60. Državno natjecanje iz matematike Poreč, 28. – 30. ožujka 2019.

Matematička natjecanja su ove školske godine počela 28. siječnja 2019., kada su održana školska (odnosno gradska) natjecanja. Županijska natjecanja su održana 28. veljače. Na temelju rezultata županijskih natjecanja, određeni su učenici koji su pozvani na Državno natjecanje.

Zadatke za sve razine natjecanja priređuje Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante. Njihov rad uspješno je koordinirao tajnik državnog povjerenstva, *Vesko Nikolaus,* mag. educ. math. et phys. viši savjetnik za matematiku Agencije za odgoj i obrazovanje, koji je obavio velik dio posla oko organizacije školsko/gradskog, županijskog i Državnog natjecanja.

Državno natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola ove je godine održano u Poreču. Sve se odvijalo u hotelu Pical. U njemu je bilo otvaranje natjecanja, pregledavanje učeničkih radova i na kraju proglašenje rezultata i podjela nagrada. Pozvano je 262 učenika i to: 90 iz osnovnih škola (V. – 22, VI. – 23, VII. – 21, VIII. – 24), 96 iz srednjih škola A varijante (I. – 24, II. – 27, III. – 23, IV. – 22) i 76 iz srednjih škola B varijante (I. – 20, II. – 19, III. – 19, IV. – 18).

Prvog dana navečer je u Kongresnoj dvorani održano svečano otvaranje 60. Državnog natjecanja. Prisutnima su se obratili: *Vesko Nikolaus*, *Nadia Štipanić-Dobrilović*, zamjenica gradonačelnika grada Poreča, i *Mea Bombardelli*, predsjednica Državnog povjerenstva. Nakon kratkog zabavnog programa prisutnima se obratio *Matija Bašić*, prisjećajući se prerano preminulog *Stipe Vidaka*, člana Državnog povjerenstva. Potom se obratio *Čedomir Ružić*, ravnatelj Srednje škole Mate Blažina Labin, koja je bila domaćin ovogodišnjeg natjecanja. Učenik drugog razreda, *Petar Dundara*, iz iste škole imao je čast otvoriti ovogodišnje Državno natjecanje.

Natjecanje se održavalo u dvije velike dvorane u hotelu. Povjerenstvo je pregledalo i ocjenilo učenička rješenja, a navečer su se rješavale žalbe. Nakon toga Državno povjerenstvo je donijelo konačnu rang-listu i odlučilo o nagradama. Po unaprijed utvrđenim pravilima određeni su učenici koji će sudjelovati na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi u borbi za mjesto u po jednoj od dvije šesteročlane ekipe za 60. Međunarodnu matematičku olimpijadu (IMO) u Velikoj Britaniji i 13. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu (MEMO) u Češkoj. Također će biti izabrano četvoro učenika srednjih škola koji će ove godine sudjelovati na Mediteranskom natjecanju (MYMC) u Italiji.

Na Hrvatskoj juniorskoj matematičkoj olimpijadi bit će izabrana četveročlana ekipa učenika osnovnih škola koja će sudjelovati na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi na Cipru.

Na svečanom proglašenju rezultata uručeni su najboljim mladim matematičarima priznanja, i knjige koje su osigurali Hrvatsko matematičko društvo i škola domaćina. Osnovnoškolcima je uručeno 8 prvih, 7 drugih i 17 trećih nagrada, dok je 18 učenika pohvaljeno. Za srednje je škole podijeljeno 6 prvih, 6 drugih, 12 trećih nagrada i 19 pohvala za A varijantu, te 8 prvih, 7 drugih, 8 trećih nagrada i 18 pohvala za B varijantu.

Dok su učenici rješavali zadatke, u dvije dvorane su se održavali *Seminari za mentore osnovnih i srednjih škola* na kojima su održana po dva predavanja:

Seminar za mentore osnovne škole

- prof. dr. sc. Ilko Brnetić, *Bojanje i invarijante*
- doc. dr. sc. Mea Bombardelli, *O matematičkim natjecanjima učenika osnovnih škola*

Seminar za mentore srednje škole

- Jelena Noskov, prof., viša savjetnica za matematiku, *Engleski zadatci u hrvatskim školama*
- Aneta Copić, prof., *Terija grafova*

Trećeg dana, prije proglašenja rezultata i podjele nagrada održan je okrugli stol o matematičkim natjecanjima.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Bernard Inkret, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Patrick Pavić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lovre Mahečić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Matej Vojvodić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Šimun Dropuljić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Dorijan Lendvaj*, XV. gimnazija, Zagreb, *Domagoj Sabolić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Leonarda Vuković*, III. gimnazija Osijek, Osijek, *Mira Galić*, III. gimnazija, Split (pohvala).

II. razred

Krešimir Nežmah, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Vojvodić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Jakov Ljubičić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (I. nagrada); *Gabrijel Radovčić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Vedran Cifrek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Andrej Čizmarević*, Gimnazija Andrije Mohorovičića Rijeka, Rijeka, *Nora Ivić*, III. gimnazija, Split, *Lovro Vladić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Jelena Lončar*, III. gimnazija, Split, *Denis Ratković Rajhvajn*, XV. gimnazija, Zagreb, *Isa Trobradović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nikola Kušen*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Leonarda Pribanić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (pohvala).

III. razred

Noel Lakić, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (I. nagrada); *Luka Bulić Bračulj*, III. gimnazija, Split, *Maja Drmač*, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Josip Kocijan*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *David Mikulčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mateo Kovačić*, Gimnazija Ivana Zakmardija Dijankovečkoga, Križevci (II. nagrada); *Matej Ljubičić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Mislav Brnetić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Bernard Faulend*, XV. gimnazija, Zagreb, *Karlo Priselac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Stella Balić*, III. gimnazija, Split, *Ida Kolmanić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Barbara Sumić*, III. gimnazija, Split (pohvala).

IV. razred

Marin Varivoda, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (I. nagrada); *Krunoslav Ivanović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Luka Kraljević*, XV. gimnazija, Zagreb, *Luka Milačić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (III. nagrada); *Daniel Širola*, XV. gimnazija, Zagreb, *Goran Ivanković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Jakov Cigrovski*, XV. gimnazija, Zagreb, *Filip Vinković*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (pohvala).

B varijanta

I. razred

Nikola Bačić, Srednja škola Blato, Blato, *Roko Bruno Donkov*, Privatna gimnazija i ekonomsko-informatička škola Futura s pravom javnosti, Zagreb, *Ivan Jambrešić*, Privatna gimnazija i ekonomsko-informatička škola Futura s pravom javnosti, Zagreb (I. nagrada); *Ivona Bosec*, Srednja škola Marka Marulića, Zagreb, *Bruno Brščić*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin, Pazin (II. nagrada); *Marko Vujnović*, Gimnazija Sisak, Sisak (III. nagrada); *Antonio Šimundža*, V. gimnazija "Vladimir Nazor", Split, *Marko Dvorski*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Paula Rančić*, Gimnazija Tituša Brezovačkog, Zagreb, *Roko Ivančević*, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula, *Gabrijea Klepec*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec (pohvala).

II. razred

Marko Žagar, Srednja škola "Vladimir Nazor" Čabar, Čabar, *Josip Matanić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (I. nagrada); *Tara Baće*, Gimnazija Tituša Brezovačkog, Zagreb (II. nagrada); *Amalia Habijanić*, Srednja škola Jelkovec, Zagreb, *Leon Križanić*, Srednja škola Petrinja, Petrinja (III. nagrada); *Petar Mrvac*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Karla Mijić*, Srednja škola Mate Balote, Poreč, *Luka Rogoz*, Gimnazija dr. Ivana Kranjčeva, Đurđevac, *Alen Komadina*, Srednja škola Haračića, Mali Lošinj (pohvala).

III. razred

Mario Oraić, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (I. nagrada); *Mateja Vuradin*, Druga gimnazija Varaždin, Varaždin (II. nagrada); *Ivan Nizić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Ivan Cepanec*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Dominik Šarić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (III. nagrada); *Neven-Lucian Davidović*, Elektrotehnička i prometna škola Osijek, Osijek, *Dario Hanžek*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Dijana Tot*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Klara Zagajski*, Gimnazija Sesvete, Zagreb, *Ana Kardum*, Klasična gimnazija Ivana Pavla II., Zadar (pohvala).

IV. razred

Matija Andričić, Tehnička škola Ruđera Boškovića Zagreb, Zagreb, *Kim Staničić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (I. nagrada); *Josip Srzić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Tvrtko Lončarić*, Privatna klasična gimnazija, Zagreb, *Ana Althea Šehić*, Isusovačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek (II. nagrada); *Lucija Kovačević*, V. gimnazija "Vladimir Nazor", Split, *Mato Gudelj*, Tehnička škola Zagreb, Zagreb (III. nagrada); *Leon Lušić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Pipunić*, IX. gimnazija Zagreb, Zagreb, *Miran Grgić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Domagoj Bogić*, Prirodoslovna škola Split, Split (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Ana i Vanja stoje zajedno kraj željezničke pruge i čekaju da prođe vlak koji vozi stalnom brzinom. U trenutku kad prednji kraj vlaka dođe do njih, Ana krene stalnom brzinom u smjeru kretanja vlaka, a Vanja istom brzinom u suprotnom smjeru. Svaka od njih se zaustavlja u trenutku kad stražnji kraj vlaka prođe kraj nje. Ana je ukupno prošla 45 metara, a Vanja 30 metara. Koliko je dugačak vlak?

2. U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su prirodni brojevi, a polumjer upisane kružnice iznosi 4. Odredi sve moguće vrijednosti duljina kateta tog trokuta.

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2}+\frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2}+\frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2}<4.$$

4. Neka je $k>1$ prirodan broj. Dano je $k+2$ međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od $3k+1$. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika veća od k i manja od $2k$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC vrijedi $|AB|=|AC|$ i $\sphericalangle BAC<60^\circ$. Neka je točka D na dužini $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BAC$, neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{BD}$ i paralele s BC kroz točku A te neka je F točka na pravcu AC takva da se A nalazi između C i F i vrijedi $|AF|=2|AC|$.
a) Dokaži da su pravci BE i AC paralelni.
b) Dokaži da se okomica iz F na AB i okomica iz E na AC sijeku na pravcu BD.
U (b) dijelu zadatka dozvoljeno je korištenje tvrdnje iz (a) čak i ako nije dokazana.

II. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x)=(x-a)(x-a^2)(x-a^3)$$

realni.

2. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\left\lfloor\frac{x^2+1}{x+2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x-1}{2}\right\rfloor=\frac{x(3x+1)}{2(x+2)}.$$

Za realni broj t, $\lfloor t\rfloor$ je najveći broj koji nije veći od t. Na primjer, ako je $t=3.14$, onda je $\lfloor t\rfloor=3$.

3. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC|=|AB|+|CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT|=|AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL\parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.
U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

4. Odredi sve parove (m,n) cijelih brojeva za koje vrijedi $m^2=n^5+n^4+1$, a broj $m-7n$ dijeli $m-4n$.

5. U krug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- svakom broju istovremeno oduzeti njemu dva susjedna broja;
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane
a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?
b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

III. razred

1. Dan je trokut ABC takav da je $|AB| = 4$, $|BC| = 7$, $|AC| = 5$. Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$. Izračunaj

$$\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2}.$$

2. Četvorku prirodnih brojeva (a, b, c, d) zovemo *zelenom* ako vrijedi

$$b = a^2 + 1, \quad c = b^2 + 1, \quad d = c^2 + 1$$

i $D(a)+D(b)+D(c)+D(d)$ je neparan, pri čemu je $D(k)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja k.

Koliko ima zelenih četvorki čiji su svi članovi manji od 1 000 000?

3. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima.

Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2 + 6}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2a - 1} + \frac{b^2 + 6}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2b - 1} + \frac{c^2 + 6}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c - 1} \leq 3.$$

5. Dan je šiljastokutni trokut ABC takav da je $|BC| < |CA| < |AB|$. Neka su D, E i F redom nožišta njegovih visina iz vrhova A, B i C. Pravac točkom F paralelan s DE siječe pravac BC u točki M, a simetrala kuta $\sphericalangle MFE$ siječe pravac DE u točki N.

Dokaži da je točka F središte kružnice opisane trokutu DMN ako i samo ako je točka B središte kružnice opisane trokutu FMN.

IV. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x - a)(x - a^2)(x - a^3)(x - a^4)$$

realni.

2. Rudi i Miljen igraju igru na šahovskoj ploči naizmjence odigravajući poteze. Igrač koji je na potezu bira dva relativno prosta broja napisana na ploči, briše ih te zapisuje na ploču njihov zbroj. Gubi igrač koji to ne može napraviti. Igru započinje Rudi. Dokaži da Miljen ima pobjedničku strategiju ako je na početku na ploči bilo napisano

a) 2019 jedinica;

b) 2020 jedinica.

3. Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n,

$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j, k vrijedi

$$(i - j)M_k + (j - k)M_i + (k - i)M_j = C,$$

dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D, E i F nožišta visina trokuta ABC iz vrhova A, B i C, redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P. Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R. Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle NQP + \sphericalangle NRP < 180°$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

5. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta.

- Za sve a, $b \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$
- Ako su a, $b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Za međusobno različite realne brojeve a i b vrijedi
$$a + 9 = (b-3)^2 \quad \text{i} \quad b + 9 = (a-3)^2.$$
Koliko iznosi $a^2 + b^2$?

2. Odredite skup svih cijelih brojeva n za koje vrijedi nejednakost
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2019^2-1}\right) < \frac{2019}{n^2}.$$

3. Na koliko se načina broj 455 može zapisati kao zbroj rastućeg niza od dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva?

4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10 000 koji imaju točno tri jednake znamenke? Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.

5. U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina hipotenuze je 12. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $ACGF$. Ako točke D, E, F i G leže na istoj kružnici, izračunajte opseg trokuta ABC.

II. razred

1. Koliko je $1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2\cdot 2019}$, ako je $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$?

2. U trokutu ABC je $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 25$ cm, $|CA| = 17$ cm. Trokutu je upisan pravokutnik $KLMN$ tako da su vrhovi M i N na stranici $\overline{BC}$, vrh K na stranici $\overline{AB}$, a vrh L na stranici $\overline{CA}$.

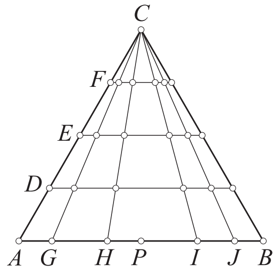
Odredite duljine stranica pravokutnika ako je njegova površina jednaka $\dfrac{216}{5}$ cm^2.

3. U trokutu ABC je $|BC| = 2$ cm, $|AC| = 3$ cm i $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB$.

Ako je kut između težišnice i visine povučene iz vrha C jednak ω, koliko je $\cos 2\omega$?

4. Neka je $f(x) = |x-4|(|x|-2)$. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije f na intervalu $[-2, 5]$. Za koje vijednosti realnog parametra m jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja?

5. U jednakostraničnom trokutu ABC polovište stranice $\overline{AB}$ je točka P. Točke G i H su između točaka A i P, a točke I i J između točaka P i B. Točke D, E i F dijele dužinu $\overline{AC}$ na četiri jednaka dijela. Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{AB}$. Promatramo sve trokute kojima je jedan vrh u točki C, a preostala dva na jednoj od konstruiranih paralela sa stranicom $\overline{AB}$, uključujući $\overline{AB}$ i to u točkama presjeka sa spojnicama AC, GC, HC, IC, JC ili BC.



Ako je ukupan broj takvih trokuta jednak x, a ukupan broj takvih trokuta koji ne sadrže težište T jednak y, odredite omjer $x : y$.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu
$$\sqrt{4^x+1} \geq |4^{x-1}-1| + 4^x \log_x \sqrt{x}$$
u skupu realnih brojeva.

2. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od 60°. Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a}+4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a}+2\vec{b}$, izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha A u trokutu ABC.

3. Dokažite da vrijednost funkcije $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ nije u intervalu $\left\langle \frac{1}{9}, \frac{3}{2} \right\rangle$ niti za jedan realni broj x za koji je funkcija definirana.

4. Klara je čekajući za ulaznice kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999.
Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Klara takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

5. Ako unutar trokuta ABC postoji točka P takva da je
$$\sphericalangle PAB = 10^\circ, \quad \sphericalangle PBA = 20^\circ, \quad \sphericalangle PCA = 30^\circ, \quad \sphericalangle PAC = 40^\circ,$$
dokažite da je trokut ABC jednakokračan.

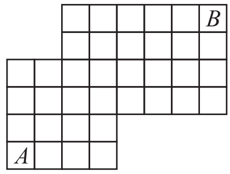
IV. razred

1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2. Realne funkcije $f \circ g$ i f zadane su pravilima pridruživanja
$$(f \circ g)(x) = 2^{4^{4^{\sin x}}} \quad \text{i} \quad f(x) = 4^{8-2^x}.$$
Odredite pravilo pridruživanja kojim je zadana funkcija g i njezino područje definicije.

3. Odredite sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu
$$x^2 - xy + y^2 = 2x - y.$$

4. Na igraćoj ploči prikazanoj na slici Ivan treba doći od polja A do polja B. Pritom iz pojedinog polja smije prijeći na polje koje je neposredno desno ili neposredno iznad njega. Na koliko načina Ivan može doći od polja A do polja B?



5. Duljina brida kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iznosi a. Odredite udaljenost od polovišta P brida $\overline{BC}$ do pravca koji prolazi vrhom A i središtem S stranice $A_1B_1C_1D_1$. Kolika je površina presjeka kocke ravninom APS?

⋆ ⋆ ⋆

Učenici pozvani na Hrvatsku matematičku olimpijadu 2019. g.:

I. razred: *Šimun Dropuljić, Bernard Inkret, Lovre Mahečić, Patrick Pavić, Matej Vojvodić*.

II. razred: *Vedran Cifrek, Andrej Čizmarević, Nora Ivić, Jakov Ljubičić, Krešimir Nežmah, Gabrijel Radovčić, Lovro Vladić, Ivan Vojvodić*.

III. razred: *Luka Bulić Bračulj, Maja Drmač, Martin Josip Kocijan, Mateo Kovačić, Noel Lakić, Matej Ljubičić, David Mikulčić*.

IV. razred: *Jakov Cigrovski, Goran Ivanković, Krunoslav Ivanović, Luka Kraljević, Luka Milačić, Daniel Širola, Andrija Tomorad, Ilja Uzelac Bujišić* (Matematička gimnazija Beograd, bio je na Državnom natjecanju, ali izvan konkurencije), Marin Varivoda, Filip Vinković.

Učenici pozvani na Hrvatsku juniorsku matematičku olimpijadu 2019. g.:

VII. razred: *Ratko Jelavić*, OŠ "Split 3", Split, *Petar Jukić*, OŠ Jordanovac, Zagreb, *Renato Krpan*, OŠ Voltino, Zagreb, *Mihovil Petrić*, OŠ Tina Ujevića, Zagreb, *Lara Semeš*, OŠ Kajzerica, Zagreb.

VIII. razred: *Namik Agić*, OŠ Krune Krstića Zadar, Zadar, *Emanuel Tukač*, OŠ Breznički Hum, Breznički Hum, *Stella Čolo*, OŠ Stanovi, Zadar, *Borna Banjanin*, OŠ Bogumila Tonija, Samobor, *Marko Dorčić*, OŠ Alojzija Stepinca, Zagreb, *Klara Mihalić*, III. OŠ Čakovec, Čakovec, *Matej Cvitković*, OŠ Ivana Lovrića, Sinj.

Željko Hanjš