Dvije generalizacije jedne uvjetne algebarske nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]

Dokazati jednu nejednakost, bilo koje vrste, ukoliko taj dokaz nije jednostavan, predstavlja značajan korak za mladog matematičara. Ukoliko još uspije generalizirati tu nejednakosti (uz pretpostavku da je ona moguća), to ima još veći značaj i mali naučni doprinos. U ovom članku ćemo se baviti jednom uvjetnom algebarskom nejednakošću koja glasi:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}; \qquad (a>0,\quad b>0,\quad a+b=1). \tag{1}$$

Dat ćemo najprije tri njezina dokaza, a zatim ćemo također dokazati dvije njezine generalizacije.

Dokaz 1. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

a odavde zbog uvjeta $a+b=1$,

$$\frac{1}{ab} \geqslant 4. \tag{2}$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine za dva pozitivna broja, zbog (2) imamo:

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1+4}{2}\right)^2 = \frac{25}{4},$$

a odavde:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a=b=\frac{1}{2}$.

Dokaz 2. Funkcija $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$; $(x>0)$ je zbog $f''(x)=2\left(1+\frac{3}{x^4}\right)>0$ $(\forall x>0)$ *konveksna* pa na osnovu *Jensenove nejednakosti* dobivamo:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

a odavde zbog (2) stavljajući $x_1=a+\frac{1}{a}$, $x_2=b+\frac{1}{b}$; $(a,b>0,\ a+b=1)$, lako dobivamo (1).

---

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Dokaz 3. Stavljajući $b = 1 - a$; $(a, b > 0)$, promatrajmo funkciju

$$f(a) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 - a + \frac{1}{1-a}\right)^2; \qquad (0 < a < 1).$$

Dobivamo

$$f'(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(1 - a + \frac{1}{1-a}\right)\left(-1 + \frac{1}{(1-a)^2}\right),$$

odnosno

$$f'(a) = 2\left(a - \frac{1}{a^3}\right) + 2 \cdot \frac{2 - 2a + a^2}{1-a} \cdot \frac{2a - a^2}{(1-a)^2},$$

a odavde nakon sređivanja:

$$f'(a) = 2(1-2a) \cdot \frac{a^6 - 3a^5 + 3a^4 - a^3 - a^2 + a - 1}{a^3(1-a)^3},$$

tj.

$$f'(a) = 2(1-2a) \cdot g(a),$$

gdje je

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{a^6 - 3a^5 + 3a^4 - a^3 - a^2 + a - 1}{a^3(1-a)^3} \\ &= \frac{a^3(a-1)^3 - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{a^3(1-a)^3} < 0, \quad \forall x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Vidimo sada da je $f'(a) < 0$ ako je $1 - 2a > 0$, tj. $0 < a < \frac{1}{2}$ te $f'(a) > 0$ ako je $1 - 2a < 0$, tj. $\frac{1}{2} < a < 1$, pa funkcija $f(a)$ ima minimum za $a = \frac{1}{2} (= b)$. Dakle, imamo $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{2}$, tj.

$$f(a) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant f_{\min} = \frac{25}{2}.$$

Generalizacija 1. Vrijedi nejednakost

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}, \tag{3}$$

ako je $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ i $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Dokaz. Iz nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za n pozitivnih brojeva, imamo

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

a odavde zbog $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqslant n^2. \tag{4}$$

Iz nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine za n pozitivnih brojeva, imamo zbog (4):

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2$$
$$\geqslant n\cdot\left(\frac{x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}+\ldots+x_n+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2$$
$$=n\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2\geqslant n\cdot\left(\frac{1+n^2}{n}\right)^2=\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{n}$.

Generalizacija 2. Vrijedi nejednakost

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^\alpha+\left(b+\frac{1}{b}\right)^\alpha\geqslant\frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}};\quad(\alpha>0;\quad a,b>0;\quad a+b=1).\tag{5}$$

Dokaz. Funkcija

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^\alpha;\quad(\alpha>0)$$

za $0<x<1$ je konveksna jer je:

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha-2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{2\alpha}{x^3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}$$
$$=\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha-2}\left[\alpha\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{1}{x^4}-1+\frac{4}{x^2}\right]>0,\ \text{za sve } x\in(0,1) \text{ i } \alpha>0.$$

Zato, ako je $a,b>0$ i $a+b=1$, vrijedi:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right),$$

tj.

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^\alpha+\left(b+\frac{1}{b}\right)^\alpha\geqslant 2\left(\frac{1}{2}+2\right)^\alpha=\frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}.$$

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.

[3] N. M. Sedrakan, A. M. Avoan, *Neravenstva, Metodi dokazateljstva*, Fizmatlit, Nauka, Moskva, 2020.