MATEMATIKA

Dokazi konkurentnosti pravaca pomoću trilinearnih koordinata

Maja Starčević[1]

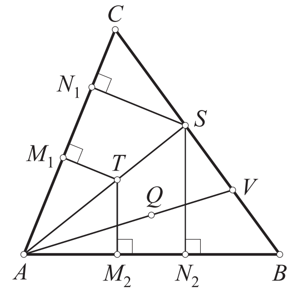
U radu [1] upoznali smo se s pojmom trilinearnih koordinata točaka u ravnini koje se određuju u odnosu na zadani trokut ABC, odnosno pravce na kojima leže njegove stranice. Podsjetimo se da koordinate $x:y:z$ govore da je omjer udaljenosti točke s tim koordinatama do pravaca BC, CA i AB jednak $|x|:|y|:|z|$, a predznak koordinate je pozitivan ako se točka nalazi s iste strane odgovarajućeg pravca kao i trokut ABC, dok je inače negativan, ili nula ako se točka nalazi baš na tom pravcu.

Sada nam je cilj vidjeti kako određivanjem trilinearnih koordinata točaka pravaca (ili polupravaca) možemo dokazati da se oni sijeku u jednoj točki. Tada ujedno kažemo da su pravci konkurentni. Proučimo za početak kakav je oblik koordinata točaka koje pripadaju pravcu koji prolazi kroz neki vrh trokuta ABC. Za početak dokazujemo jedan pomoćni rezultat.

Lema 1. *Zadan je trokut ABC i neka su p, $q>0$. Tada postoji točka S na dužini $\overline{BC}$ kojoj je omjer udaljenosti od pravaca CA i AB jednak $p:q$. Nadalje, neka je M bilo koja točka koja pripada trokutu ABC kojoj je omjer udaljenosti od pravaca CA i AB jednak $p:q$. Tada je geometrijsko mjesto točaka M skup $\overline{AS}\setminus\{A\}$.*

Dokaz. Dokažimo najprije da za dane p, $q>0$ postoji točka $S\in\overline{BC}$ takva da je $|SN_1|:|SN_2|=p:q$, pri čemu su N_1 i N_2 nožišta okomica iz S na pravce CA i AB redom (slika 1). Označimo kutove trokuta ABC redom s $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$ i $\sphericalangle ACB=\gamma$. Tada je $|SN_1|=|SC|\sin\gamma$ i $|SN_2|=|SB|\sin\beta$. Također je $|SB|+|SC|=|BC|$. Iz prethodnih jednakosti dobivamo

$$|SB|=\frac{q\sin\gamma|BC|}{p\sin\beta+q\sin\gamma}<|BC|\ .$$



Slika 1.

Dakle, tražena točka S postoji i jedinstvena je.

Nadalje, dokazat ćemo da je za sve točke $T\in\overline{AS}\setminus\{A,S\}$ omjer udaljenosti do pravaca CA i AB jednak $p:q$. Neka su M_1 i M_2 nožišta okomica iz T na pravce CA i AB redom. Tada zbog sličnosti trokuta ATM_1 i ASN_1 te ATM_2 i ASN_2 lako dobivamo

$$\frac{|TM_1|}{|SN_1|}=\frac{|AT|}{|AS|}=\frac{|TM_2|}{|SN_2|}$$

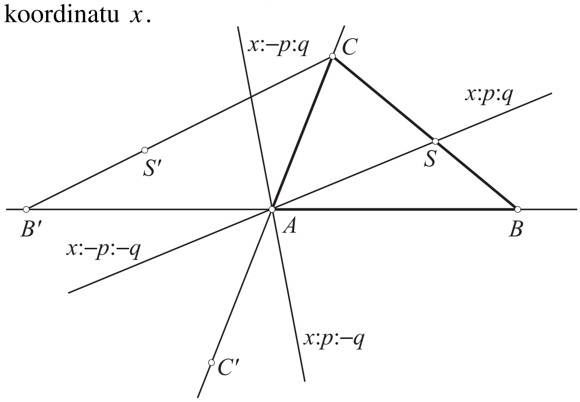
pa je

$$\frac{|TM_1|}{|TM_2|}=\frac{|SN_1|}{|SN_2|}=\frac{p}{q}\ .$$

[1] Autorica je docentica na Zavodu za primijenjenu matematiku Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `mstarcev@math.hr`

Dokažimo sada da su točke koje pripadaju dužini $\overline{AS}$, osim točke A, jedine s danim svojstvom omjera. Pretpostavimo da postoji neka točka trokuta ABC koja ima zadano svojstvo, a ne nalazi se na dužini $\overline{AS}$. Neka je to točka Q. Označimo presjek pravca AQ i dužine $\overline{BC}$ s V. Očito je $V \neq S$. Tada, kao i prije, primjenom sličnosti, dobivamo da je omjer udaljenosti točke V od pravaca CA i AB jednak $p : q$. Međutim, dokazali smo da je jedina točka koja ima takvo svojstvo, a nalazi se na dužini $\overline{BC}$, točka S i time dolazimo do kontradikcije. $\square$

Ako je točka S definirana kao u lemi 1, analogno dokazujemo da je polupravac AS skup svih točaka unutar kuta $\sphericalangle BAC$ s omjerom udaljenosti $p : q$ do pravaca CA i AB. Trilinearne koordinate točaka na polupravcu AS su oblika $x : p : q$, s tim da točke unutar trokuta ABC imaju pozitivnu koordinatu x, dok one izvan njega imaju negativnu koordinatu x.



Slika 2.

Nadalje, uzmimo točke B' i C' koje su centralno simetrične točkama B i C u odnosu na točku A (slika 2). Lako je pokazati da točke na pravcu AS koje pripadaju kutu $\sphericalangle B'AC'$ imaju koordinate oblika $x : -p : -q$, $x > 0$. Sada primijenimo lemu 1 na trokut ACB' te na dužini $\overline{B'C}$ dobivamo točku S' kojoj je omjer udaljenosti do pravaca CA i AB jednak $p : q$. Zaključujemo da i za sve točke pravca AS' vrijedi isti omjer.

Nadalje, točke pravca AS' koje se nalaze unutar kuta $\sphericalangle CAB'$ imaju koordinate oblika $x : -p : q$, dok one koje su unutar kuta $\sphericalangle C'AB$ imaju koordinate oblika $x : p : -q$. Također, točke iz skupa $AS \cup AS' \setminus \{A\}$ jedine su koje zadovoljavaju zadani omjer udaljenosti do pravaca CA i AB.

U nastavku ćemo vidjeti kako pomoću trilinearnih koordinata možemo dokazati konkurentnost pravaca. Promatramo jedan specijalan slučaj.

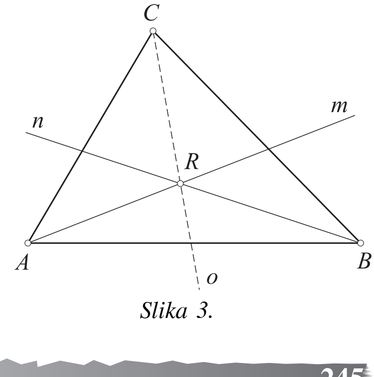
Teorem 1. *Neka su zadani polupravci m, n i o, koji prolaze kroz trokut ABC i vrhove A, B i C redom, s trilinearnim koordinatama $x : q : r$, $p : y : r$ i $p : q : z$, pri čemu su p, q i $r > 0$ neke konstante. Tada su polupravci m, n i o konkurentni i sijeku se unutar trokuta ABC u točki s trilinearnim koordinatama $p : q : r$.*

Dokaz. Neka je točka R presjek pravaca m i n (vidi sliku 3). Očito je da se točka R nalazi unutar trokuta ABC. Tada postoje x_R, $y_R > 0$ takvi da su trilinearne koordinate točke R jednake $x_R : q : r$ i $p : y_R : r$. Neka su d_i, $i = 1, 2, 3$ udaljenosti točke R do pravaca BC, CA i AB redom. Iz trilinearnih koordinata tada dobivamo

$$\frac{x_R}{q} = \frac{d_1}{d_2}, \qquad \frac{x_R}{r} = \frac{d_1}{d_3},$$

odnosno

$$\frac{p}{y_R} = \frac{d_1}{d_2}, \qquad \frac{p}{r} = \frac{d_1}{d_3}.$$



Slika 3.

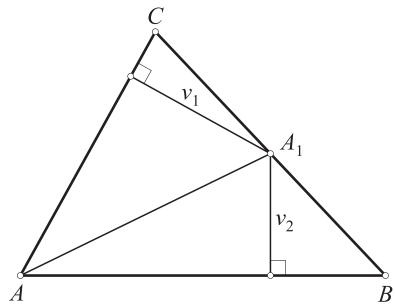
Iz prethodnih jednakosti zaključujemo prvo da je $x_R = p$, a zatim $y_R = q$. Dakle, trilinearne koordinate točke R su jednake $p : q : r$, a to povlači da se točka R nalazi i na polupravcu o pa su zadani polupravci konkurentni.

Napomenimo da se mogu promatrati i slučajevi gdje se polupravci sijeku izvan trokuta ABC te vrijede analogni zaključci. □

U nastavku želimo dokazati da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki. Poznato je da se ta tvrdnja može dokazati na više različitih načina. Sada ćemo ju dokazati pomoću trilinearnih koordinata.

Primjer 1. *Dokazati da se težišnice trokuta ABC sijeku u jednoj točki.*

Rješenje. Odredit ćemo trilinearne koordinate težišnica trokuta ABC. Označimo prvo $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Uzmimo npr. težišnicu $\overline{AA_1}$. Neka su v_1 i v_2 duljine visina iz A_1 u trokutima AA_1C i ABA_1 (slika 4). Kako je $2P(AA_1C) = 2P(ABA_1) = P(ABC)$, imamo $bv_1 = cv_2 = P(ABC)$ pa dobivamo da je $v_1 : v_2 = c : b$. Prema lemi 1 su trilinearne koordinate točaka na težišnici $\overline{AA_1}$ jednake $x : c : b$, a možemo ih pisati i kao $x : ca : ab$, pri čemu je $x > 0$.



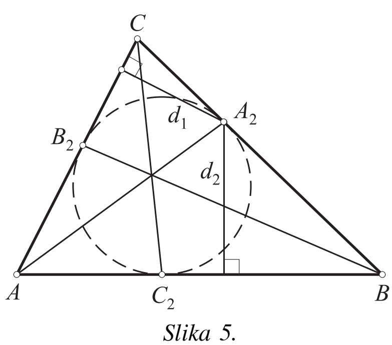
Slika 4.

Analogno, točke na ostalim dvjema težišnicama, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$, mogu se zapisati preko trilinearnih koordinata redom oblika $c : y : a$ i $b : a : z$, odnosno $bc : y : ab$ i $bc : ca : z$, za neke $y, z > 0$. Iz teorema 1 možemo zaključiti da se težišnice sijeku unutar trokuta ABC u točki s trilinearnim koordinatama $bc : ca : ab$, odnosno to su trilinearne koordinate težišta. Možemo ih pisati i kao $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

U nastavku ćemo prethodnom metodom dokazati egzistenciju tzv. Gergonneove točke.

Primjer 2. *Dokazati da se dužine koje spajaju vrhove trokuta ABC s diralištima trokutu ABC upisane kružnice s nasuprotnim stranicama sijeku u jednoj točki.*

Rješenje.



Slika 5.

Očito je da se svaki par zadanih dužina siječe unutar trokuta ABC. Zapišimo trilinearne koordinate točaka koje pripadaju tim dužinama. Označimo $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Neka su dirališta trokutu ABC upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom točke A_2, B_2 i C_2 (slika 5).

Odredimo prvo trilinearne koordinate točaka koje pripadaju dužini $\overline{AA_2}$. Kako je $|AB_2| = |AC_2|$, $|BC_2| = |BA_2|$ i $|CA_2| = |CB_2|$, te $|BA_2| + |A_2C| = a$, $|CB_2| + |B_2A| = b$, $|AC_2| + |C_2B| = c$, lako se izračuna da je

$$|BA_2| = \frac{a-b+c}{2}\,, \qquad |A_2C| = \frac{a+b-c}{2}\,.$$

Neka su d_1 i d_2 duljine visina iz A_2 u trokutima CAA_2 i A_2AB. Tada vrijedi

$$\frac{P(A_2AB)}{P(CAA_2)} = \frac{cd_2}{bd_1} = \frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{a-b+c}{a+b-c}\,.$$

Iz toga dobivamo $d_1 : d_2 = c(a+b-c) : b(a-b+c)$. Prema tome, iz leme 1 dobivamo da točke na dužini $\overline{AA_2}$ imaju trilinearne koordinate oblika

$$x : c(a+b-c) : b(a-b+c)\,.$$

Analogno za točke na dužinama $\overline{BB_2}$ i $\overline{CC_2}$ dobivamo koordinate

$$\begin{gathered} c(a+b-c) : y : a(-a+b+c)\,, \\ b(a-b+c) : a(-a+b+c) : z\,. \end{gathered}$$

Prethodne koordinate možemo zapisati i u sljedećem obliku

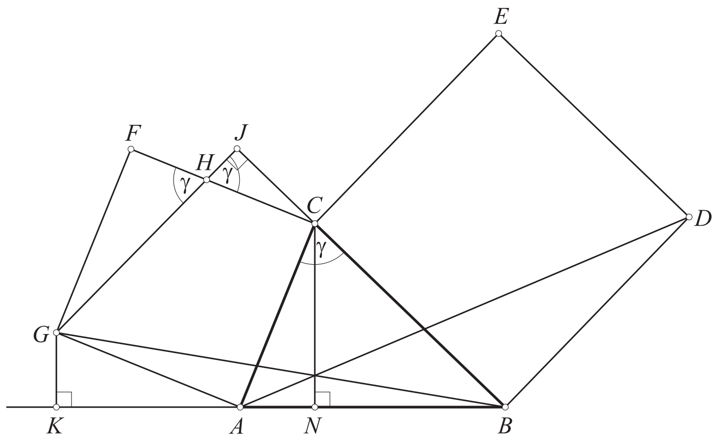
$$\begin{aligned} &\overline{AA_2}\ \ldots\ x : \frac{ca}{a-b+c} : \frac{ab}{a+b-c}\,, \\ &\overline{BB_2}\ \ldots\ \frac{bc}{-a+b+c} : y : \frac{ab}{a+b-c}\,, \\ &\overline{CC_2}\ \ldots\ \frac{bc}{-a+b+c} : \frac{ca}{a-b+c} : z\,. \end{aligned}$$

Prema teoremu 1 zaključujemo da se sve tri dužine sijeku unutar trokuta ABC u točki s trilinearnim koordinatama

$$\frac{bc}{-a+b+c} : \frac{ca}{a-b+c} : \frac{ab}{a+b-c}\,.$$

Primjer 3. *Zadan je šiljastokutan trokut ABC. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ konstruirani su s vanjske strane trokuta kvadrati $BDEC$ i $ACFG$, tim redom. Dokazati da se pravci AD, BG i visina iz vrha C trokuta ABC sijeku u jednoj točki.*

Rješenje. Označimo kutove trokuta ABC s $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$ i duljine stranica $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Neka je N nožište visine trokuta ABC iz vrha C. U [1] smo izveli trilinearne koordinate ortocentra trokuta ABC koje se, s obzirom da je trokut šiljastokutan, mogu pisati kao $\frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}$. Iz toga zaključujemo da su trilinearne koordinate visine iz C, a ujedno i polupravca CN, jednake $\frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : z$. Sad želimo odrediti trilinearne koordinate točaka na polupravcu BG. Za to je prema lemi 1 dovoljno odrediti koordinate točke G. Označimo nožište okomice iz G na pravac AB s K, a nožište okomice iz G na pravac BC s J (slika 6). Sada je $\sphericalangle GAK = 90^\circ - \alpha$ pa je $|GK| = |AG| \sin\sphericalangle GAK = b\cos\alpha$.



Slika 6.

Nadalje, vrijedi $|GJ| = |GH| + |HJ|$. Također je $\sphericalangle CHJ = \sphericalangle FHG = \gamma$. Imamo redom $|GF| = |GH| \sin\gamma$, $|FH| = |FG| \operatorname{ctg}\gamma$, $|HJ| = |HC| \cos\gamma = (|FC| - |FH|)\cos\gamma$, $|FC| = |GF| = b$. Iz tih jednakosti dobivamo

$$|GH| = \frac{b}{\sin\gamma}\,, \qquad |HJ| = b(1 - \operatorname{ctg}\gamma)\cos\gamma\,.$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo $|GJ| = b(\sin\gamma + \cos\gamma)$.

Dakle, polupravac BG ima trilinearne koordinate $|GJ| : y : |GK|$, odnosno $b(\sin\gamma + \cos\gamma) : y : b\cos\alpha$. Posve analogno dolazimo do koordinata polupravca AD koje su jednake $x : a(\sin\gamma + \cos\gamma) : a\cos\beta$. Kako je trokut ABC šiljastokutan, $\sin\gamma + \cos\gamma \neq 0$ te koordinate promatranih polupravaca možemo zapisati konačno kao

$$CN \ \ldots \ \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : z\,,$$

$$BG \ \ldots \ \frac{1}{\cos\alpha} : y : \frac{1}{\sin\gamma + \cos\gamma}\,,$$

$$AD \ \ldots \ x : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\sin\gamma + \cos\gamma}\,.$$

Prema teoremu 1 opet možemo zaključiti da su ta tri polupravca konkurentna. Sijeku se unutar trokuta ABC u točki s trilinearnim koordinatama

$$\frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\sin\gamma + \cos\gamma}\,.$$

Literatura

[1] Maja Starčević, *Trilinearne koordinate točaka u ravnini*, Matematičko-fizički list, LXIX, 3/275 (2019.), Zagreb, str. 155–162.