Trčati ili hodati po kiši?

Jelena Jankov[1], *Dejan Gemeri*[2]

Riječ dvije o polaznom problemu

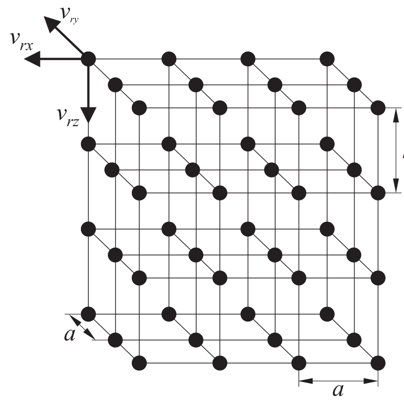
Sigurno se puno puta dogodilo da dođete na neko mjesto, po lijepom vremenu, a kada ste se željeli vratiti spustio se pljusak neviđenih razmjera. Nemate kišobran, došli ste pješice, a pljusak ne odaje nikakve naznake da će uskoro prestati. Morate krenuti kući, spremno se pomirujete da ćete potpuno pokisnuti. Nakon što dođete kući, pokisnuli ste kao miševi i brzo se sušite da se ne bi prehladili. Dok sa sebe skidate mokru odjeću, upali vam se lampica i pitate se: postoji li razlika u tome koliko ćemo se smočiti ako cijelim putem hodamo ili ako cijelim putem trčimo? Što je bolje od te dvije mogućnosti, trebamo li trčati ili hodati? Pokušajmo saznati odgovor na ovo vječno pitanje. Prije nego što krenemo, spomenimo da je napisano nekoliko radova s različitih gledišta i pretpostavki. Većina radova pruža jedinstven odgovor na dano pitanje, tako da se u zaključcima puno i ne razlikuju. Najveće razlike su u polaznim pretpostavkama i načinu na koji se prikazuje oblik kapljice, njezina brzina i slično. Poprilično je teško utvrditi koliko su neki parametri koji su se koristili u izračunima približni onim stvarnim, a najveći problem stvaraju volumen kapljica kiše i njezin intenzitet. To je dosta zahtjevno eksperimentalno provjeriti, a upravo su ti parametri ključ svake postavljene teorije. Najbliže koliko možemo prići je da kapljice kiše promatramo kao trodimenzionalnu rešetku, a čovjeka kao kvadar, te ćemo uz ove pretpostavke pokušati odgovoriti na postavljeno pitanje.

[1] Asistentica je na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: `jjankov@mathos.hr`

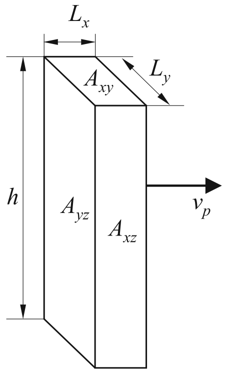
[2] Student na Odjelu za fiziku Sveučilišta u Osijeku; e-pošta: `dgemeri@fizika.unios.hr`

Fizikalna pozadina

Model koji ćemo opisati zove se *Model kišne rešetke* (MKR) i predstavljen je u radu [6]. Pretpostavit ćemo da je kiša trodimenzionalna rešetka s jediničnim ćelijama u kojoj svaki element rešetke odgovara jednoj kapi kiše i jedinstveno je određen x, y i z koordinatama. Dodatna pretpostavka da je kiša izotropna u smjeru x i y osi, povlači da rubovi ćelija moraju biti jednake duljine u tim smjerovima. MKR zasniva se na pretpostavci da je kiša homogena, odnosno da su udaljenosti svake kapljice kiše na jednoj koordinatnoj osi do njezinih prvih susjeda približno jednake. Na slici 1 uočimo i komponente vektora brzine kapljice: v_{rx}, v_{ry} i v_{rz} u smjeru osi x, y i z redom.



Slika 1. Struktura kapljica kiše.



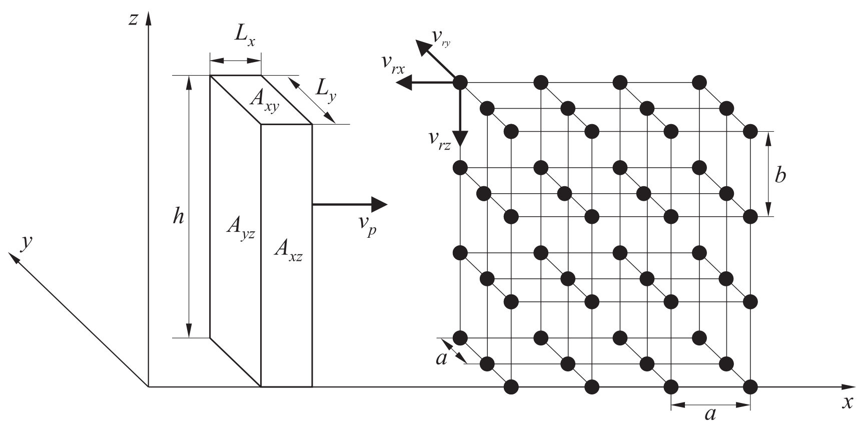
Slika 2. Objekt u kretanju.

Pretpostavit ćemo da su komponente vektora brzine kapljice konstantne.

Nakon što smo prikazali kapljice kiše, na redu je da u našu priču "uvedemo" i čovjeka na kojeg će ona padati. Prema [6] čovjeka ćemo prikazati kao kvadar (slika 2).

Na slici 2 visina objekta označena je s h, L_x i L_y predstavljaju duljinu i širinu objekta, a v_p brzinu objekta u smjeru x-osi.

Sada ćemo kišu i objekt postaviti u Kartezijev koordinatni sustav i proučavati njihovo međudjelovanje (slika 3).



Slika 3. Međudjelovanje kiše i objekta.

Put po kojem se objekt kreće označit ćemo s D. S obzirom na izgled i strukturu kiše možemo reći da postoje četiri horizontalne ravnine rešetke koja predstavlja kišu. S t_0 označit ćemo vrijeme između padanja na tlo dvije uzastopne horizontalne ravnine, a udaljenost između dvije horizontalne ravnine s b, što možemo vidjeti i sa slike 3. Dani parametri povezani su brzinom v_{rz} u smjeru z osi, te koristeći dobro poznatu formulu za brzinu $v = \frac{s}{t}$, imamo

$$|v_{rz}| = \frac{b}{t_0}. \tag{1}$$

Kako bismo preciznije opisali problem, morat ćemo uvesti pojam kojeg nazivamo stopa padalina i označavamo ga s P, a predstavlja mjeru intenziteta kiše. P je definiran preko volumena vode V koja pada na neko područje površine A tijekom nekog vremena t. Formula za stopu padalina dana je s

$$P = \frac{V}{At}, \tag{2}$$

a mjerna jedinica je $\mathrm{m/s}$. Koristeći formulu (2), moguće je dobiti volumen vode koja padne na samo jednu proizvoljnu horizontalnu ravninu rešetke, čija je površina označena s A_{xy}:

$$V_{xy} = PA_{xy}t. \tag{3}$$

Možemo izračunati i broj kapljica koje padnu na jednu horizontalnu ravninu kišne rešetke duljina stranica L_x i L_y:

$$N_{xy} = \frac{L_x}{a}\frac{L_y}{a} = \frac{A_{xy}}{a^2}. \tag{4}$$

Uz pretpostavku da su sve kapljice kiše jednakog volumena V_d, volumen kiše koja je pala na jednu horizontalnu ravninu rešetke dan je s

$$V_{xy} = V_d\frac{A_{xy}}{a^2}. \tag{5}$$

Izjednačavanjem jednadžbi (3) i (5) dobivamo parametar a:

$$a = \sqrt{\frac{V_d}{Pt}}. \tag{6}$$

Jednadžbe za broj kapljica na područjima površina A_{xz} i A_{yz}, redom, izvode se analogno:

$$N_{yz} = \frac{L_y}{a}\frac{h}{b} = \frac{A_{yz}}{ab}, \tag{7}$$

$$N_{xz} = \frac{L_x}{a}\frac{h}{b} = \frac{A_{xz}}{ab}. \tag{8}$$

Možemo nastaviti kombinirati izraze, pa tako uvrštavanjem jednadžbi (1) i (6) u jednadžbe (7) i (8) dobivamo N_{yz} i N_{xz} izražene na drugačiji način:

$$N_{yz} = \frac{A_{yz}}{|v_{rz}|}\sqrt{\frac{P}{tV_d}}, \tag{9}$$

$$N_{xz} = \frac{A_{xz}}{|v_{rz}|}\sqrt{\frac{P}{tV_d}}. \tag{10}$$

Pomnožimo li N_{yz} (N_{xz}) s brojem prednjh (bočnih) ravnina rešetke, dobivamo ukupan broj kapljica koje pogađaju objekt s prednje (bočne) strane sve do kraja putovanja. Također, možemo računati i volumen vode koja pada na prednju i bočnu stranu objekta tijekom njegovog putovanja, te ih označimo s V_{prednji} i $V_{\text{bočni}}$. Dobivaju se tako da volumen jedne kapljice, V_d, množimo s brojem kapljica koje su pale na prednju (bočnu) stranu objekta, te dodatno s brojem prednjih (bočnih) ravnina kišne rešetke koje su *pogodile* objekt tijekom putovanja. Dobivamo:

$$V_{\text{prednji}} = V_d N_{yz} \frac{|v_p - v_{rx}|t}{a}, \tag{11}$$

$$V_{\text{bočni}} = V_d N_{xz} \frac{|v_{ry}|t}{a}. \tag{12}$$

Veličina t predstavlja vrijeme putovanja objekta. Apsolutne vrijednosti koriste se zato što volumeni koje računamo ne mogu poprimiti negativne vrijednosti, kao ni broj kapljica koje padaju na pojedinu stranu objekta. Igrajući se dalje s jednadžbama, uvrštavanjem a, N_{yz} i N_{xz} koji su predstavljeni jednadžbama (6), (9) i (10), redom, u jednadžbe (11) i (12), dobivamo nove izraze za volumene vode koja je pala na prednju i bočnu stranu:

$$V_{\text{prednji}} = P \frac{|v_p - v_{rx}|t}{|v_{rz}|} A_{yz}, \tag{13}$$

$$V_{\text{bočni}} = P \frac{|v_{ry}|t}{|v_{rz}|} A_{xz}. \tag{14}$$

Zanimljivo je primijetiti da je nepoznati parametar t_0 kojeg smo uveli u matematički račun nestao zbog kombiniranja jednadžbi na ovaj način, iz čega možemo zaključiti da krajnji rezultat ne ovisi o vremenu koje je proteklo između padanja dvije uzastopne horizontalne ravnine rešetke. Koristeći formulu (2) za stopu padalina, možemo izračunati volumen vode koja je pala na gornju stranu objekta površine A_{xy}, odnosno na sam vrh objekta:

$$V_{\text{vrh}} = PtA_{xy}. \tag{15}$$

Kako netko ne bi rekao da se *od drveća ne vidi šuma*, vratimo se na naš polazni problem. Zanimalo nas je trebamo li trčati ili hodati po kiši kako bismo što manje pokisnuli. Drugim riječima, zanimalo nas je da li je volumen vode koja padne na objekt manji ili veći ukoliko povećavamo brzinu objekta. Ukupni volumen vode koja padne na objekt tijekom vremena t dobivamo iz jednadžbi (13), (14) i (15):

$$V_{\text{ukupno}} = Pt \left[A_{xy} + \frac{|v_p - v_{rx}|}{|v_{rz}|} A_{yz} + \frac{|v_{ry}|}{|v_{rz}|} A_{xz} \right]. \tag{16}$$

Budući da tijelo prelazi put duljine D brzinom v_p, lako možemo izračunati t:

$$t = \frac{D}{v_p}. \tag{17}$$

Uvrstimo li ovo u jednadžbu (16), dobivamo

$$V_{\text{ukupno}} = PD \left[\frac{A_{xy}}{v_p} + \frac{\left|1 - \dfrac{v_{rx}}{v_p}\right|}{|v_{rz}|} A_{yz} + \frac{|v_{ry}|}{|v_{rz}| v_p} A_{xz} \right]. \tag{18}$$

Formula (18) prikazuje ovisnost ukupnog volumena vode koja padne na objekt, brzine objekta i brzine kapljica kiše u smjeru x, y i z osi, redom.

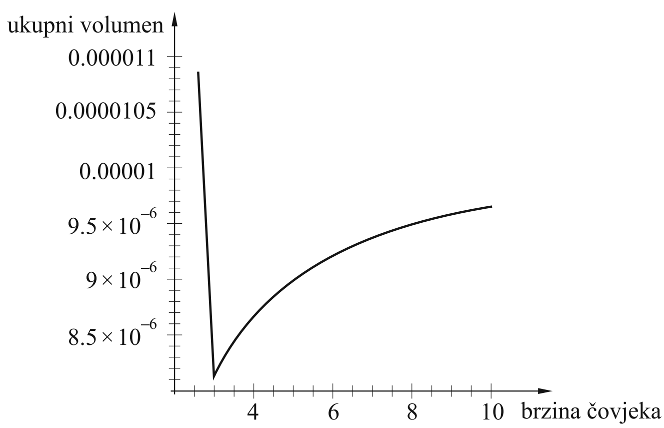
Provjerimo što nam formula (18) govori u jednoj sasvim očitoj situaciji: koliko ćemo se pokvasiti ako hodamo sve sporije, te na kraju stojimo? Lako se vidi da je $\lim_{v_p \to 0} V_{\text{ukupno}} = +\infty$, što bismo naravno i očekivali. S druge strane, kojom god brzinom trčali po kiši, očekujemo da ćemo barem malo pokisnuti. Zaista, ako $v_p \to +\infty$, iz (18) slijedi $\lim\limits_{v_p \to +\infty} V_{\text{ukupno}} = PD\dfrac{A_{yz}}{|v_{rz}|}$.

Promotrimo li malo bolje završnu jednadžbu (18), primjećujemo da ako u smjeru x-osi kiša pada suprotno od kretanja čovjeka (odnosno, $v_{rx} < 0$), najmanje ćemo pokisnuti ako trčimo što je brže moguće, odnosno tako da $v_p \to +\infty$. Međutim, ako u smjeru x-osi kiša pada u smjeru kretanja čovjeka, postignemo li brzinu takvu da je $v_p = v_{rx}$, pokratit će se srednji izraz iz jednadžbe (18) i to će značiti da je volumen vode koja padne na prednju (stražnju) stranu tijela nula. Odnosno, za $v_p = v_{rx}$ ukupni volumen vode koja je pala na objekt jednak je

$$V_{\text{ukupno}} = PD\left[\frac{A_{xy}}{v_{rx}} + \frac{|v_{ry}|}{|v_{rz}|v_{rx}}A_{xz}\right].$$

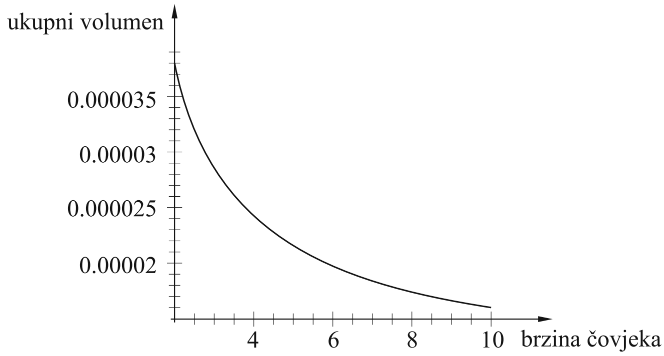
Iz prethodnog vidimo da ćemo najviše pokisnuti ako se krećemo jako polako, pa je odgovor na pitanje postavljeno na početku: trebamo trčati. Ipak, pokazalo se da postoji ograničena količina kapi koju sakupi objekt čak i kad se kreće beskonačnom brzinom, što pokazuje da nema neke velike prednosti trčimo li beskonačnom brzinom ili nekom prosječnom. Na primjer, ako trčimo brzinom 5 m/s dođemo 68 % manje mokri nego da hodamo. No, ako bismo trčali svjetskim rekordom na 100 m, brzinom 9.58 m/s, došli bismo 74 % manje mokri nego kad se krećemo brzinom 1 m/s. Vidimo da je to razlika samo u 6 %, a brzina trčanja je veća skoro 100 %. Ukoliko se malo zaigramo s jednadžbama i probamo uvrstiti parametre prosječnog čovjeka za L_x, L_y i h, a ostale parametre odaberemo tako da budu što približniji izmjerenim parametrima kiše, to bi izgledalo ovako:

$$\begin{aligned} L_x &= 0.2\ \text{m}, & v_{ry} &= 3\ \text{m/s},\\ L_y &= 0.4\ \text{m}, & v_{rx} &= \pm 3\ \text{m/s},\\ h &= 1.8\ \text{m}, & v_{rz} &= -7.75\ \text{m/s},\\ D &= 100\ \text{m}, & V_d &= 1.08\cdot 10^{-8}\ \text{m/s}.\\ P &= 1.11\cdot 10^{-6}\ \text{m/s}, \end{aligned}$$



Slika 4. Ovisnost ukupnog volumena vode i brzine objekta kada kiša pada u smjeru kretanja čovjeka.

Važnu ulogu ima predznak od v_{rx}: kada je negativan, kapljice padaju na prednji dio tijela, a kada je pozitivan one padaju na njegov stražnji dio. Zanima nas kako se ponaša ukupni volumen vode obzirom na brzinu v_p kojom se objekt kreće. To je prikazano na slikama 4 i 5.



Slika 5. Ovisnost ukupnog volumena vode i brzine objekta kada kiša pada suprotno od smjera kretanja čovjeka.

Sa slike 4 primjećujemo da je u slučaju $v_{rx} > 0$ volumen vode najmanji kada je brzina čovjeka približna brzini v_{rx}. Drugim riječima, ako kiša pada u smjeru kretanja čovjeka, on će najmanje pokisnuti ako se kreće brzinom koja je približna komponenti vektora brzine kapljice u smjeru x-osi. Upravo to smo ranije i zaključili. Međutim, sa slike 5 vidimo da je za $v_{rx} < 0$ volumen vode obrnuto proporcionalan brzini kojom se kreće čovjek, odnosno, što brže čovjek trči manje će pokisnuti. Ovo se podudara sa zaključkom koji smo izveli iz formule (18). Postoji jedan slučaj u kojem se sve ovo može smatrati zanemarivim, a to je onaj u kojem je veliki put koji moramo prevaliti po kiši. Postoji količina kiše nakon koje se osoba smatra "potopljenom" i ako kiša još uvijek pada mi ne možemo biti više mokri nego što jesmo. Dakle, za velike putove računa se da ćemo neizbježno pokisnuti do gole kože. Zbog toga se nemojte zamarati i samo hodajte!

Kratki pregled nekih drugih modela

Ovdje smo opisali Model kišne rešetke [6]. Kao što smo već napomenuli, na pitanje treba li trčati ili hodati po kiši pokušali su odgovoriti mnogi autori, te su došli do sličnih zaključaka. Zanimljivo je da su se skoro svi radovi koje smo proučavali na ovu temu razlikovali u načinu na koji je problem postavljen.

U [2] se čovjeka također promatra kao kvadar koji se kreće po kiši. Izvedena je formula koja povezuje broj kapi kiše i brzinu čovjeka, te se može zaključiti da je broj kapi kiše obrnuto proporcionalan brzini čovjeka, odnosno bolje je trčati nego hodati. Posebno je komentiran slučaj kada je $v_{rx} > 0$, te je zaključeno da je u tom slučaju brzina $v_p = v_{rx}$ optimalna uz određene uvjete.

U [1] se prvo komentira jednostavan model u kojem se zanemaruje sve osim brzine čovjeka i kiše, te duljine puta koji čovjek prelazi po kiši. Zatim se uvodi mjera intenziteta kiše, kut θ pod kojim kiša pada i objašnjava se kako na problem utiče veličina kapljica. Prisjetimo se da mi nismo razlikovali kapljice po veličini, te smo pretpostavili da su sve jednakog volumena V_d. Čovjek je prvo predstavljen kao ravna ploča, a zatim kao kvadar budući da to više odgovara stvarnoj situaciji. Zaključak je isti kao i u [6]: ako kiša pada u smjeru suprotnom od kretanja čovjeka, treba trčati što je brže moguće, a ako pada u smjeru kretanja čovjeka, treba prilagoditi brzinu brzini v_{rx}.

U [4] je donesen, s matematičke strane, jako zanimljiv zaključak. Izvedena je formula koja prikazuje ovisnost ukupnog volumena vode R i brzine čovjeka v, pri čemu je pretpostavljeno da je $v > 0$ u svakoj točki puta. Pokazano je da je ukupni volumen vode minimalan u sljedeća dva slučaja: ili kada je brzina čovjeka najveća moguća ili u točki u kojoj funkcija R nije derivabilna.

Zainteresirani čitatelji više o ovom problemu mogu pročitati u [3, 5, 7]. Dok ne proučite literaturu do najsitnijih detalja za vas imamo samo jedan savjet: ponesite kišobran!

Literatura

[1] J. A. Adam, *X and the City: Modeling Aspects of Urban Life*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2012.

[2] A. De Angelis, *Is it really worth running in the rain?*, European Journal of Physics 8 (3), 201–202, 1987.

[3] F. Bocci, *Whether or not to run in the rain*, European Journal of Physics 33 (5), 2012.

[4] H. Bailey, *On Running in the Rain*, Vol. 2, The College Mathematics Journal 33 (2), 88–92, 2002.

[5] J. J. Holden, S. E. Belcher, A. Horvath, I. Pytharoulis, *Raindrops keep falling on my head*, Weather 50 (11), 367–370, 1995.

[6] T. Kroetz, *The "running in the rain" problem revisited: An analytical and numerical approach*, Revista Brasileira de Ensino de fisica 31 (4), 4304–4309, 2009.

[7] T. Peterson, T. Wallis, *Running in the rain*, Weather 52 (3), 93–96, 1997.