Rješenje nagradnog natječaja br. 225

Za realan broj $p > 1$ odredi minimalnu vrijednost sume $x+y$, gdje x i y zadovoljavaju uvjet

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) = p.$$

Rješenje. Neka je $t = x+\sqrt{1+x^2}$. Tada je $t > 0$ i $x = \dfrac{t^2-1}{2t}$. Dani uvjet je ekvivalentan s $y+\sqrt{1+y^2} = \dfrac{p}{t}$, tj.

$$y = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)^2 - 1}{2\cdot\frac{p}{t}} = \frac{p^2-t^2}{2pt}.$$

Dakle,

$$x+y = \frac{t^2-1}{2t} + \frac{p^2-t^2}{2pt} = \frac{p-1}{2p}\left(t+\frac{p}{t}\right) \geq \frac{p-1}{p}\sqrt{t\cdot\frac{p}{t}} = \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

Minimum se postiže za $t = \dfrac{p}{t} = \sqrt{p}$, tj. za $x = y = \dfrac{p-1}{2\sqrt{p}}$ i $\min(x+y) = \dfrac{p-1}{\sqrt{p}}$.

Knjigom Nikola Adžaga i dr., *Matematička natjecanja 2017./2018.*, Element, Zagreb, nagrađeni su rješavatelji:

1. *Alen Kekić* (1), Gimnazija Karlovac, Karlovac; 2. *Danica Petolas* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 2/274

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Borna Cesarec* (1), Srednja škola Krapina, Krapina, 3665; *Oliver Kukas* (3), Gimnazija A. G. Matoša, Zabok, 3665–3668, 3670–3678; *Erika Ramljak* (2), Opća gimnazija, KŠC "Don Bosco", Žepče, BiH, 3665.

b) Iz fizike: *Andrija Adamović* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 446–449; *Elena Mavretić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 446–449; *Luka Raguž* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 446–449; *Filip Vučić* (8), OŠ Trnsko, Zagreb, 446–449; *Borna Cesarec* (1), Srednja škola Krapina, Krapina, 1688, 1691.

Nagradni natječaj br. 227

Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je suma svakih dvaju različita od nule. Dokaži nejednakost

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2.$$