O kvantnoj neodređenosti

Roko Pešić[1]

Zamislimo model titrajnog sustava (harmonijskog oscilatora) – čvrste kuglice (u daljnjem tekstu: čestice) mase m obješene o elastičnu oprugu, koja titra oko ravnotežnog položaja frekvencijom titranja ω. Taj jednostavni model može se primijeniti u različitim situacijama – za opis makroskopskih tijela koja osciliraju (mostovi, amortizeri, mišićna vlakna...), tako i za opis vibracija molekula i atoma u kristalnim rešetkama mnogih materijala (kovina, minerala...) u čvrstom stanju. Ukupna energija E čestice jednaka je zbroju kinetičke i (elastične) potencijalne energije, koja ovisi o udaljenosti x od ravnotežnog položaja [1]

$$E = E_k + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Uzevši u obzir da je količina gibanja čestice $p = mv$, možemo pisati

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Prosječna vrijednost energije jednaka je:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m}\left\langle p^2 \right\rangle + \frac{m\omega^2}{2}\left\langle x^2 \right\rangle. \tag{1}$$

Za neku opservabilnu veličinu (kraće: opservablu[2]) A definira se mjera odstupanja od srednje vrijednosti te opservable, a naziva se još i pogreška mjerenja ili neodređenost u određivanju točne vrijednosti te veličine

$$\Delta A = A - \langle A \rangle, \tag{2}$$

gdje je $\langle A \rangle$ srednja vrijednost (aritmetička sredina) opservable A. S obzirom da za zbroj svih odstupanja n izmjerenih vrijednosti uvijek vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = 0,$$

znači da linearni oblik pogrešaka ne može poslužiti kao mjera za rasap rezultata mjerenja. Sljedeći najjednostavniji oblik je kvadratičan. Kvadriranjem izraza (2) dobivamo srednju (kvadratičnu) pogrešku

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2, \tag{3}$$

gdje je $\left\langle A^2 \right\rangle$ prosječna vrijednost kvadrata opservable A, a $\langle A \rangle$ prosječna vrijednost opservable A. Primijenivši (3) na opservable količine gibanja p i položaja x, imamo

$$(\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - 2\langle p \rangle \langle p \rangle + \langle p \rangle^2, \tag{4}$$

odnosno

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2. \tag{5}$$

Kako se radi o periodičnom gibanju, tj. titranju oko ravnotežnog položaja $x = 0$, zbog simetrije se poništavaju sve pozitivne i negativne vrijednosti opservabli x i p pa

[1] Autor je profesor fizike; e-pošta: `rpesic@net.hr`

[2] Fizička veličina koju je moguće izmjeriti; u kvantnoj mehanici takve veličine su predočene matricom ili operatorom.

su njihove prosječne vrijednosti jednake nuli: $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$. Tada iz relacija (4) i (5) imamo

$$(\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle, \qquad (\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle. \tag{6}$$

S obzirom da ukupna energija ima konstantnu vrijednost (sjetimo se zakona očuvanja energije) možemo je izjednačiti s njenom prosječnom vrijednošću, tj. $E = \langle E \rangle$.

Uvrstivši (6) u jednadžbu (1), konačno dobivamo

$$E = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2. \tag{7}$$

Iz minimalnog zahtjeva Heisenbergove relacije neodređenosti: $\Delta p \cdot \Delta x = \dfrac{\hbar}{2}$, izrazimo eksplicitno: $\Delta p = \dfrac{\hbar}{2\Delta x}$ i uvrstimo u (7):

$$E = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2. \tag{8}$$

Zanima nas kolikom najvećom točnošću možemo odrediti vrijednost energije kvantnog oscilatora odnosno kolika je najmanja vrijednost njegove energije. Zato moramo naći točke ekstrema funkcijske veze (8) između energije E i neodređenosti položaja Δx:

$$\frac{dE}{d(\Delta x)} = -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} + m\omega^2 \Delta x = 0 \implies \Delta x = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

To su ekstremi funkcije. Njena druga derivacija u tim točkama je

$$\frac{d^2E}{d(\Delta x)^2} = \frac{3\hbar^2}{4m(\Delta x)^4} + m\omega^2 = \frac{3\hbar^2}{4m\left(\pm\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\right)^4} + m\omega^2 = 4m\omega^2 > 0,$$

a to znači da u tim točkama funkcija poprima minimalnu vrijednost, koju dobivamo njihovim uvrštavanjem u (8):

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\left(\pm\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2.$$

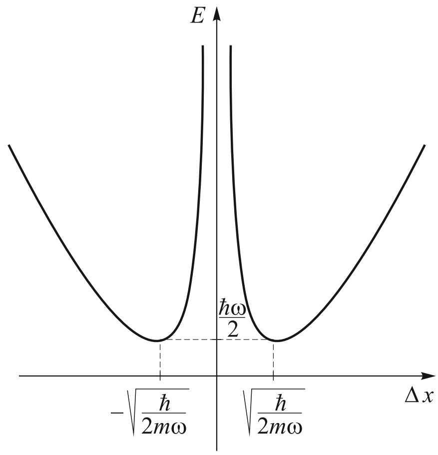
Sređivanjem dobivamo $E = \dfrac{\hbar\omega}{2}$, što je upravo energija osnovnog stanja kvantnomehaničkog oscilatora, čiji je energetski spektar određen jednadžbom

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Na slici se lijepo vidi krivulja ukupne energije oscilatora i njena minimalna vrijednost u ovisnosti o varijabli neodređenosti položaja Δx. Primijetimo da je razlika energija dvaju susjednih stanja jednaka $E_n - E_{n-1} = \hbar\omega$, što znači da oscilator može emitirati ili apsorbirati samo diskretne "paketiće" energije iznosa $\hbar\omega$, u skladu s fundamentalnom Planckovom formulom. Zanimljivo je da ako u prije navedenoj Heisenbergovoj relaciji neodređenosti izostavimo faktor 2 (nemamo više minimalni uvjet neodređenosti položaja), pa s njom provedemo isti račun, za minimalnu energiju dobivamo Planckov rezultat

$$E = \hbar\omega \tag{9}$$

što je energija jednog kvanta energije (fotona) frekvencije ω.



Slika 1. Krivulja ukupne energije na kojoj je označena energija osnovnog stanja kvantnog oscilatora $(n = 0)$*. Prikazane su dvije zrcalno simetrične, fizikalno potpuno ekvivalentne krivulje koje odgovaraju pozitivnoj i negativnoj vrijednosti* Δx*.*

Neodređenost energije (pobuđenog) stanja ΔE je, prema (9), jednaka

$$\Delta E = \hbar \Delta\omega, \tag{10}$$

gdje je ω frekvencija emitiranog (apsorbiranog) fotona. Emisija (apsorpcija) fotona nije trenutna. Ona traje određeno vrijeme dok je atom u pobuđenom stanju, nakon čega se atom deekscitira, tj. vraća se u osnovno stanje. Vrijeme trajanja pobuđenog stanja naziva se *srednje vrijeme života stanja* i uobičajeno se označava grčkim slovom τ (čitaj: tau).

Može se pokazati [1, str. 67] da vrijedi

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau} \tag{11}$$

pa uvrštavanjem u (10) dobivamo važan rezultat

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} \tag{12}$$

što znači da je neodređenost u energiji povezana sa srednjim vremenom života pobuđenog stanja. Što stanje dulje traje, to je točnije određena njegova energija. Kod optičkih prijelaza u atomima koji tada emitiraju vidljivu svjetlost imamo

$$\omega \approx 3 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}, \quad \tau \approx 10^{-7} - 10^{-8}\ \text{s}.$$

Primijetimo još da je (12) upravo Heisenbergova relacija neodređenosti za promatranje energije i vremenskog intervala.

Literatura

[1] E. H. WICHMANN, *Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu, sv. 4 – Kvantna fizika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988. (prijevod: N. Zovko)

[2] I. SUPEK, *Teorijska fizika i struktura materije, 1. i 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1988. i 1990.

[3] *REA's, Physics Problem Solver*, Research & Education Association, ed. Max Fogiel, USA, 1976.