O odnosu između jednostavnih i složenih kamata

Vedran Kojić[1], *Boško Šego*[2]

Uvod

Za izračunavanje kamata koristimo se jednostavnim i složenim kamatnim računom. Jednostavnim kamatnim računom koristimo se ako kamate izračunavamo na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja, a složenim ako kamate izračunavamo na glavnicu koja je uvećana za prethodno obračunate kamate svakog vremenskog razdoblja kapitalizacije, to jest uz kamate temeljne glavnice, obračunavaju se i kamate na kamate. U našoj gospodarskoj praksi primjenjuju se oba kamatna računa. Premda prevladava uvjerenje da se jednostavni kamatni račun primjenjuje znatno rjeđe od složenog, teško bismo mogli ustvrditi da je tomu doista tako. Naime, jednostavni kamatni račun u pravilu se koristi pri izračunu bilo zakonskih bilo ugovorenih zateznih kamata, kamata na štednju, diskontnog računa, računa efekta, potrošačkog kredita itd.

Prije nego precizno definiramo pojmove jednostavnog i složenog kamatnog računa, napomenimo da ćemo u ovom članku kamate obračunavati dekurzivno. Dekurzivni način obračuna kamata znači da se njihov obračun vrši i isplaćuje ili pribraja danom iznosu C na kraju danog vremenskog razdoblja, pri čemu se kamate obračunavaju od početne vrijednosti iznosa. Više o dekurzivnom i anticipativnom načinu obračuna kamata može se vidjeti u [2] i [3].

Jednostavni kamatni račun i ukupne jednostavne kamate

Definicija 1. Jednostavni kamatni račun je takav račun u kojem kamate izračunavamo na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja.

Propozicija 1. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu (kamatnjak) p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right) \tag{1}$$

Dokaz. Budući da se po definiciji jednostavnog kamatnog računa kamate izračunavaju na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja, kamate za svako razdoblje su

$$K_i = \frac{C_0 p}{100}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

[1] Autor je docent na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: vkojic@efzg.hr

[2] Autor je redoviti profesor u trajnom zvanju na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: bsego@efzg.hr

odnosno ukupne jednostavne kamate za svih n razdoblja iznose

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{C_0 pn}{100} \tag{3}$$

pa je tražena konačna vrijednost iznosa C_0

$$C_n = C_0 + K = C_0 + \frac{C_0 pn}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right) \tag{4}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Primjer 1. Koliko iznose ukupne jednostavne kamate na iznos 10 000 kuna za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u svih 5 razmatranih godina 9?

Rješenje. Koristeći formulu (3), nalazimo da su tražene ukupne jednostavne kamate

$$K = \frac{10\,000 \cdot 9 \cdot 5}{100} = 4500 \text{ kuna.} \quad \square$$

Primijetimo da propozicija 1 vrijedi uz pretpostavku da je kamatnjak nepromjenjiv (fiksan) u svim vremenskim razdobljima izračuna kamata. Stoga se postavlja pitanje kako izračunati (ukupne) jednostavne kamate ako ta pretpostavka nije ispunjena, to jest ako kamatnjak nije fiksan.

Propozicija 2. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{100}\right) \tag{5}$$

Dokaz. Analogno dokazu propozicije 1, po definiciji jednostavnog kamatnog računa kamate se izračunavaju na istu (početnu) glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja, pa su kamate za i-to, $i = 1, 2, \ldots, n$, jedinično razdoblje

$$K_i = \frac{C_0 p_i}{100}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

odnosno ukupne kamate za svih n razdoblja iznose

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_0 p_i}{100} = \frac{C_0}{100} \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{7}$$

što znači da je tražena konačna vrijednost iznosa C_0

$$C_n = C_0 + K = C_0 + \frac{C_0}{100} \sum_{i=1}^{n} p_i = C_0 \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{100}\right) \tag{8}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Primjer 2. Koliko iznose ukupne jednostavne kamate na 10 000 kuna za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 2 godine $p_1 = 10$, a u preostale 3 godine je smanjen za 10 %?

Rješenje. Dakle, u prve 2 godine navedeni iznos od 10 000 kuna uložen je uz godišnji kamatnjak $p_1 = 10$, a u preostale 3 godine uz kamatnjak $p_2 = 9$. To znači da razdoblje od 5 godina trebamo podijeliti na 2 podrazdoblja u kojima je kamatnjak fiksan: prvo podrazdoblje iznosi 2, a drugo 3 godine. Ukupne jednostavne kamate za prvo podrazdoblje iznose

$$K_{1,2} = \frac{10\,000 \cdot 10 \cdot 2}{100} = 2000 \text{ kuna},$$

a za drugo

$$K_{3,4,5} = \frac{10\,000 \cdot 9 \cdot 3}{100} = 2700 \text{ kuna}.$$

Dakle, ukupne jednostavne kamate za razmatrano petogodišnje razdoblje iznose

$$K = K_{1,2} + K_{3,4,5} = 2000 \text{ kn} + 2700 \text{ kn} = 4700 \text{ kn}. \qquad \square$$

Složeni kamatni račun i ukupne složene kamate

Definicija 2. Složeni kamatni račun je postupak izračunavanja kamata na glavnicu uvećanu za prethodno obračunate kamate u svakom prethodnom vremenskom razdoblju ukamaćivanja.

Propozicija 3. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \tag{9}$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Neka je C_0 sadašnja vrijednost glavnice, p fiksna kamatna stopa za jedinično razdoblje. Tada je $r = 1 + \frac{p}{100}$ fiksni dekurzivni kamatni faktor. Nadalje, označimo kamate za k-to (jedinično) vremensko razdoblje, te vrijednost glavnice C_0 na kraju k-tog razdoblja s I_k i C_k, redom.

Provjerimo bazu matematičke indukcije. Za $k = 1$ je $I_1 = \frac{C_0 p}{100}$, pa prema definiciji 2 imamo $C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0 p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 = C_0 r$. Pretpostavimo da formula (9) vrijedi za neki prirodan broj $k = n$ i dokažimo da formula (9) vrijedi i za broj $k = n + 1$. Naime, $I_{n+1} = \frac{C_n p}{100}$, pa je $C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n + \frac{C_n p}{100} = C_n \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Sada je, zbog pretpostavke indukcije,

$$C_{n+1} = C_n \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+1} = C_0 r^{n+1} \tag{10}$$

što je i trebalo dokazati. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja propozicije 3 vrijedi za svaki prirodan broj n. $\square$

Uočimo da su ukupne kamate u slučaju da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu

$$I = C_n - C_0 = C_0 \left(r^n - 1\right) \tag{11}$$

Uobičajeno se kaže da su I ukupne složene kamate.

Primjer 3. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos 10 000 kuna za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u svih 5 razmatranih godina 9?

Rješenje. Koristeći formulu (11), uz $C_0 = 10\,000$, $n = 5$, $p = 9$, $r = 1 + \frac{9}{100} = 1.09$, tražene kamate su

$$I = C_0\left(r^n - 1\right) = 10\,000 \cdot \left(1.09^5 - 1\right) \approx 5386.24 \text{ kuna.} \quad \square$$

Propozicija 4. Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi

$$C_n = C_0 r_1 r_2 r_3 \cdots r_n = C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i \tag{12}$$

pri čemu je $r_i = 1 + \frac{p_i}{100}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dekurzivan kamatni faktor za i-to razdoblje.[4]

Uočimo da su ukupne kamate u slučaju da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu

$$I = C_n - C_0 = C_0\left(\prod_{i=1}^{n} r_i - 1\right). \tag{13}$$

Primjer 4. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 10 000 kuna za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 2 godine $p_1 = 10$, a u preostale 3 godine smanjen je za 10 %?

Rješenje. Uočimo da imamo 2 razdoblja u kojima je kamatnjak fiksan. U prvom dvogodišnjem razdoblju, početni iznos je $C_0 = 10\,000$ kuna, $p_1 = 10$ godišnje, je

$$C_2 = C_0 \cdot r_1^2 = C_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 = 10\,000 \cdot 1.1^2 = 12\,100 \text{ kuna.}$$

U drugom, trogodišnjem razdoblju, početni iznos je $C_2 = 12\,100$ kuna, $p_2 = 9$ godišnje, pa je

$$C_5 = C_2 \cdot r_2^3 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)^3 = 12\,100 \cdot 1.09^3 \approx 15\,669.85 \text{ kuna.}$$

Dakle, ukupne složene kamate iznose

$$I = C_5 - C_0 = 15\,669.85 - 10\,000 = 5669.85 \text{ kuna.} \quad \square$$

Odnos između jednostavnih i složenih kamata

Ukoliko usporedimo rezultate iz primjera 1 i 3, uočit ćemo da su ukupne kamate izračunate po jednostavnom kamatnom računu manje od ukupnih kamata izračunatih po složenom kamatnom računu. Do istog zaključka dolazimo ako usporedimo rezultate primjera 2 i primjera 4. Postavlja se pitanje jesu li dobiveni zaključci slučajni i vrijede li samo u usporedbi navedenih primjera? Odgovor u općem slučaju daje sljedeći teorem.

[4] Dokaz se može vidjeti u [3], str. 183–184.

Teorem 1. *Ukupne kamate izračunate po složenom kamatnom računu nisu manje od onih izračunatih po jednostavnom kamatnom računu.*

Iako se teorem 1 može dokazati na više načina, ovdje ćemo koristiti poznatu Bernoullijevu nejednakost.[3] Najprije ćemo Bernoullijevu nejednakost iskazati i dokazati.

Teorem 2. (Bernoullijeva nejednakost)

(a) Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx. \tag{14}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$.

(b) Za sve realne brojeve x_k, $k=1,2,\ldots,n$, koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \tag{15}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$.

Dokaz. (a) Ako je $n=1$, jednakost u (14) očito vrijedi. Obratno, ako u (14) vrijedi jednakost, tada prema teoremu o jednakosti dva polinoma slijedi da je $n=1$. Dokažimo sada nejednakost u (14). Stavimo $y=1+x$. Iz pretpostavke $x>-1$ slijedi $y>0$. Neka je, prvo, $y \geqslant 1$. Tada je

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= y^n = 1+(y^n-1)\\ &= 1+(y-1)(\underbrace{y^{n-1}}_{\geqslant 1}+\underbrace{y^{n-2}}_{\geqslant 1}+\cdots+1)\\ &\geqslant 1+(y-1)\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n \text{ puta}} = 1+(y-1)n,\end{aligned}$$

odakle slijedi nejednakost (14). Neka je sada $0<y<1$. Tada je $y^k<1$, odnosno $-y^k>-1$ za svaki prirodan broj k. Stoga je

$$\begin{aligned}(1+x)^n-1 &= y^n-1\\ &= (1-y)(\underbrace{-y^{n-1}}_{\geqslant -1}\underbrace{-y^{n-2}}_{\geqslant -1}-\cdots-1)\\ &\geqslant (1-y)\underbrace{(-1-1-\cdots-1)}_{n \text{ puta}} = (1-y)(-n) = (-x)(-n),\end{aligned}$$

odakle slijedi nejednakost (14).

(b) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x_k \neq 0$, $k=1,2,\ldots,n$. Za $n=1$ u (15) očito vrijedi jednakost. Dokažimo matematičkom indukcijom da za sve $n>1$ u (15) vrijedi stroga nejednakost. Za $n=2$ vrijedi stroga nejednakost jer je

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 > 1+x_1+x_2.$$

Pretpostavimo da za neki $n \geqslant 2$ u (15) vrijedi nejednakost, te dokažimo da vrijedi i za $n+1$:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n+1}) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{n+1} \tag{16}$$

[3] O Bernoullijevoj nejednakosti i njezinim poopćenjima može se vidjeti, primjerice, u [1] ili [4].

Budući da je $x_ix_j > 0 \ (i,j = 1,2,\dots,n+1)$, slijedi

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\
&\quad > (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\
&\quad = (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}\\
&\quad > 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1},
\end{aligned}$$

čime smo dokazali nejednakost (16). Prema principu matematičke indukcije, u (15) vrijedi stroga nejednakost za svaki prirodan broj $n > 1$.

Napomena. Primijetimo da (14) slijedi iz (15) za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. $\square$

Dokaz teorema 1. Razlikovat ćemo dva slučaja: prvi kada su kamate računate uz fiksnu, te drugi kada su kamate računate uz varijabilnu kamatnu stopu.

U prvom slučaju, koristeći formule (1), (3) i (11), treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$I \geqslant K \iff C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - C_0 \geqslant C_0\left(1+\frac{pn}{100}\right) - C_0 \iff \left(1+\frac{p}{100}\right)^n \geqslant 1+\frac{pn}{100}. \tag{17}$$

Posljednja nejednakost u (17) slijedi iz (14) za $x = \dfrac{p}{100} > 0$. Nejednakost (17) smo mogli dokazati i direktno primjenom binomnog teorema. Naime, vrijedi

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{100}\right)^k = 1+\frac{pn}{100}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{100}\right)^k}_{\geqslant 0} \geqslant 1+\frac{pn}{100}. \tag{18}$$

U drugom slučaju, koristeći formule (5) i (13), trebamo dokazati nejednakost

$$\begin{aligned}
I \geqslant K &\iff C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i}{100}\right) - C_0 \geqslant C_0\left(1+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{100}\right) - C_0\\
&\iff \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i}{100}\right) \geqslant 1+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{100}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Posljednja nejednakost u (19) slijedi iz (15) za $x_1 = \dfrac{p_1}{100} > 0$, $x_2 = \dfrac{p_2}{100} > 0$, ..., $x_n = \dfrac{p_n}{100} > 0$. Ovime je dokazana tvrdnja teorema 1. $\square$

Literatura

[1] Ilija Ilišević, *Bernoullijeva nejednakost*, Osječki matematički list 9 (2009), 1–6.

[2] Luka Neralić, Boško Šego, *Matematika*, 1. izdanje, Element, (2009).

[3] Boško Šego, *Financijska matematika*, Zgombić & Partneri, (2008).

[4] *Bernoulli's inequality*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_inequality`