ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2019. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/278.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadatci iz matematike

3693. Broj

$$123456789(10)(11)(12)(13)(14)$$

napisan je u bazi 15. Koliki je ostatak dijeljenja tog broja sa 7?

3694. Dokaži da za svaki trokut sa stranicama duljina a, b, c vrijedi nejednakost

$$a(s-a)+b(s-b)+c(s-c) \leq \frac{2}{3}s^2,$$

gdje je s poluopseg trokuta. Kada vrijedi jednakost?

3695. Rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-2bx+b^2-c^2=0$$

su x_1 i x_2. Dokaži da su x_1^3 i x_2^3 rješenja od

$$x^2-2b(b^2+3c^2)x+(b^2-c^2)^3=0.$$

3696. Nađi sve parove prostih brojeva p i q takve da je

$$p^3-q^5=(p+q)^2.$$

3697. Nađi jednadžbu pravca kroz točku $(2,5)$ koji s pravcem $x-3y+6=0$ zatvara kut od 45°.

3698. Neka je $ABCD$ tetraedar takav da su težišnice trokuta ABC, ACD, ABD, iz vrha A, međusobno okomite. Dokaži da su duljine bridova tetraedra koji sadrže vrh A jednake duljine.

3699. Unutar konveksnog četverokuta $ABCD$ površine P dana je točka O, pri čemu vrijedi

$$|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2=2P.$$

Dokaži da je $ABCD$ kvadrat i O njegovo središte.

3700. Unutar pravokutnika $ABCD$ dana je točka M takva da je $|AM|=\sqrt{2}$, $|DM|=2$ i $|CM|=6$. Izračunaj površinu pravokutnika ako je $|AB|=2|AD|$.

3701. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži nejednakost

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geq \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

Kada vrijedi jednakost?

3702. U trokutu ABC simetrale kutova AA_1, BB_1, CC_1 sijeku se u točki O. Dokaži

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|} \leq \frac{4R}{r}$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane mu kružnice.

3703. U trokutu ABC simetrale kutova AA_1, BB_1, CC_1 sijeku se u točki O. Dokaži

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|} \geq 8.$$

3704. Odredi polumjer upisane kružnice u bazu pravilne četverostrane piramide čiji su bočni bridovi pod kutem α prema njegovoj visini, a volumen joj je V.

3705. Izračunaj sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

3706. Dan je niz brojeva (a_n), $n \geq 0$ koji zadovoljavaju uvjete

$$a_0=3$$

$$(3-a_{n+1})(6+a_n)=18, \quad n \geq 0.$$

Odredi sumu $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 454. Tijelo mase 2 kg, srednje snage 100 W te specifičnog toplinskog kapaciteta 450 J/kgK giba se jednoliko ubrzano. Za 5 sekundi tijelu se zbog trenja temperatura povisi za $0.2\,^\circ$C. Odredi akceleraciju tijela na tom putu i faktor trenja između tijela i podloge. Kinetička energija tijela računa se po formuli $E_k=\frac{mv^2}{2}$.

OŠ – 455. Ivan i Marko, međusobno udaljeni 10 metara, rade kružne valove na vodi udarajući štapovima po površini vode. Ivan udara svake sekunde, a Marko dva puta u sekundi. Primijetili su da su se njihovi valovi dodirnuli nakon što je Ivan 5 puta udario štapom po vodi. Odredi brzinu, frekvenciju i valnu duljinu tih valova.

OŠ – 456. Da bi objesio poster Nikole Tesle na zid učionice za fiziku učenik je morao zabiti čavao u zid. Prilikom prvog udarca čavao se zabio 2 centimetra u zid. Masa čekića iznosila je 0.5 kilograma, a učenik je procijenio da je sila kojom je udario bila oko 50 njutna. Koliku je brzinu čekić imao kad je udario u čavao?

OŠ – 457. Izvor svjetlosti je postavljen 60 centimetara ispred sabirne leće jakosti 5 dioptrija. Njegova se oštra slika može uhvatiti na zastoru. Ako leću zamijenimo lećom jakosti 4 dioptrije koliko se mora pomaknuti zastor da bi slika na njemu bila oštra?

1700. Na letjelicama za duboki svemir, kao izvor energije često se koristi *radioizotopni termoelektrični generator*, u kojemu se iskorištava snaga oslobođena α-raspadom ^{238}Pu. Odredi termičku snagu koju proizvodi 1 kg tog izotopa plutonija. Vrijeme poluraspada iznosi 87.74 godine, a prosječna energija α-čestice emitirane raspadom iznosi 5.58 MeV (mega-elektron volta).

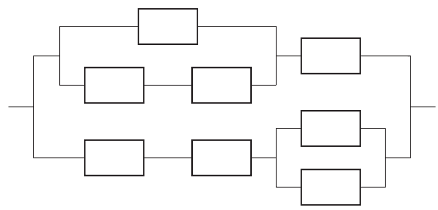
1701. Uzmimo da neki planet mase M radijusa R ima jezgru i plašt, takve da je jezgra koncentrična kugla radijusa $R/2$, a plašt ostatak planeta. Ako je ubrzanje sile teže na površini jednako ubrzanju sile teže na granici plašta i jezgre, odredi postotak mase planeta u jezgri i omjer gustoća jezgre i plašta.

1702. Odredite volumni udio helija i argona u njihovoj smjesi, ako je brzina zvuka u toj smjesi jednaka brzini zvuka u zraku iste temperature i tlaka. Uzmimo da se zrak sastoji od dvoatomnih molekula prosječne molekulske mase $29\ \mathrm{g/mol}$.

1703. Tijelo je 10 000 km udaljeno od površine Zemlje. Kojom se minimalnom brzinom mora kretati u odnosu na Zemlju a da ne padne, nego ostane u orbiti? Smatrat ćemo da je tijelo palo ako se spusti bliže od 200 km površini Zemlje. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km, mase $6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

1704. Jednobojna žarulja svijetli izotropno svjetlosnom snagom P po noći u magli. Pomoću svjetlomjera odredimo osvjetljenje na 10 i 30 metara od žarulje. Na 10 m ono iznosi $0.19\ \mathrm{W/m^2}$, a na 30 m $0.016\ \mathrm{W/m^2}$. Odredi snagu P i duljinu puta u magli koja apsorbira polovicu intenziteta paralelnog snopa svjetla.

1705. Osam jednakih otpornika otpora $10\ \Omega$ spojimo u shemu na slici. Pokaži da je ukupni otpor sklopa opet $10\ \Omega$. Ako bi sklop priključili na napon 10 V, kolika bi struja tekla kroz svaki od otpornika?



1706. S visine od 1.2 metra pustimo dva jednaka utega, prvi slobodno pada, a drugi klizi niz kosinu nagiba 20°. Drugi uteg treba 5 puta više vremena da dođe do dna od prvog. Odredi koeficijent trenja utega i kosine. $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Otpor zraka zanemariti.

C) Rješenja iz matematike

3665. *Bez korištenja računala dokaži*

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 4.$$

Prvo rješenje. Kako je:

$$\begin{aligned}
&(2-\sqrt{2})^3 \\
&\quad = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 \\
&\quad = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} \\
&\quad = 20 - 14\sqrt{2} \\
&(2+\sqrt{2})^3 \\
&\quad = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 \\
&\quad = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} \\
&\quad = 20 + 14\sqrt{2},
\end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\\&\quad=\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}\\&\quad=2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4.\end{aligned}$$

Borna Cesarec (1),
Srednja škola Krapina, Krapina

Drugo rješenje. Lijevu stranu jednakosti označimo s A. Tada je:

$$\begin{aligned}A^3&=20-14\sqrt{2}\\&\quad+3\cdot\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\\&\quad+3\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\\&\quad+20+14\sqrt{2}\\&=40+3\cdot\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})(20+14\sqrt{2})}\\&\quad\cdot(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}})\\&=40+3\cdot\sqrt[3]{400-392}\cdot A\\&=40+6A.\end{aligned}$$

To znači da lijeva strana jednakosti zadovoljava kubnu jednadžbu

$$x^3-6x-40=0.$$

Lako provjerimo da $x=4$ jest rješenje ove jednadžbe. Dijeljenjem polinoma dobivamo

$$x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10),$$

a kako je diskriminanta jednadžbe $x^2+4x+10=0$ jednaka $D=-24<0$ ta jednadžba nema realnih rješenja. Dakle, jedino realno rješenje kubne jednadžbe je $x=4$, pa je tako i $A=4$, što je i trebalo dokazati.

Oliver Kukas (3),
Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

3666. *Promatrajući brojeve $S_n=n!-1$, $n\in\mathbf{N}$, dokaži da među njima ima beskonačno mnogo prostih brojeva.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da niz S_n ima konačno mnogo prostih brojeva. Neka oni čine skup $A=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ i neka je p_k najveći među njima. Uzmimo specijalno $n=p_k$. Tada je $n!-1=p_k!-1$ član niza i sigurno nije djeljiv niti s jednim prostim brojem iz gornjeg skupa, pa je i sam prost broj. No, to je proturječje s pretpostavkom da su u skupu A navedeni svi prosti članovi niza S_n.

Oliver Kukas (3), Zabok

3667. *U skupu realnih brojeva odredi sva rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned}x+y^2&=y^3\\y+x^2&=x^3.\end{aligned}$$

Rješenje. Oduzimanjem jednadžbi redom imamo:

$$\begin{aligned}&x-y+y^2-x^2=y^3-x^3\\&x-y-(x^2-y^2)+x^3-y^3=0\\&(x-y)(x^2+y^2+xy-x-y+1)=0.\end{aligned}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+xy-x-y+1\\&\quad=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2>0\end{aligned}$$

jer ne može istovremeno biti $x-1=0$, $y-1=0$ i $x+y=0$, jedino je moguće $x-y=0$ tj. $x=y$. No, sada iz bilo koje od početnih jednadžbi slijedi:

$$\begin{aligned}x^3-x^2-x&=0\\x(x^2-x-1)&=0\end{aligned}$$

tj. $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pa su rješenja zadanog sustava

$$\left\{(0,0),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3668. *Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost*

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{16}{1+abc}.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Nejednakost je redom ekvivalentna sljedećima:

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{16}{1+abc}\\&\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}\right)\\&\quad\cdot(1+abc)\geqslant16\end{aligned}$$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}$$
$$+abc+bc+ac+ab+b+a+1 \geqslant 16$$
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)$$
$$+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)+\left(ca+\frac{1}{ca}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{abc}+abc\right) \geqslant 14$$

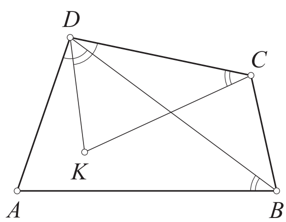
Kako za $x>0$ vrijedi $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$, ova nejednakost vrijedi. Jednakost vrijedi za $a=b=c=1$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3669. *U konveksnom četverokutu $ABCD$ točka K je unutar trokuta ABD tako da su trokuti ABD i KCD slični. Dokaži da su trokuti BCD i AKD slični.*

Rješenje. Kako su trokuti ABD i KCD slični imamo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle KDC$ i

$$\frac{|DA|}{|DB|}=\frac{|DK|}{|DC|}.$$



Tada je

$$\sphericalangle ADK = \sphericalangle ADB - \sphericalangle BDK$$
$$= \sphericalangle KDC - \sphericalangle BDK = \sphericalangle BDC$$

i $\dfrac{|DA|}{|DK|}=\dfrac{|DB|}{|DC|}$, odakle slijedi da su trokuti AKD i BCD slični.

Ur.

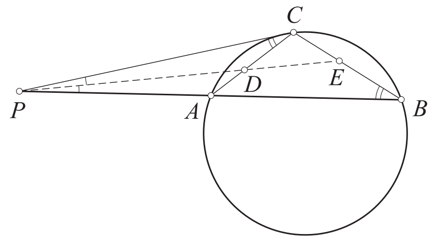
3670. *Točka A je polovište dužine $\overline{PB}$. Iz točke P povučena je tangenta PC na kružnicu koja prolazi točkama A i B. Simetrala kuta $\sphericalangle CPA$ siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama D i E. Dokaži $|BE|=2|AD|$.*

Rješenje. Prema potenciji točke obzirom na kružnicu je

$$|PC|^2=|PA|\cdot|PB|=|PA|\cdot 2|PA|$$

tj.

$$|PC|=\sqrt{2}|PA|. \qquad (1)$$



Sada koristimo poučak o simetrali kuta za $\triangle APC$ i $\triangle BPC$, pa je:

$$\frac{|AD|}{|DC|}=\frac{|AP|}{|CP|} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{|AD|}{|DC|}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$
$$\frac{|BE|}{|CE|}=\frac{|BP|}{|CP|} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{|BE|}{|CE|}=\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Kako je $\triangle PBC \sim \triangle PCA$ (jedan kut im je zajednički i $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC$) imamo:

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|PC|}{|PB|} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{|AC|}{|BC|}=\frac{\sqrt{2}|PA|}{2|PA|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{|AD|+|DC|}{|BE|+|CE|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \frac{|AD|+\sqrt{2}|AD|}{|BE|+\frac{1}{\sqrt{2}}|BE|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{|AD|}{|BE|}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2(1+\sqrt{2})}$$
$$\Longrightarrow \frac{|AD|}{|BE|}=\frac{\sqrt{2}+1}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$$

tj. $|BE|=2|AD|$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3671. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Ako je njegova površina jednaka $(a-b+c)(a+b-c)$, dokaži da je duljina simetrale kuta iz vrha A jednaka*

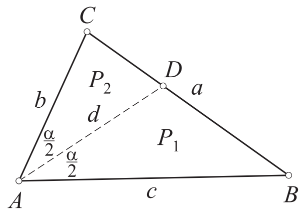
$$d=\frac{8bc}{\sqrt{17}(b+c)}.$$

Rješenje. Iz $P = P_1 + P_2$ redom dobivamo

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}cd\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bd\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = (b+c)d\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$d = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$



Kako je

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2bc+2bc\cos\alpha}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2s\cdot 2(s-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

slijedi

$$d = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}. \qquad (2)$$

Iz uvjeta zadatka

$$P = (a-b+c)(a+b-c)$$

imamo

$$P = 2\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\cdot 2\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)$$

$$= 4(s-b)(s-c). \qquad (3)$$

Koristeći Heronovu formulu slijedi:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4(s-b)(s-c)$$

$$\sqrt{s(s-a)} = 4\sqrt{(s-b)(s-c)} \ /\ ^2$$

$$s(s-a) = 16(s-b)(s-c)$$

$$(a+b+c)(b+c-a)$$

$$= 16(a-b+c)(a+b-c)$$

$$(b+c)^2 - a^2 = 16[a^2-(b-c)^2]$$

$$b^2+2bc+c^2-a^2$$

$$= 16a^2 - 16b^2 + 32bc - 16c^2$$

$$17a^2 = 17b^2 - 30bc + 17c^2$$

$$a^2 = (b-c)^2 + \frac{4}{17}bc$$

Sada iz (2) konačno imamo:

$$d = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2-\frac{4}{17}bc}$$

$$= \frac{8bc}{\sqrt{17}(b+c)},$$

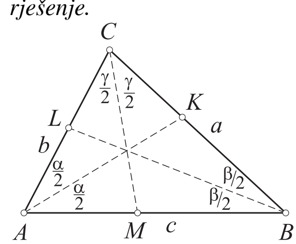
što je i trebalo dokazati.

Oliver Kukas (3), Zabok

3672. *Ako su K, L, M sjecišta simetrala unutarnjih kutova α, β, γ trokuta ABC redom s nasuprotnim stranicama, dokaži nejednakost*

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} \geq 3.$$

Prvo rješenje.



Uz oznake kao na slici i formulu (1), dokazanu u rješenju zadatka 3671, vrijedi:

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{a(b+c)}{2bc} + \frac{b(a+c)}{2ac} + \frac{c(a+b)}{2ab}$$

$$\geqslant \frac{a\cdot 2\sqrt{bc}}{2bc} + \frac{b\cdot 2\sqrt{ac}}{2ac} + \frac{c\cdot 2\sqrt{ab}}{2ab}$$

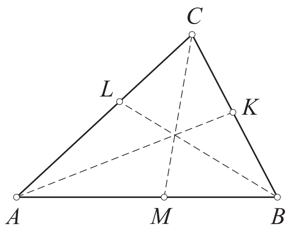
$$= \frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant 3\cdot\underbrace{\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{\sqrt{ab}}}}_{=1} = 3.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

Drugo rješenje. Primijenit ćemo poučak o sinusima za trokute BKA i CKA:

$$\frac{|BK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta},\quad \frac{|CK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$



Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\frac{|BC|}{|AK|}=\frac{|BK|}{|AK|}+\frac{|CK|}{|AK|}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $2\cos\dfrac{\alpha}{2}$ dobivamo

$$2\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Slično je

$$2\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$2\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Lijeva strana tražene jednakosti postaje

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\geqslant 3$$

jer za pozitivne brojeve a i b vrijedi $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$.

Ur.

3673. *Ako su zbrojevi površina kvadrata nad nasuprotnim stranicama konveksnog četverokuta jednaki, dokaži da su spojnice nasuprotnih stranica jednakih duljina.*

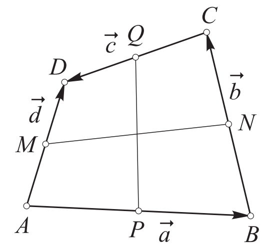
Rješenje. Iskoristimo najprije uvjet zadatka

$$a^2+c^2=b^2+d^2 \implies$$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$$

i poslije kvadriranja dobivamo:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}+b^2=0. \qquad (1)$$



Sada, koristeći činjenicu da spojnice nasuprotnih stranica spajaju njihova polovišta imamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN}&=-\frac{\vec{d}}{2}+\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\\
&=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c}),\\
|\overrightarrow{MN}|^2&=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{c})^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}) \qquad (2)\\
\overrightarrow{PQ}&=\frac{\vec{a}}{2}+\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}),\\
|\overrightarrow{PQ}|^2&=\frac{1}{4}(a^2+4b^2+c^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c})\\
&=\frac{1}{4}[a^2+c^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+b^2)]\\
&\overset{(1)}{=}\frac{1}{4}(a^2+c^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}-4\vec{a}\cdot\vec{c}). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Iz (2) i (3) slijedi $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{PQ}|$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3674. *Odredi jednadžbu kružnice upisane u trokut čije stranice leže na pravcima*

$$\begin{aligned}
m_1 \quad &\ldots \quad 2x-3y+21=0\\
m_2 \quad &\ldots \quad 3x-2y-6=0\\
m_3 \quad &\ldots \quad 2x+3y+9=0.
\end{aligned}$$

Rješenje. Kako je središte upisane kružnice presjek simetrala unutarnjih kutova, treba naći jednadžbe simetrala unutarnjih kutova. Neka je (h,k) središte upisane kružnice.

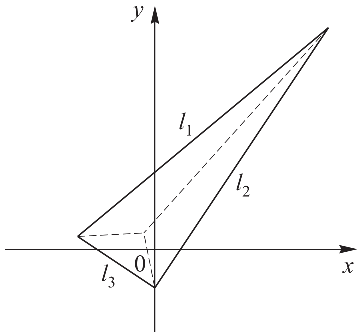
Kako je udaljenost središta upisane kružnice od njegovih stranica konstantna imamo

$$\frac{2h-3k+21}{-\sqrt{13}}=\frac{3h-2k-6}{\sqrt{13}}$$

tj. $h-k+3=0$.

$$\frac{2h+3k+9}{-\sqrt{13}} = \frac{2h-3k+21}{\sqrt{13}}$$

tj. $k-2=0$.



Dakle, $k=2$, $h=-1$,

$$r = \frac{2\cdot(-1)+3\cdot 2+9}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}.$$

Iz $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ imamo $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ ili $x^2+y^2+2x-4y=8$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3675. *Dana je točka P unutar trokuta ABC tako da je $\varphi = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost*

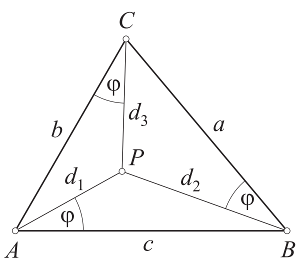
$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

Rješenje. Uz oznake kao na slici najprije je:

$$\begin{aligned}\sphericalangle CPA &= 180^\circ - \varphi - \sphericalangle PAC\\ &= 180^\circ - \varphi - (\alpha - \varphi)\\ &= 180^\circ - \alpha\end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}\sphericalangle APB &= 180^\circ - \beta\\ \sphericalangle BPC &= 180^\circ - \gamma.\end{aligned}$$



Iz poučka o sinusima je:

$$\frac{d_1}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin(180^\circ-\alpha)} \implies$$

$$d_1 = \frac{b\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{2R\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\varphi,$$

te

$$d_2 = \frac{2R\sin\gamma}{\sin\beta}\sin\varphi, \quad d_3 = \frac{2R\sin\alpha}{\sin\gamma}\sin\varphi.$$

Sada je:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle ACP}$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}d_1 c\sin\varphi + \frac{1}{2}d_2 a\sin\varphi + \frac{1}{2}d_3 b\sin\varphi$$

$$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$= 2R^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\sin^2\varphi + 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}\sin^2\varphi + 2R^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}\sin^2\varphi.$$

Dobivamo

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma},$$

što je i trebalo dokazati.

Oliver Kukas (3), Zabok

3676. *Niz (a_n) definiran je s $a_1 = 1$,*

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}), \quad n>1$$

Odredi a_{2019}.

Rješenje. Iz

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}),$$

slijedi

$$\frac{n-1}{n+1}a_n = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1},$$

te

$$\frac{n}{n+2}a_{n+1} = a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Dakle,

$$a_n = (a_1+a_2+\ldots+a_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})$$
$$= \frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{n-1}{n+1}a_n$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{n-1}{n+1}\right)a_n = \frac{n}{n+2}a_{n+1}$$

$$\Longrightarrow a_{n+1} = 2\cdot\frac{n+2}{n+1}a_n.$$

Sada je, zaključujući induktivno:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot 2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot 2\cdot\frac{n}{n-1} \\ &\quad \cdot\ldots\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot 1 \\ &= 2^{n-1}\cdot(n+2) \end{aligned}$$

tj. $a_n = 2^{n-2}\cdot(n+1)$.

Konačno je:

$$a_{2019} = 2^{2017}\cdot 2020 = 2^{2019}\cdot 505.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3677. *Dokaži da je za svaki neparan $n \geq 5$ broj*

$$\binom{n}{0}\cdot 5^{n-1} - \binom{n}{1}\cdot 5^{n-2} + \binom{n}{2}\cdot 5^{n-3} - \ldots - \binom{n}{n-2}\cdot 5 + \binom{n}{n-1}$$

složen.

Rješenje. Ako je $n = 2k+1$, $n \geqslant 5$ neparan broj, vrijedi:

$$\begin{aligned} &\binom{2k+1}{0}\cdot 5^{2k} - \binom{2k+1}{1}\cdot 5^{2k-1} \\ &\quad + \ldots - \binom{2k+1}{2k-1}\cdot 5 + \binom{2k+1}{2k} \\ &= \frac{1}{5}\left[\binom{2k+1}{0}\cdot 5^{2k+1} - \binom{2k+1}{1}\cdot 5^{2k}\right. \\ &\quad + \ldots - \binom{2k+1}{2k-1}\cdot 5^2 + \binom{2k+1}{2k}\cdot 5^1 \\ &\quad \left. - \binom{2k+1}{2k+1}\cdot 5^0\right] + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{p=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{p}\cdot 5^{2k+1-p}\cdot(-1)^p + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(5-1)^{2k+1} + \frac{1}{5} = \frac{4^{2k+1}+1}{5}, \quad k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pogledamo li brojnik ovog izraza, vidimo da broj 4^{2k} završava znamenkom 6. Dakle, brojnik završava znamenkom 5 pa je djeljiv s 5. Time smo dokazali da je izraz (1) sigurno prirodan broj. No, još je

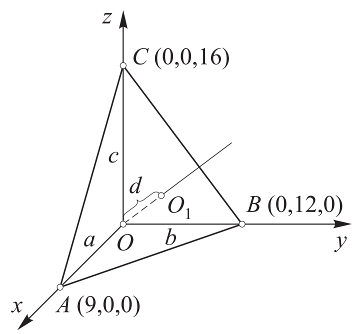
$$\begin{aligned} &4^{2k+1}+1 \\ &= 4\cdot(4^k)^2 + 1 \\ &= (2\cdot 4^k)^2 + 1 \\ &= (2\cdot 4^k)^2 + 4\cdot 4^k + 1 - 4\cdot 4^k \\ &= (2\cdot 4^k + 1)^2 - (2\cdot 2^k)^2 \\ &= (2\cdot 4^k + 1 - 2\cdot 2^k)\cdot(2\cdot 4^k + 1 + 2\cdot 2^k) \\ &= (2^{2k+1} - 2^{k+1} + 1)\cdot(2^{2k+1} + 2^{k+1} + 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Iz zapisa (2) vidimo da brojnik izraza (1) možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja i za $k \geqslant 2$ svaki od njih je sigurno veći od 5. Iz ranijeg razmatranja znamo da je barem jedan od tih faktora višekratnik broja 5. Iz svega navedenog je izraz dan u uvjetu zadatka složen prirodni broj.

Oliver Kukas (3), Zabok

3678. *Bridovi iz jednog vrha tetraedra su međusobno okomiti. Ako su njihove duljine redom jednake 9, 12 i 16 cm, izračunaj visinu tetraedra iz promatranog vrha.*

Prvo rješenje. Smjestimo dani tetraedar u koordinatni sustav kao na slici.



Iz segmentnog oblika jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

slijedi

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{12} + \frac{z}{16} = 1 \ / \cdot 144$$

$$16x + 12y + 9z - 144 = 0.$$

Tražena visina tetraedra je zapravo udaljenost ishodišta od ravnine ABC

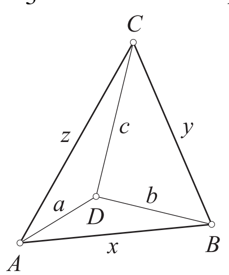
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$= \frac{|16 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 144|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 9^2}} = \frac{144}{\sqrt{481}}.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

Drugo rješenje. Neka je $|DA| = 9$ cm, $|DB| = 12$ cm, $|DC| = 16$ cm. Volumen tetraedra je

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc = 288 \text{ cm}^2.$$

Nadalje, $V = \frac{1}{3} P_{\triangle ABC} \cdot v$ tj. $v = \frac{3V}{P_{\triangle ABC}}$.



$P_{\triangle ABC}$ ćemo odrediti pomoću Heronove formule

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15,$$
$$y = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20,$$
$$z = \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{16^2 + 9^2} = \sqrt{337},$$
$$s = \frac{x + y + z}{2} = \frac{35 + \sqrt{337}}{2},$$
$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{(35 + \sqrt{337})}{2} \cdot \frac{(5 + \sqrt{337})}{2}}$$
$$\cdot \sqrt{\frac{(-5 + \sqrt{337})}{2} \cdot \frac{(35 - \sqrt{337})}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(35^2 - 337)(337 - 5^2)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{888 \cdot 312}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{8 \cdot 37 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 13}$$
$$= 6\sqrt{37 \cdot 13},$$
$$v = \frac{3 \cdot 288}{6\sqrt{37 \cdot 13}} = \frac{144}{\sqrt{37 \cdot 13}}.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 446. *Učenici su na satu fizike napravili kosinu dugačku 120 i visoku 40 centimetara. Po njoj su vukli valjke mase 300 grama. Kad su valjak vukli uz kosinu, tako da se on mogao kotrljati, sila vučenja je iznosila 1 njutn, a kad je valjak klizio po kosini sila je bila 1.4 njutna. S koje visine treba pustiti valjak koji kliže da u podnožje dođe istovremeno s valjkom koji se kotrlja i koji je u istom trenutku pušten s vrha kosine?*

Rješenje.

$l = 120$ cm

$h = 40$ cm

$m = 300$ g $= 0.3$ kg

$F_{\text{kotrljanja}} = 1$ N

$F_{\text{klizanja}} = 1.4$ N

$h_1 = ?$

$G = m \cdot g = 3$ N

Kosina smanji silu onoliko puta koliko joj je duljina veća od visine, dakle, da nema trenja sila kojom bi se valjak mogao vući po ovoj kosini iznosila bi

$$F = \frac{Gh}{l} = 1 \text{ N}.$$

Kad se valjak kotrlja sila trenja je zanemariva, a kad se vuče tako da klizi, sila trenja iznosi

$$F_{\text{tr}} = F_{\text{klizanja}} - F = 0.4 \text{ N}.$$

Kad valjak klizi niz kosinu sila trenja će ga usporavati,

$$F_1 = F - F_{\text{tr}} = 0.6 \text{ N}$$
$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{0.6 \text{ N}}{0.3 \text{ kg}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Kad se valjak kotrlja niz kosinu sila koja ga ubrzava je $F_2 = F = 1$ N,

$$a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{1 \text{ N}}{0.3 \text{ kg}} = 3.3 \text{ m/s}^2.$$

Vrijeme za koje će taj valjak doći od vrha do dna kosine iznosi:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \text{ m}}{3.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.85 \text{ s} = t_1 = t.$$

Valjak koji kliže za to vrijeme će prijeći put s_1.

$$s_1 = \frac{a_1 \cdot t^2}{2} = 0.723 \text{ m}.$$

Iz sličnosti trokuta imamo

$$h_1 = \frac{h \cdot s_1}{l} = \frac{40 \text{ cm} \cdot 72.3 \text{ cm}}{120 \text{ cm}} = 24.1 \text{ cm}.$$

Elena Mavretić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 447. *Bronca je legura bakra i kositra. Komad bronce ima obujam 500 kubnih centimetara i masu 4307 grama. Koliko grama bakra, a koliko kositra ima u tom komadu? Gustoća bakra je* 8940 kg/m^3*, a kositra* 7310 kg/m^3*.*

Rješenje.

$$V = 500 \text{ cm}^3$$
$$m = 4307 \text{ g}$$
$$\rho_{\text{Cu}} = 8940 \text{ kg/m}^3$$
$$\underline{\rho_{\text{Sn}} = 7310 \text{ kg/m}^3}$$
$$m_{\text{Cu}},\ m_{\text{Sn}} = ?$$
$$m = m_{\text{Cu}} + m_{\text{Sn}}$$
$$4307 \text{ g} = \rho_{\text{Cu}} \cdot V_{\text{Cu}} + \rho_{\text{Sn}} \cdot V_{\text{Sn}}$$
$$4307 \text{ g} = V_{\text{Cu}} \cdot 8.94 \text{ g/cm}^3 + (500 \text{ cm}^3 - V_{\text{Cu}}) \cdot 7.31 \text{ g/cm}^3$$

Kad pomnožimo jednadžbu s cm^3/g i riješimo se zagrade dobijemo:

$$4307 \text{ cm}^3 = 8.94 V_{\text{Cu}} + 3655 \text{ cm}^3 - 7.31 V_{\text{Cu}}$$
$$1.63 V_{\text{Cu}} = 652 \text{ cm}^3$$
$$V_{\text{Cu}} = 400 \text{ cm}^3, \quad V_{\text{Sn}} = 100 \text{ cm}^3$$
$$m_{\text{Cu}} = \rho_{\text{Cu}} \cdot V_{\text{Cu}} = 8.94 \text{ g/cm}^3 \cdot 400 \text{ cm}^3 = 3576 \text{ g}$$
$$m_{\text{Sn}} = \rho_{\text{Sn}} \cdot V_{\text{Sn}} = 7.31 \text{ g/cm}^3 \cdot 100 \text{ cm}^3 = 731 \text{ g}.$$

Luka Raguž (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 448. *Kad izgori kilogram alkohola oslobodi se* $3 \cdot 10^7$ *džula topline. Učenici su na satu ulili u konzervu* 5 cm^3 *70-postotnog alkohola i zapalivši ga zagrijavali* 200 cm^3 *vode. Temperatura vode se povećala s* $20\,^\circ C$ *na* $36\,^\circ C$*. Kolika je korisnost ovakvog načina zagrijavanja? Gustoća alkohola je* 790 kg/m^3*. Specifični toplinski kapacitet vode je* 4200 J/kgK*, a gustoća vode* 1000 kg/m^3*.*

Rješenje.

$$q = 3 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$
$$V_A = 5 \text{ cm}^3, \quad V_V = 200 \text{ cm}^3$$
$$t_1 = 20\,^\circ\text{C}, \quad t_2 = 36\,^\circ\text{C}$$
$$\rho_A = 790 \text{ kg/m}^3$$
$$\rho_V = 1000 \text{ kg/m}^3$$
$$\underline{c = 4200 \text{ J/kgK}}$$
$$\eta = ?$$
$$m_A = 0.7 \cdot \rho_A \cdot V_A = 0.7 \cdot 0.79 \text{ g/cm}^3 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 2.765 \text{ g}$$
$$Q = q \cdot m_A = 2.765 \text{ g} \cdot 3 \cdot 10^4 \ \frac{\text{J}}{\text{g}} = 82\,950 \text{ J}$$
$$Q_K = c \cdot m \cdot \Delta t = 0.2 \text{ kg} \cdot 16 \text{ K} \cdot 4200 \ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} = 13\,440 \text{ J}$$
$$\eta = \frac{Qk}{Q} = \frac{13\,440 \text{ J}}{82\,950 \text{ J}} = 0.162 = 16.2 \text{ \%}.$$

Filip Vučić (8),
OŠ Trnsko, Zagreb

OŠ – 449. *Učenik je na bateriju od 3.5 volta paralelno spojio dva otpornika* $R_1 = 2\ \Omega$ *i* $R_2 = 6\ \Omega$*. Izmjerio je napon na krajevima te paralele i začudio se kad je utvrdio da on iznosi samo 1.5 volta. Tada se sjetio da baterije imaju unutarnji otpor. Koliki je unutarnji otpor njegove baterije? Usporedite struju kroz otpornik* R_2 *u ovom spoju sa strujom kroz njega kad bi ga se serijski spojilo s* R_1 *na istu bateriju.*

Rješenje.

$$R_1 = 2\ \Omega, \quad R_2 = 6\ \Omega$$
$$\underline{U = 3.5 \text{ V}, \quad U_p = 1.5 \text{ V}}$$

$R_b = ?, \quad I_2, \quad I_2' = ?$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{4}{6\ \Omega}$$

$$R_p = \frac{3}{2}\ \Omega$$

$$I = I_b$$

$$\frac{U_p}{R_p} = \frac{U_b}{U_b}$$

$$R_b = \frac{U_b \cdot R_p}{U_p} = \frac{2V \cdot 1.5\ \Omega}{1.5\ \mathrm{V}} = 2\ \Omega$$

$$I_2 = \frac{U_p}{R_2} = \frac{1.5\ \mathrm{V}}{6\ \Omega} = 0.25\ \mathrm{A}$$

Kad su otpori spojeni serijski ukupni otpor u krugu iznosi

$$R = R_1 + R_2 + R_b = 10\ \Omega$$

$$I_2' = I = \frac{U}{R} = \frac{3.5\ \mathrm{V}}{10\ \Omega} = 0.35\ \mathrm{A}.$$

Struja kroz drugi otpornik je veća kad su otpornici spojeni serijski.

Andrija Adamović (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1686. *Serijski LCR titrajni krug pri rezonantnoj frekvenciji ima ukupnu impedanciju* $500\ \Omega$*, a pri dvostruko većoj frekvenciji* $1300\ \Omega$*. Odredi induktivni i kapacitivni otpor pri rezonantnoj frekvenciji.*

Rješenje. Impedancija serijski spojene zavojnice, kondenzatora i otpornika je dana izrazom:

$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}.$$

U rezonanciji je $X_L = X_C = X$, a pri dvostruko većoj frekvenciji je induktivni otpor dvostruko veći, a kapacitivni dvostruko manji od X. Imamo:

$$500^2 = (X - X)^2 + R^2$$

$$1300^2 = (2X - X/2)^2 + R^2.$$

Iz prve je jednadžbe $R = 500\ \Omega$, a to uvršteno u drugu daje $X = 800\ \Omega$.

Ur.

1687. *Dva patuljasta planeta, oba sferno simetrična imaju sličnu masu i veličinu. Prvi ima 2 % veću prosječnu gustoću od drugog. Na površini prvog je ubrzanje sile teže 12 % veće nego na površini drugog. Radijus prvog je 80 km veći od radijusa drugog. Odredi radijuse oba patuljasta planeta.*

Rješenje. Zadane razlike među patuljastim planetima mogu se zapisati kao:

$$\rho_1 = 1.02\rho_2,$$

$$g_1 = 1.12 g_2,$$

$$R_1 = R_2 + 80\ \mathrm{km}.$$

Budući da općenito ubrzanje sile teže možemo izraziti pomoću mase, a masu pomoću gustoće, imamo

$$g = \frac{Gm}{R^2} = \frac{G\rho \cdot \frac{4}{3}R^3\pi}{R^2} = \frac{4\pi G\rho R}{3}.$$

Podijelimo li izraz za prvi patuljasti planet s onim za drugi, dobit ćemo omjere:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Odatle uvrštavanjem prve dvije jednakosti dobivamo $51R_1 = 56R_2$, što uvršteno u treću daje

$$R_1 = 896\ \mathrm{km}, \qquad R_2 = 816\ \mathrm{km}.$$

Ur.

1688. *Na 3000 m nadmorske visine, tlak zraka iznosi 69.2 % tlaka na razini mora. Ako kisika u zraku ima 21 % (na obje visine), koliki je parcijalni tlak kisika na 3000 m? Apsolutni tlak zraka na razini mora je 101 325 Pa.*

Rješenje. Parcijalni tlak na zadanoj visini jednak je umnošku apsolutnog tlaka na toj visini i udjela kisika, dakle

$$p = 0.692 \cdot 101\,325 \cdot 0.21 = 14\,725\ \mathrm{Pa}.$$

Borna Cesarec (1),
Srednja škola Krapina, Krapina

1689. *Aktivacijom žive u nuklearnom reaktoru može se proizvesti zlato, reakcijom* ${}^{196}Hg + n \to \gamma + {}^{197}Hg$, ${}^{197}Hg \xrightarrow{\beta+} {}^{197}Au$*. Ako na taj način stvorimo milijardu atoma zlata svake sekunde, koliko je vremena potrebno da bi stvorili 1 gram zlata?*

Rješenje. Odredimo broj atoma zlata u jednom gramu:

$$N = \frac{N_A}{Ar(Au)} = 3.05685 \cdot 10^{21} \text{ atoma.}$$

Potreban broj sekundi dobijemo dijeljenjem s milijardu, dakle

$$t = 3.05685 \cdot 10^{12} \text{ s} = 96\,932 \text{ godine.}$$

Ur.

1690. *Na Novu godinu, 1. 1. 2019. sonda New Horizons proletjet će pored objekta Kuiperovog pojasa 2014MU69. Brzina letjelice u odnosu na Sunce će iznositi* $14.07\ km/s$*, a u odnosu na objekt* $14.43\ km/s$*. Letjelica će proći na 3500 km udaljenosti, a objekt je (očekivanog) promjera 30 km. Kolika je prividna veličina objekta pri proletu? Koliko minuta prije (i nakon) najvećeg približenja će prividna veličina biti veća od jedne lučne minute?*

Rješenje. Za najvećeg približenja, objekt veličine 30 km sa 3500 km udaljenosti zauzima prostorni kut α,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d} = \frac{15}{3500}$$
$$\alpha = 0.491^\circ = 29.5'.$$

Da bi taj kut iznosio $1'$ udaljenost mora biti

$$d_1 = \frac{R}{\operatorname{tg} 0.5'} = 103\,132 \text{ km.}$$

Između ta dva položaja, letjelica mora preći put po kateti x pravokutnog trokuta hipotenuze d_1 i druge katete 3500 km, dakle

$$x = \sqrt{103\,132^2 - 3500^2} = 103\,073 \text{ km.}$$

Brzinom 14.43 km/s, ta se udaljenost prevali za

$$t = \frac{103\,073}{14.43} = 7143 \text{ s} = 119 \text{ min.}$$

Dakle za najbližeg pogleda objekt je veličine punog Mjeseca gledanog sa Zemlje, a iskoristivi prolet traje oko dva sata približavanja i dva sata udaljavanja!

Ur.

1691. *Galij je metal koji nakon žive i cezija ima najniže talište,* $+30\,^\circ C$*. Gustoća krutog galija je* $5904\ kg/m^3$*, a tekućeg* $6093\ kg/m^3$*. Koliko će se smanjiti volumen galija ako rastalimo 120 grama tog metala? Ako u tekući galij ubacimo 5 grama krutog galija, koliki će volumen viriti iznad površine?*

Rješenje. Volumen 120 g krutog galija je

$$V_1 = \frac{m}{\rho} = \frac{0.12}{5904} = 2.03252 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

Volumen 120 g tekućeg galija je

$$V_2 = \frac{m}{\rho} = \frac{0.12}{6093} = 1.96947 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

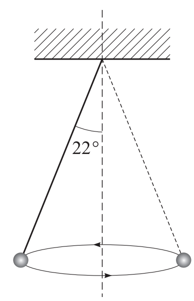
Pa će se taljenjem volumen smanjiti za $\Delta V = 6.305 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3 = 0.6305\ \text{cm}^3$. Volumen 5 grama je analogno

$$V_1' = 0.84688 \text{ cm}^3,$$
$$V_2' = 0.82061 \text{ cm}^3.$$

Uzgon djeluje na uronjeni volumen, i jednak je težini istisnute tekućine, dakle na V_2'. Odatle slijedi da iznad površine viri $\Delta V' = V_1' - V_2' = 0.02627\ \text{cm}^3$.

Borna Cesarec (1), Krapina

1692. *Uteg na niti jednoliko rotira u horizontalnoj ravnini, kao na slici. Kut otklona iznosi* 22°*, a period rotacije 1.3 sekunde. Odredi duljinu niti. Koliki bi bio period njihanja malog otklona?*



Rješenje. Pri jednolikoj rotaciji uz stalni otklon α, period vrtnje njihala je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Odatle je (uz $g = 9.81\ \text{m/s}^2$) $l = 0.45293$ m, a period njihanja tog njihala

$$T_{nj} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{\sqrt{\cos\alpha}} = 1.35 \text{ s.}$$

Ur.