

Sudoku – napredne metode rješavanja (8.1)

Žarko Čulić¹

U narednih nekoliko nastavaka bavit ćemo se kompleksnim *lancima*. **Lanci**, engleski **Chains** predstavljaju najosnovnije, a ujedno i najnaprednije tehnike za rješavanje sudokua. Svaki sudoku se može riješiti koristeći isključivo lance različitog stupnja kompleksnosti. Do sada smo obradili jednostavne lance: lance parova (lance s istim parovima kandidata), *X-lance* (lance s jednim istim kandidatom) različite duljine ili duljine 4 polja koje zovemo *Turbot Fish* i dolaze u različitim *Turbot* varijantama: *neboder*, *zmaj*, *prividni pravokutnik* (koje nazivamo *šablone s jednom znamenkom*) te na kraju *XY-lance* (lance koji povezuju različite kandidate unutar polja sa samo dva kandidata).

Vrlo napredne i zahtjevne tehnike predstavljaju tri grupe metoda: **naizmjenično povezani lanci** (AIC), *petlje* (Nice Loops) i **forsirani lanci** (Forcing Chains).

Budući da se radi o kompleksnim metodama, uvedene su i notacije za opis pretraživanja i eliminaciju pojedinih kandidata.

Pri opisu lanaca / petlji koriste se sljedeće notacije:

- Forcing Chain notacija
- Nice Loop notacija
- AIC (EUREKA) notacija

Pogledajmo u primjeru na slici 1 zapis u sve tri notacije. U primjeru se nalazi jednostavni *lanac parova* u 4 polja (4 polja s istim parom kandidata) koji eliminira kandidate iz svih polja koja vide početno i završno polje lanca.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	9	8	4	5	2	3	1	6
B	6	4 5	3	7	8	1	4 5	9	2
C	4 5	1	2	6 9	3	6 9	8	7	4 5
D	3	7	1 9	2	6	5	1 9	4	8
E	8	2	5 9	1	4	3	7	6	5 9
F	4 5	6	4 5	8	9	7	5	2	3
G	9	8	5 6	5 6	1	4	2	3	7
H	1	4 3	7	3 6 9	2	8	4 6 9	5	4 9
I	2	4 5 3	4 5 6	3 5 6 9	7	6 4 9	4 6 9	8	1

Slika 1.

Napomena. Za nejednakost se vrlo često umjesto znaka \neq koji ne postoji na standardnoj tastaturi koristi znak $\langle \rangle$.

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

Forcing Chain notacija (standardna notacija):

- [polje]=[vrijednost] ili [polje]<>[vrijed.] + znak za 'slijedi' ==>
- naš primjer: $B7 <> 4 \Rightarrow B7 = 5 \Rightarrow B2 <> 5 \Rightarrow B2 = 4 \Rightarrow C1 <> 4 \Rightarrow C1 = 5 \Rightarrow F1 <> 5 \Rightarrow F1 = 4$
- slovima: ako u polju B7 nije točan broj 4, tada je točan broj 5, iz čega slijedi da B2 nije 5, te je B2 4, pa C1 nije 4, te je C1 5, pa F1 nije 5, te je F1 4
- često se u lancu izraz '<>' izostavlja: $B7 <> 4 \Rightarrow B7 = 5 \Rightarrow B2 = 4 \Rightarrow C1 = 5 \Rightarrow F1 = 4$ (skraćeni zapis)

Nice Loop notacija:

- koriste se simboli '-x-' za slabu i '=x=' za jaku povezanost (x je oznaka bilo kojeg kandidata)
- opisuju se samo veze kandidata između polja, dok se veze unutar polja podrazumijevaju i ne prikazuju
- naš primjer: $B7 - 5 - B2 - 4 - C1 - 5 - F1$
- često se u notaciju stavlja veza kako lanac počinje i završava i u tom slučaju notacija glasi: $4 = B7 - 5 - B2 - 4 - C1 - 5 - F1 = 4$
- slovima: ako B7 nije 4 tada je 5, ako B2 nije 5, tada je 4, ako C1 nije 4, tada je 5, ako F1 nije 5, tada je 4

AIC (EUROKA) notacija:

- koriste se simboli '-' za slabu i '=' za jaku povezanost
- veze između kandidata u poljima se nalaze u zagradama
- naš primjer: $(4=5)B7 - (5=4)B2 - (4=5)C1 - (5=4)F1$
- slovima: ako B7 nije 4, tada je 5, ako B2 nije 5, tada je 4, ako C1 nije 4, tada je 5, ako F1 nije 5 tada je 4
- postoji i pojednostavnjeni zapis koji je možda najlakši za korištenje s oznakama '-' za nije i '+' za je: $-4[B7] + 5[B7] - 5[B2] + 4[B2] - 4[C1] + 5[C1] - 5[F1] + 4[F1]$; skraćeni zapis je bez uglatih zagrada

Na kraju svake od ovih notacija treba napisati zaključak: $\Rightarrow F7 <> 5$ (F7 nije 5).

Da se prisjetimo:

- **slaba veza (povezanost):** dva entiteta ne mogu biti istinita istovremeno (ako je jedan istinit drugi mora biti lažan (oba mogu biti lažna)) – entiteti su povezani u retku, stupcu ili kvadratu, ili u jednom polju (kažemo da se međusobno vide)
- **jaka veza (povezanost):** dva entiteta ne mogu biti lažna istovremeno (ako je jedan lažan drugi mora biti istinit) – točno dva entiteta dijele povezano područje: redak, stupac ili kvadrat (u metodi *bojanja (Coloring)* se zovu *konjugirani parovi*), ili se u jednom polju nalaze samo dva entiteta

Sve tri notacije se mogu koristiti za svaki zapis bilo koje metode. Najdetaljniji zapis lanaca daje Forcing Chain notacija, Nice Loop notacija se uglavnom koristi za opis petlji, a AIC notacija za *AIC lance* pri čemu pojednostavljena notacija uopće ne koristi pojmove jake i slabe veze iako se logika bazira na njima.

U teoriji sudokua postoje razlike u terminima veza (link) i povezanost (interference), no mi ćemo ovdje koristiti termin veza za oba pojma.

Počet ćemo s obradom *naizmjenično povezanih lanaca (Alternating Interference Chains)* ili skraćeno *AIC*. Kod *AIC lanca* izmjenjuju se 2 tipa veza (slaba i jaka). Lanac možemo čitati kao: "ako je a (kandidat u početnom polju) netočan, tada b (povezani

kandidat u drugom polju lanca) mora biti točan, pa c mora biti netočan, itd.” Znademo da je svaka jaka veza ujedno i slaba i kao takva se prema potrebi može koristiti u lancu. Kod AIC metode čvorove lanaca (nodes) uvijek čine individualni kandidati (vidjet ćemo da su kod petlji to polja).

Imamo dvije vrste *naizmjenično povezanih lanaca (AIC)*:

Tip 1: počinje i završava s jakom vezom na istom kandidatu; to osigurava da taj kandidat mora biti točan ili u početnom ili u završnom polju lanca, te se stoga može eliminirati iz svih polja koja vide početno i završno polje lanca

Tip 2: počinje i završava s jakom vezom na dva različita kandidata u dva polja koja se međusobno vide; to osigurava da završni kandidat ne može biti u početnom polju i da početni kandidat ne može biti u završnom polju te ih možemo eliminirati iz tih polja

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	5	4	4 5 7 8	1	4 5 7 8	5 8	6	9
B	9	8	4 6	4 5	2	4 5 6	1	3	7
C	7	1	5 6	3 5 8 9	3	5 6 8 9	5 8	2	4
D	1	2 3	9	4 7 8	4 6 7 8	6	3 6	5	1 2
E	1	4	2 3	5 8	5 6 8	9	3 6	7	1 2
F	5	6	7	1	3	2	9	4	8
G	6	5	1	2 4 5 9	4 5 9	4 5	4 7	8	3
H	3	2	5	2 4 5 8	1 4 5 8	1 4 5 8	4 7	9	6
I	4	9	8	6	7	3	2	1	5

Slika 2.

U primjeru na slici 2 imamo *naizmjenično povezani lanac tip 1 (AIC tip 1)*. lanac počinje i završava s jakom vezom na istom kandidatu (broj 3 u poljima A2 i H3). Jaku vezu označavamo punom linijom, a slabu crtkanom. Opis lanca: ako A2 nije 5, tada je 3 (jaka veza unutar polja), ako je A2 3, tada A4 nije 3 (slaba veza), ako A4 nije 3 tada je C4 3 (jaka veza), ako C4 nije 9 tada je G4 9 (jaka veza), ako G4 nije 2 tada je G2 2 (jaka veza), ako je G2 2 tada H3 nije 2 (slaba veza), ako H3 nije 2 tada je H3 5 (jaka veza unutar polja). Jaka veza na početku i kraju lanca osigurava da je broj 5 točan ili u početnom ili u završnom polju lanca te ga možemo eliminirati iz svih polja koja ih vide. U konkretnom slučaju, možemo eliminirati broj 5 iz polja ABC3 i GH2. Pogledajmo zapise lanca:

a) *Forcing chain notacija:*

$$A2 \langle \rangle 5 \Rightarrow A2 = 3 \Rightarrow A4 \langle \rangle 3 \Rightarrow C4 = 3 \Rightarrow C4 \langle \rangle 9 \Rightarrow G4 = 9 \Rightarrow G4 \langle \rangle 2 \Rightarrow G2 = 2 \Rightarrow H3 \langle \rangle 2 \Rightarrow H3 = 5 \Rightarrow ABC3, GH2 \langle \rangle 5$$

b) *Nice Loop notacija:*

$$5 = A2 - 3 - A4 = 3 = C4 = 9 = G4 = 2 = G2 - 2 - H3 = 5 \Rightarrow ABC3, GH2 \langle \rangle 5$$

c) *AIC notacija:*

$$(5=3)A2 - (3)A4 = (3-9)C4 = (9-2)G4 = (2)G2 - (2=5)H3 \Rightarrow ABC3, GH2 \langle \rangle 5$$

$$\text{Pojednostavljeni zapis: } -5[A2] + 3[A2] - 3[A4] + 3[C4] - 9[C4] + 9[G4] - 2[G4] + 2[G2] - 2[H3] + 5[H3] \Rightarrow ABC3, GH2 \langle \rangle 5$$

Primijetite da kod AIC notacije jasno vidimo naizmjenične jake i slabe veze (= i -) između kandidata, odnosno kod pojednostavljenog zapisa kandidat nije ili je (- ili +) točan u nekom polju lanca. Zapamtimo da svaku jaku vezu možemo smatrati (i pisati) i kao jaku i kao slabu vezu, prema potrebi.

U primjeru na slici 3 imamo još jedan AIC tip 1. AIC zapis lanca je sljedeći: $(6=7)B5 - (7)B1 = (7-6)F1 = (6)F7 - (6)B7 = (6)C8 \implies C45, B7 \langle \rangle 6$, odnosno pojednostavljeno $-6[B5] + 7[B5] - 7[B1] + 7[F1] - 6[F1] + 6[F7] - 6[B7] + 6[C8] \implies C45, B7 \langle \rangle 6$. Vidimo da *naizmjenično povezani lanac* počinje i završava s jakim vezom na broju 6 i stoga možemo eliminirati tog kandidata iz svih polja koja vide početno i završno polje lanca. U ovom slučaju je specifično to što možemo eliminirati broj 6 iz polja B7 koji čini sastavni dio lanca. To je legitimni čin i to se zove kanibalizam, a konkretni lanac *kanibalistički AIC*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	5	6	8	2	7	3	4	
B	7	4	5	6	3	1	8	9	2
C	4	8	5	6	7	3	1	6	2
D	6	4	5	8	7	9	6	1	2
E	9	1	4	6	5	7	8	2	3
F	6	8	7	9	1	6	4	8	2
G	3	6	2	7	1	8	4	9	5
H	1	7	9	2	4	5	3	8	6
I	5	8	4	6	9	2	1	7	3

Slika 3.

Opis lanca: ako u B5 nije 6, tada je 7 (jaka veza u polju), pa u B1 nije 7 (slaba veza) te je u F1 7 (jaka veza), ako u F7 nije 6, tada je u F7 6 (jaka veza), pa u B7 nije 6 (slaba veza), zbog čega u C8 mora biti 6 (jaka veza). Imamo AIC tip 1 i možemo eliminirati broj 6 iz polja C45 i iz polja B7 zbog dopuštenog kanibalizma.

Na slici 4 imamo primjer AIC tip 2.

Lanac koji počinje i završava s jakim vezom na različitim kandidatima koji se vide (4 u početnom polju F2 i 8 u završnom polju F4). Opis: ako F2 nije 4 tada je I2 4, ako je I2 4 tada I5 nije 4 već 9, ako je I5 9 tada E5 nije 9, ako E5 nije 9 tada je E4 9, ako E4 nije 8 tada je F4 8. Broj 8 ne može biti točan u polju F2, a broj 4 u polju F4. Nice Loop notacija glasi: $4 - F2 = 4 = I2 - 4 - I5 - 9 - E5 = 9 = E4 = 8 = F4 - 8$ i iz nje proizlazi da je $F2 \langle \rangle 8, F4 \langle \rangle 4$. Pojednostavljena AIC notacija: $-4[F2] + 4[I2] - 4[I5] + 9[I5] - 9[E5] + 9[E4] - 8[E4] + 8[F4] \implies F2 \langle \rangle 8, F4 \langle \rangle 4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	5	1	3	⁴ / ₇	⁴ / ₇	⁶ / ₇	⁶ / ₇	8	2	9
B	6	7	8	2	1	9	5	4	3	
C	4	2	9	⁵ / ₃	⁵ / ₃	8	1	6	7	
D	3	9	² / ₄	1	² / ₄	5	² / ₄	8	6	
E	¹ / ₂	5	² / ₄	⁴ / ₇	⁴ / ₇	⁶ / ₄	⁶ / ₄	² / ₄	3	¹ / ₂
F	¹ / ₂	⁴ / ₈	6	⁴ / ₇	⁴ / ₇	² / ₄	9	5	¹ / ₂	
G	² / ₇	6	² / ₅	⁴ / ₅	⁴ / ₅	3	² / ₄	1	8	
H	² / ₇	3	⁴ / ₅	⁴ / ₅	8	1	6	9	⁴ / ₂	
I	⁴ / ₈	⁴ / ₈	1	6	⁴ / ₉	2	3	7	5	

Slika 4.

Na slici 5 imamo još jedan primjer *AIC lanca tip 2*. Lanac počinje i završava s jakom vezom na različitim kandidatima koji se međusobno vide (8 u A8 i 2 u D8). Opis: ako A8 nije 8 tada je 2, ako je A8 2 tada A7 nije 2, ako A7 nije 2 tada je F7 2, ako F7 nije 6 tada je F3 6, ako F3 nije 5 tada je D2 5, ako D2 nije 2 tada je D8 2. Zadovoljeni su uvjeti i možemo eliminirati početnog kandidata 8 iz završnog polja D8 i završnog kandidata 2 iz početnog polja A8. NL notacija: $8 - A8 - 2 - A7 = 2 = F7 = 6 = F3 = 5 = D2 = 2 = D8 - 2 \implies A8 \langle \rangle 2, D8 \langle \rangle 8$; pojednostavljena AIC skraćena notacija: $-8A8 + 2A8 - 2A7 + 2F7 - 6F7 + 6F3 - 5F3 + 5D2 - 2D2 + 2D8 \implies A8 \langle \rangle 2, D8 \langle \rangle 8$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	6	3	⁴ / ₇	1	⁴ / ₅	⁴ / ₇	² / ₈	⁴ / ₅
B	2	7	¹ / ₄	3	⁴ / ₅	⁴ / ₅	4	6	¹ / ₄
C	¹ / ₄	¹ / ₄	¹ / ₄	6	⁴ / ₅	2	7	3	¹ / ₄
D	7	¹ / ₄	9	¹ / ₄	6	⁴ / ₅	3	² / ₈	¹ / ₄
E	¹ / ₄	¹ / ₂	¹ / ₄	¹ / ₄	² / ₄	3	5	¹ / ₂	¹ / ₄
F	¹ / ₄	3	¹ / ₄	¹ / ₄	² / ₄	⁴ / ₅	⁴ / ₅	² / ₆	9
G	6	8	7	⁴ / ₉	3	⁴ / ₉	1	5	2
H	5	¹ / ₄	¹ / ₄	2	8	6	9	7	3
I	3	9	2	5	7	1	8	4	6

Slika 5.

Do sada smo obradili standardne (klasične) *AIC lance*. Postoje i *grupirani AIC lanci* koji koriste grupne veze. Normalno koristimo samo 2 kandidata za formiranje neke veze, jake ili slabe. Ako u lancima povezujemo više kandidata iz više polja istovremeno na način da svi oni čine samo jednu vezu (jedan čvor), tada govorimo o grupnom povezivanju i *grupnim lancima* pri povezivanju.

Pogledajmo kandidate/brojeve 2 u retku I i u stupcu 4 na slici 6. Ako polja I5 i I6 promatramo kao jedan čvor, tada imamo grupnu jaku vezu sa sljedećim zaključcima:

1. ako oba polja grupe I56 nisu 2, tada polje I9 mora biti 2 (grupna jaka veza)
2. ako polje I9 nije 2, tada jedno od polja grupe I56 mora biti 2 (grupna jaka veza)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		5	2	4	3	1	9	6	
B		3	6	7				1	5
C	1	9						2	
D	2								6
E	9	4							
F	5	6					7	4	9
G	3		9						
H	6		5		1				
I		8		5			6	9	

Slika 6.

Također, budući da se svaka jaka veza može prikazati i kao slaba veza vrijedi:

1. ako je jedno od polja grupe I56 2, tada polje I9 ne može biti 2 (grupna slaba veza)
2. ako je polje I9 2, tada niti jedno polje grupe I56 ne može biti 2 (grupna slaba veza).

Analogno navedenome, ista logika vrijedi i za broj 2 u grupi polja GH4 i polja F4 u stupcu 4. Unutar kvadrata VIII postoji također slaba veza između polja grupa I56 i GH4 (slaba veza budući da postoji broj 2 i u drugim poljima tog kvadrata):

1. ako je u jednom od polja grupe I56 2, tada niti jedno polje grupe GH4 ne može biti 2 (grupna slaba veza)
2. ako je u jednom od polja grupe GH4 2, tada niti jedno polje grupe I56 ne može biti 2 (grupna slaba veza)

Na kraju, pogledajmo povezivanje ovih kandidata i grupa kandidata u kratki lanac koji može biti dio dužeg lanca:

FC zapis: $F4 \langle \rangle 2 \Rightarrow GH4 = 2 \Rightarrow I56 \langle \rangle 2 \Rightarrow I9 = 2$

NL zapis: $2 - F4 = 2 = GH4 - 2 = I56 = 2 = I9 - 2$

AIC zapis: $(2)F4 = (2)GH4 - (2)I56 = (2)I9$ ili jednostavnije i kraće: $-2F4 + 2GH4 - 2I56 + 2I9$

Opis: ako F4 nije 2, tada jedno od polja GH4 mora biti 2, tada polja I56 nisu 2 i polje I9 mora biti 2.

Na slici 7 je primjer *grupnog AIC lanca* jer polja DE5 koristimo kao jednu zajedničku grupu. Početno i završno polje *naizmjeničnog lanca* (G2 i I6) imaju jaku vezu unutar polja na kandidatu 5 čime možemo eliminirati broj 5 iz svih polja koja vide početno i završno polje. Dakle, radi se o grupnom *AIC tip 1* i možemo eliminirati broj 5 iz polja I1 i G456.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	4	5	1	2	8	9	⁶ ₇	⁶ ₇
B	9	7	6	⁴ ₅	³ ₅	⁴ ₅	2	8	1
C	2	8	1	⁷ ₉	⁷ ₉	⁶ ₉	3	4	5
D	⁵ ₆	⁵ ₆	⁷ ₈	⁴ ₅	¹ ₂	³ ₄	⁴ ₈	1	² ₆
E	1	⁵ ₇	⁷ ₈	6	⁵ ₇	⁴ ₅	⁴ ₈	3	² ₇
F	4	³ ₆	2	⁷ ₉	8	1	5	⁶ ₇	9
G	7	⁵ ₆	4	³ ₅	³ ₅	⁵ ₆	1	2	8
H	8	1	9	² ₇	4	² ₇	6	5	3
I	⁵ ₆	2	3	8	1	⁵ ₆	7	9	4

Slika 7.

Opis: ako 5 nije točan u G2, tada je točan broj 6 (jaka veza); ako je u G2 6, tada u F2 nije 6 (slaba veza); ako u F2 nije 6, mora biti 3 (jaka veza); ako je u F2 3, tada u F4 nije 3 (slaba veza); ako u F4 nije 3, mora biti 7 (jaka veza); ako je F4 7, tada u grupi polja DE5 nije 7 (grupna slaba veza); ako u grup DE5 nije 7, tada u C5 mora biti 7 (grupna jaka veza); ako je u C5 7, tada nije 6 (slaba veza); ako u C5 nije 6, tada je u C6 6 (jaka veza); ako je u C6 6 tada nije 6 u I6 (slaba veza); ako u I6 nije 6, tada mora biti 5 (jaka veza). Imamo *grupni AIC lanac tip 1* i možemo eliminirati broj 5 iz polja I1 i G456.

FC zapis: $G2 \langle \rangle 5 \Rightarrow G2 = 6 \Rightarrow F2 \langle \rangle 6 \Rightarrow F2 = 3 \Rightarrow F4 \langle \rangle 3 \Rightarrow F4 = 7 \Rightarrow DE5 \langle \rangle 7 \Rightarrow C5 = 7 \Rightarrow C5 \langle \rangle 6 \Rightarrow C6 = 6 \Rightarrow I6 \langle \rangle 6 \Rightarrow I6 = 5 \Rightarrow I1, G456 \langle \rangle 5$

NL zapis: $5 - G2 - 6 - F2 - 3 - F4 - 7 - DE5 = 7 = C5 = 6 = C6 - 6 - I6 - 5 \Rightarrow I1, G456 \langle \rangle 5$

AIC zapis: $(5=6)G2 - (6=3)F2 - (3=7)F4 - (7)DE5 = (7-6)C5 = (6)C6 - (6=5)I6 \Rightarrow I1, G456 \langle \rangle 5$

Pojednostavljeni zapis: $-5G2 + 6G2 - 6F2 + 3F2 - 3F4 + 7F4 - 7DE5 + 7C5 - 6C5 + 6C6 - 6I6 + 5I6 \Rightarrow I1, G456 \langle \rangle 5$

Na slici 8 imamo jednu posebnu varijantu *grupne AIC metode* u kojoj kao grupu polja (čvor u lancu) dopuštamo *gotovo zaključani set (ALS)*. ALS polja se nalaze u B3 i I3 s kandidatima {1, 8, 9}. Dakle imamo grupu od 2 polja s 3 kandidata (to je po definiciji ALS). AIC lanac počinje jakom vezom u polju G1 i završava jakom vezom u polju E3 na istom kandidatu 6.

Opis: ako u G2 nije točan broj 6, tada mora biti točan broj 8 (jaka veza); ako je u G2 broj 8, tada nije 8 u I3 (slaba veza), čime ALS polja B3 i I3 postaju zaključani set s kandidatima {1, 9}, a to u sljedećem čvoru lanca E3 s kandidatima {1, 6, 9} eliminira kandidate 1 i 9 te u E3 ostaje samo broj 6. Dakle imamo *grupni AIC tip 1 s ALS-om* koji počinje i završava jakom vezom na istom kandidatu i eliminira sve 6-ice iz polja koja vide početno i završno polje lanca. U konkretnom primjeru možemo eliminirati broj 6 iz polja EF1 i H3.

Provjeru kao i uvijek možemo napraviti tako da pretpostavimo da je jedan od kandidata koje trebamo eliminirati točan. Neka je u E1 točan broj 6, tada je u G1 8, u E3 1 ili 9. No zbog 8 u G1 u I3 mora biti 9, a u B3 1 što dovodi do kontradikcije koja

ukazuje da je prvobitna pretpostavka nemoguća. Analogno možemo vidjeti i za druge eliminirane kandidate u F1 i H3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	6	7	8 9	8	3 8 9	2	1	4
B	2 9	1 2 9	1 9	5	6	4	3	8	7
C	3	8	4	2	7	1	5	9	6
D	2 4 7 8	1 2 4 5 7	1 3 5 8	1 4 7 8	1 2 3 8	3 1 7 8		6	9
E	4 7	2 6 9	1 2 9	1 6	4 6 7 9	6 7 9	8	3	5
F	6 7 8 9	1 7 9	1 8 9	1 5 8 9	6 7 8 9	5 7 8 9	3 1 7	4	2
G	6 8	3	2	6 8	9	5	4	7	1
H	1 7	5 7	5 6	3	4	6 7	9	2	8
I	4 7 8 9	4 7 9	8 9	1 7 8	1 8	2	6	5	3

Slika 8.

FC zapis: $G1 \langle \rangle 6 \Rightarrow G1 = 8 \Rightarrow I3 \langle \rangle 8 + ALS:BI3 = 19 \Rightarrow E3 = 6 \Rightarrow EF1, H3 \langle \rangle 6$

NL zapis: $6 - G1 - 8 - I3 + ALS:BI3 - 19 - E3 - 6 \Rightarrow EF1, H3 \langle \rangle 6$

AIC zapis: $(6 = 8)G1 - (8)I3 + (8 = 19)ALS:BI3 - (19 = 6)E3 \Rightarrow EF1, H3 \langle \rangle 6$

Pojednostavljeni zapis: $-6G1 + 8G1 - 8I3 + 19ALS:BI3 - 19E3 + 6E3 \Rightarrow EF1, H3 \langle \rangle 6$

Analogno ovom posebnom slučaju, dozvoljeno je da čvorovi lanaca i petlji osim gotovo zaključanih setova (*Almost Locked Sets, ALS*), budu i gotovo jednoznačni pravokutnici (*Almost Unique rectangles, AUR*), gotovo mreže (*Almost Fishes, AF*) i ostale metode, gdje je uvijek jedan kandidat viška i on se eliminira preko logike lanca.

U sljedećem nastavku nastavljamo s obradom petlji.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	2		7				1	5
B		7		4	9	8			
C				6					
D		6					1	5	
E	7								4
F		9	1					2	
G					5				
H			9	3	4			6	
I	5	1				8		7	9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	2	6	7	8	3	4	1	5
B	1	7	5	4	2	9	8	3	6
C	3	4	8	6	5	1	7	9	2
D	4	6	3	8	9	2	1	5	7
E	7	5	2	1	3	6	9	8	4
F	8	9	1	5	4	7	6	2	3
G	6	3	7	9	1	5	2	4	8
H	2	8	9	3	7	4	5	6	1
I	5	1	4	2	6	8	3	7	9