A_1, \ldots, A_j \vDash \neg D$ i $A_k, \ldots, A_n \vDash C \rightarrow D$. Pošto se to utvrdi, pravilom proširujemo izvod

[67] Ibid.
[68] Ibid. str. 66

$A_1, \ldots, A_n \vdash \neg C$. Kondicional je istinit kad je antecedens lažan ili konsekvens istinit. Formula $\neg D$ istinita je što znači da je u kondicionalu $C \rightarrow D$ konsekvens lažan, a cijeli je kondicional istinit. Iz toga možemo izvući da antecedens mora biti lažan, što znači da je formula $\neg C$ istinita, prema tome vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash \neg C$.

(VI) *Uvođenje disjunkcije* (∨U)

Ako se formula B može izvesti iz $A_1, \ldots, A_n$ u m broj koraka ili manje, vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash B$. Kao i za svako pravilo, proširuje se broj redaka s m na m+1. U izvodu već postoji formula C negdje u m retku ili prije, te korištenjem pravila uvođenja disjunkcije dobivamo formulu oblika $C \vee D$, pa dobijemo $A_1, \ldots, A_n \vdash C \vee D$. Budući da po pretpostavci vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash B$, znamo da vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash C$. Disjunkcija je istinita ako je barem jedan od disjunkata istinit. Znamo da je formula C istinita, pa je i cijela disjunkcija istinita te je semantički niz $A_1, \ldots, A_n \vDash C \vee D$ tautologija.

(VII) *Disjunktivni silogizam* (DS)

Ako se formula B može izvesti iz $A_1, \ldots, A_n$ u m broj koraka ili manje, vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash B$. Kako bismo proširili broj redaka na m+1, moramo imati formulu $C \vee D$ i $\neg C$ negdje u redcima m ili prije. Iz premisa $A_1, \ldots, A_n$ izvediva je formula $C \vee D$, kao i formula $\neg C$, pa po pretpostavci vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash C \vee D$ i $A_1, \ldots, A_n \vDash \neg C$. Koristeći pravilo disjunktivnog silogizma, iz disjunkcije pomoću negacije jednog disjunkta izvlačimo drugi, što znači da $A_1, \ldots, A_n \vdash D$. Disjunkcija je istinita ako je barem jedan od disjunkata istinit. Budući da je $\neg C$ istinita formula, može se zaključiti da je C lažna te D mora biti istinita formula jer znamo da je disjunkcija $C \vee D$ istinita te vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash D$.

(VIII) *Kondicioni dokaz* (KD)

Ako se formula B može izvesti iz $A_1, \ldots, A_n$ u m broj koraka ili manje, vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash B$. Izvod se proširuje za jedan korak pravilom kondicionog dokaza tako da se jedna od premisa prebaci na stranu konkluzije gdje preuzima ulogu antecedensa kondicionala u kojem dotadašnja konkluzija postaje konsekvens nastalog kondicionala. Tako prebačena formula ne nalazi se više u skupu premisa te sintaktički niz izgleda:

$A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \vdash A_i \to B$.

Pretpostavimo da semantički niz $A_1, \ldots, A_i$-1, $A_{i+1}, \ldots, A_n \vDash A_i \to B$ nije tautologija. To bi značilo da postoji protuprimjer, slučaj u kojem su sve premise $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ istinite, a konkluzija $A_i \to B$ lažna. Kako bi kondicional bio lažan, antecedens mora biti istinit, a konsekvens lažan. To bi značilo da je formula A_i istinita, a formula B lažna. No, to bi značilo da su premise $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$ istinite, pa po pretpostavci i formula B mora biti istinita. Tu dolazimo do kontradikcije i odbacujemo pretpostavku te zaključujemo da vrijedi $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \vDash A_i \to B$.[69]

(IX) *Reductio ad absurdum* (RAA)

Po pretpostavci vrijedi: ako je formula B izvediva iz A_1,…An u m broj koraka ili manje, vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash B$. Kako bi se ovim pravilom izvod mogao proširiti, negdje u izvodu (u retku m ili prije) mora postojati kontradikcija, pa vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vdash C \land \neg C$ te, prema tome, po pretpostavci možemo zaključiti da je vrijedi A_1, …. $A_n \vDash C \land \neg C$. Primjenom pravila reductio ad absurdum dobijemo formulu $\neg A_i$ o kojoj ovisi kontradikcija $C \land \neg C$. Pretpostavimo da skup premisa $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ nema formulu $\neg A_i$ kao semantičku posljedicu. Uzevši u obzir tu pretpostavku, znamo da postoji slučaj gdje su premise $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$, a formula $\neg A_i$ lažna što čini A_i istinitom formulom. Ako je $A_1, \ldots, A_n$, onda je i kontradikcija $C \land \neg C$ istinita jer vrijedi $A_1, \ldots, A_n \vDash C \land \neg C$, što je očito nemoguće jer je kontradikcija nužno lažna formula. Pošto smo došli do kontradikcije, potrebno je odbaciti početnu pretpostavku da formula $\neg A_i$ nije semantička posljedica skupa $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$, što nas dovodi do toga da vrijedi $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \vDash \neg A_i$.[70]

[69] Ibid. str. 96
[70] Ibid. str. 96-96

Dokaz metateorema adekvatnosti za račun sudova

Kao što već znamo, metateorem adekvatnosti glasi:

> ako je formula B izvediva iz skupa premisa $A_1, \dots, A_n$, onda je semantički niz $A_1, \dots, A_n \vDash B$ tautologija. Odnosno, ako je formula B teorem, onda je formula B tautologija.

Kako bi neka formula A bila dokaziva, mora postojati barem jedan izvod duljine m za tu formulu. Ako je formula A dokaziva za duljinu izvoda 1, onda je ta formula A aksiom, a aksiom je valjana formula. Budući da po pretpostavci vrijedi sljedeće: ako je formula B izvediva iz skupa premisa $A_1, \dots, A_n$, onda je semantički niz $A_1, \dots, A_n \vDash B$ tautologija za duljinu izvoda m. Moramo pokazati da to isto vrijedi i za neposredni sljedbenik m+1.

Pretpostavimo da imamo neku formulu B koja je dokaziva i skup formula $A_1, \dots, A_n$ potrebnih za dokaz formule B duljine m. Vrijedi da su A_n i B ekvivalentne formule $A_n \equiv B$[71], formula A_n je ili aksiom ili formula dobivena korištenjem pravila modus ponens iz formula A_j i A_k, gdje su j i k manji od n.

Ako je formula A_n aksiom, valjana je jer je svaki aksiom valjana formula.

Ako formula nije aksiom, već je izvedena na osnovi pravila modus ponens, po pretpostavci vrijedi da su A_j i A_k valjane formule.

Prisjetimo se da općenito kod pravila modus ponens vrijedi: ako je istinosna vrijednost od A istina i istinosna vrijednost od $A \rightarrow B$ istina, onda mora vrijediti da je istinosna vrijednost od B također istina. Budući da su A_j i A_k istinite, A_n mora biti istinita formula. Formula A_n valjana je.[72]

Zaključak

Cilj ovog rada bio je pokazati i dokazati da je logika sudova adekvatan, odnosno konzistentan sustav jer je adekvatnost, uz

[71] Vrijedi prema definiciji na str. 16: a) formula An je B, odnosno ekvivalentne su: An ≡ B.

[72] Vuković 2007, str. 45-46

potpunost, značajno i važno svojstvo logike sudova. Prije samog dokaza metateorema adekvatnosti naglasili smo da će se ovaj rad baviti sustavom prirodne dedukcije i sustavom računa sudova. Na početku je prikazan povijesni pregled prirodne dedukcije te računa sudova za bolje shvaćanje razvoja tih sustava kroz godine, te zašto se uopće javila potreba za njihovim nastajanjem. Uz to što se objašnjava kako su se ti sustavi razvijali, spominju se i filozofi, logičari i matematičari koji su se bavili tim temama. Nakon povijesnog pregleda tih sustava govori se o logici sudova općenito – što je i od čega se sastoji. U tom smo dijelu napravili distinkciju između semantike i sintakse, objasnili svaki dio zasebno te naglasili da je glavni fokus rada na sintaksi jer u sintaksu spadaju izvodi. Zatim slijedi osnovno o računu sudova i osnovno o prirodnoj dedukciji. Kao i kod logike sudova, pojašnjava se zašto se koriste, na koji se način razlikuju, od čega se sastoje te se opisuje svaki dio posebno – za prirodnu su dedukciju to pravila izvođenja, a za račun sudova pravilo modus ponens te aksiomi. Pošto smo objasnili ove osnove, prešli smo na metateoreme logike sudova, a to su metateorem adekvatnosti i potpunosti. U tom dijelu dolazim do same srži ovog rada – dokaza metateorema adekvatnosti. Uzevši u obzir da se dokaz metateorema adekvatnosti odnosi na izvode, potrebno je uvesti matematičku indukciju po duljini izvoda, objasniti što je i navesti korake od kojih se sastoji. Kako bi se dokazao metateorem adekvatnosti za prirodnu dedukciju, bilo je potrebno dokazati metateorem za svako pravilo zasebno. Kao i za prirodnu dedukciju, za račun sudova bilo je potrebno dokazati metateorem za pravilo modus ponens te za aksiome.

Literatura

1. Boole, G. 1847. The Mathematical Analysis of Logic. ¸ Cambridge: Macmillan.
2. Cauman, L. 2004. Uvod u logiku prvog reda. Zagreb: Naklada Jesenski i Turk.
3. Corcoran, J. 1972. Aristotle's Natural Deduction System. Journal of Symbolic Logic 37: 437.
4. De Morgan, A. 1847. Formal Logic. London: Walton and Maberly.
5. Frege, G. 1879. Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle.
6. Gentzen, G. 1934. Untersuchungen uber das Logische Schliessen, Mathematische Zeitschrift. 176-210 i 405-431.
8. Herbrand, J. 1930. Recherches sur la theorie de la demonstration. Travaux de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathematiques et Physiques. Warsovie.
9. Hurley, P. 2007. A Concise Introduction to Logic 10th edition. Wadsworth Publishing.
10. Jaskowski, S. 1934. On the Rules of Suppositions in Formal Logic. Studia Logica 1: 5-32
11. Kovač, S. 2010. Logika. 14. izdanje Zagreb: Hrvatska sveučilišna naklada.
12. Łukasiewicz, J. 1970. Selected Works. Amsterdam: North-Holland.
13. Newton-Smith, W. H. 1985. Logic: an introductory course. Oxford: Routledge
14. Pelletier, F. 1999. A Brief History of Natural Deduction. History and Philosophy of Logic 20(1): 1-31.
15. Petrović, G. 1996. Logika. 25. izdanje Zagreb: Element.
16. Post, E. 1921. Introduction to a General Theory of Propositions. American Journal of Mathematics 43: 163-185.
17. Russell, B. 1906. The Theory of Implication. American Journal of Mathematics 28: 159-202.
18. Tarski, A. 1930. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. Monatshefte fur

Mathematik und Physik, 37: 361-404.
19. Vuković, M. 2007. Matematička logika 1. Skripta. 4. izdanje. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.
20. Wittgenstein, L. 1922. Tractatus Logico-Philosophicus. London: Routledge and Kegan Paul.

Internetske stranice:

1. http://www.iep.utm.edu/prop-log/ (stranica posjećena: 22. prosinca 2017.)
2. http://www.iep.utm.edu/nat-ded/#H1 (stranica posjećena: 22. prosinca 2017.
3. http://webspace.ship.edu/jehamb/f07/333/axsystems.pdf (stranica posjećena: 22. prosinca 2017.)
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Frege's_propositional_calculus (stranica posjećena: 22. prosinca 2017.)