MATEMATIKA

O Eulerovu broju e i odgovarajućoj eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji

Željko Hanjš, Darko Žubrinić

Eulerov broj e predstavlja jednu od najvažnijih konstanata u matematici. U ovom članku ćemo opisati njene uobičajene aproksimacije, s naglaskom na brzinu konvergencije aproksimacija. Također ćemo promotriti pripadajuću eksponencijalnu funkciju, s naglaskom na njena lokalna i globalna svojstva, kao i njoj inverznu – logaritamsku funkciju.

Aproksimacije broja e i njihova asimptotika

Broj e se definira kao broj kojemu teži izraz

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

za velike vrijednosti prirodnog broja n. Na primjer, ako računamo na devet decimala, onda je

$$a_{100} = 1.01^{100} \approx 2.704813829$$
$$a_{1000} = 1.001^{1000} \approx 2.716923223$$
$$a_{100\,000} = 1.00001^{100\,000} \approx 2.718268237.$$

Oznaku e za taj broj uveo je znameniti švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.–1783.). On je prvi točno izračunao njegovu vrijednost s točnošću na prve dvadeset tri decimale. To je u njegovo vrijeme (tj. u 18. st., bez uporabe računala) bio ne mali pothvat:

$$\mathrm{e} \approx 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45\,23\,5360\,28.$$

(Grupiranje je obavljeno radi lakšeg pamćenja prvih znamenaka broja e, ali za naše je potrebe dovoljno znati samo prvih pet decimala: $\mathrm{e} \approx 2.71828$.) Primijetite da se broj a_{100} podudara s točnom vrijednošću od e na samo jednu decimalu, broj a_{1000} na samo dvije decimale, a broj $a_{100\,000}$ na samo tri decimale. To upućuje da niz (a_n) konvergira prema broju e iznenađujuće sporo.

Da bi niz (a_n) konvergirao, dovoljno je pokazati da je monoton i omeđen.[1]

Pokažimo najprije da je niz (a_n) strogo rastući. Prema poznatoj binomnoj formuli[2] vrijedi

---

[1] U matematičkoj analizi se dokazuje da vrijedi sljedeći opći teorem: *Ako je neki niz realnih brojeva* (a_n) *monoton* (tj. rastući ili padajući) *i omeđen* (tj. sadržan u nekom zatvorenom intervalu $[c, d]$), *onda je on konvergentan* (tj. postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$).

[2] *Binomna formula* (koja se ponekad zove i *Newtonova formula*) kaže da za sve prirodne brojeve n i sve realne brojeve x vrijedi $(1+x)^n = 1 + nx + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + x^n$, gdje je $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ *binomni koeficijent*, pri čemu je $k = 1, 2, \ldots, n$ i $\binom{n}{0} = 1$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Iz druge jednakosti vidimo da je $a_n < a_{n+1}$, tj. (a_n) je rastući niz.

Pokažimo sada da je niz (a_n) omeđen. Za $n > 2$ je

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
a_n &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3.
\end{aligned}$$

Prema tome je niz (a_n) omeđen odozgo s 3 (a odozdo očevidno s 2).

Pripadajuća *eksponencijalna funkcija*, definirana s $f(x) := \mathrm{e}^x$ za sve realne brojeve x, od velike je važnosti u matematici. Njeno osnovno svojstvo je da za sve realne brojeve x_1 i x_2 vrijedi

$$\mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} \quad \text{i} \quad \mathrm{e}^0 = 1. \tag{2}$$

Za eksponencijalnu funkciju je već Leonhard Euler znao ovaj razvoj u tzv. *red potencija*:

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{3}$$

Smisao ove jednakosti je sljedeći: za bilo koji realan broj x, vrijednost parcijalne (djelomične) sume $s_n(x) := 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ je po volji blizu vrijednosti e^x, gdje je n dovoljno velik. Kažemo da $s_n(x)$ *konvergira* prema e^x kada n teži u beskonačno.

Posebno, za $x = 1$ iz (3) dobivamo red

$$\mathrm{e} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \tag{4}$$

Parcijalne sume

$$s_n := 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \quad \text{gdje je } n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

konvergiraju prema broju e puno brže nego brojevi a_n definirani s (1).[3] Doista, već je $s_{10} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{10!} \approx 2.7182818$, i sve su navedene znamenake iste kao i za broj e (što s nizom $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nije postignuto niti za $n = 37\cdot 10^6$, tj. trideset sedam milijuna). Razlog tome je što vrijednosti $n!$, koje se pojavljuju u nazivnicima, strahovito

[3] Niz (s_n), definiran s (5), je također monoton (što je očevidno) i omeđen (točnije, sadržan u intervalu $(2,3)$), kao i niz (a_n).

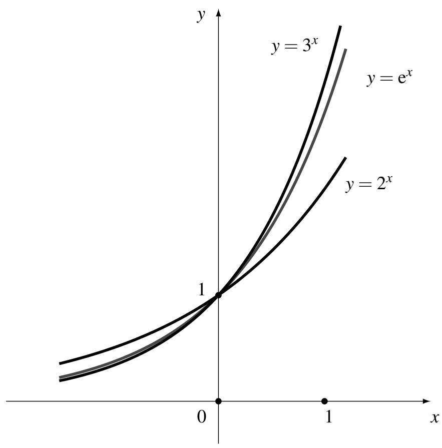
brzo teže u beskonačno, kada n teži u beskonačno (na pr., već je $13!$ veće od broja sekunda u 150 godina).[4] To će se jasnije vidjeti iz ocjene pogreške parcijalnih suma u odnosu na točnu vrijednost broja e, koje teže u nulu *faktorijelnom brzinom* (točnije, kao $1/(n!)$) kada n teži u beskonačno; vidi nejednakost (7) malo niže. Podsjećamo da faktorijelna funkcija $n \mapsto n!$, gdje je n prirodan broj, raste u $+\infty$ puno brže od eksponencijalne funkcije $n \mapsto \mathrm{e}^n$ (jer $\mathrm{e}^n/n!$ teži u nulu kada n teži u beskonačno).

Pokazuje se da niz $(a_n)_{n\geqslant 1}$, gdje je $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, konvergira prema broju e vrlo sporo, brzinom $1/n$ (i monotono je rastući).[5] Točnije, postoje pozitivne konstante A i B (gdje je $A < B$) takve da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\frac{A}{n} \leqslant \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \frac{B}{n}. \tag{6}$$

Štoviše, pokazuje se da kvocijent $(\mathrm{e} - a_n)/n^{-1}$ konvergira prema broju $\mathrm{e}/2$ kad n teži u beskonačno; vidi Dodatak na kraju članka. S druge strane, niz $(s_n)_{n\geqslant 1}$, definiran s (5) (koji je također rastući), konvergira prema broju e puno brže, čak *faktorijelnom brzinom*, tj. postoje pozitivne konstante C i D (može se uzeti $C = 1$ i $D = 3$) takve da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\frac{C}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e} - \left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \leqslant \frac{D}{(n+1)!}. \tag{7}$$

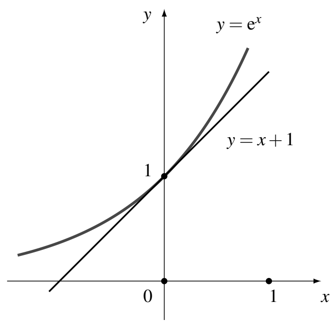


Slika 1. Grafovi funkcija $y = 2^x$, $y = \mathrm{e}^x$ i $y = 3^x$ blizu točke $(0, 1)$.

Među svim eksponencijalnim funkcijama oblika $f(x) = a^x$, gdje je $a > 1$ zadana konstanta, a x realna varijabla, baza $a = \mathrm{e}$ je jedina za koju je koeficijent smjera tangente na graf te funkcije, povučene u točki $(0, 1)$, jednak točno $k = 1$. Drugim riječima, kut pod kojim tangenta siječe x-os iznosi točno 45° (ili $\pi/4$ radijana). Vidi sliku 2. Za funkciju $f(x) = 2^x$ odgovarajući kut iznosi približno 35° (tj. nešto manje od 45°), a za $f(x) = 3^x$ oko 48° (tj. nešto više od 45°). Vidi sliku 1.

[4] Ako ne vjerujete, provjerite. Na primjer, broj $10!$ jednak je *točno* broju sekundi u šest tjedana.

[5] Ova je brzina konvergencije naslućena tijekom razgovora drugog autora s Nevenom Elezovićem početkom 2018. g., nakon numeričkih eksperimenata provedenih s programom Jupyter.



Slika 2. Tangenta na graf funkcije $y = e^x$ *u točki* $(0, 1)$.

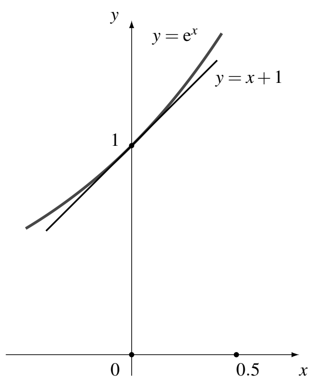
Budući da *tangenta* na graf funkcije $y = e^x$, povučenoj u točki $(0, 1)$ ima koeficijent smjera jednak 1 (prema tome, radi se o pravcu $y = x + 1$), možemo pisati

$$e^x \approx 1 + x$$

čim je iznos $|x|$ dovoljno malen, tj. $e^x - 1 \approx x$ za vrijednosti x blizu nule; vidi sliku 2. Točnije, vrijedi

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{kad } x \text{ teži prema nuli,} \tag{8}$$

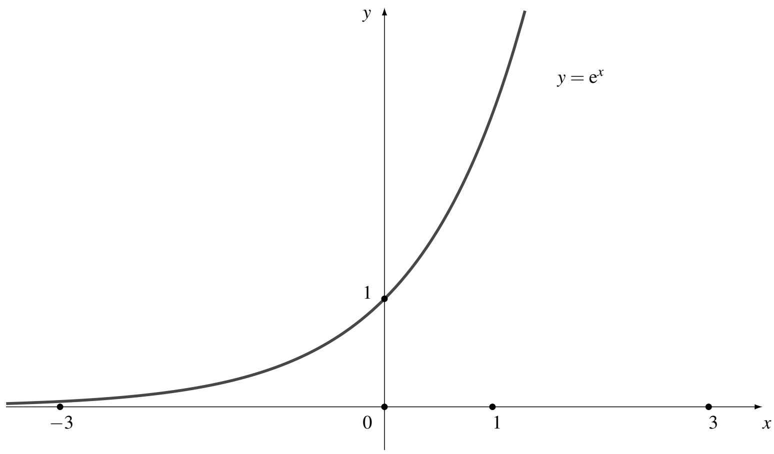
što po definiciji znači da omjer (ili kvocijent) funkcija koje se pojavljuju lijevo i desno od znaka $\sim$ teži prema vrijednosti 1 kada x teži prema nuli. Vidi slike 2 i 3.

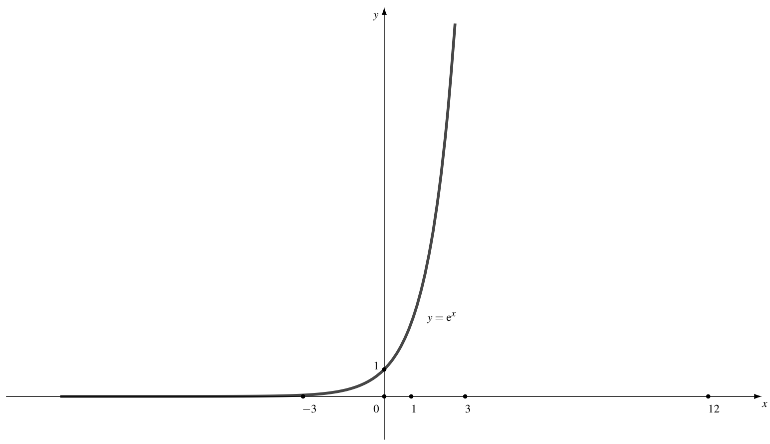


Slika 3. Ako prethodnu sliku 2 dvostruko zoomiramo u smjeru točke $(0, 1)$, *graf funkcije* $y = e^x$ *će se blizu točke* $(1, 0)$ *jedva razlikovati od tangente* $y = x + 1$.

Na slici 3 se vidi da je $e^x = 1 + x + o(x)$, gdje je $|o(x)|$ vrlo malo kad je x blizu nule. Vidjet ćemo kasnije da je iznos $|o(x)|$ toliko malen da $o(x)/x$ teži prema nuli kad x teži prema nuli, ili ekvivalentno tome, $(e^x - 1)/x$ teži prema 1 kad x teži prema nuli; vidi (8).

Pogledajte graf eksponencijalne funkcije $y = e^x$ na slici 4 (u obje inačice), kao i manje uobičajen prikaz na slici 7.

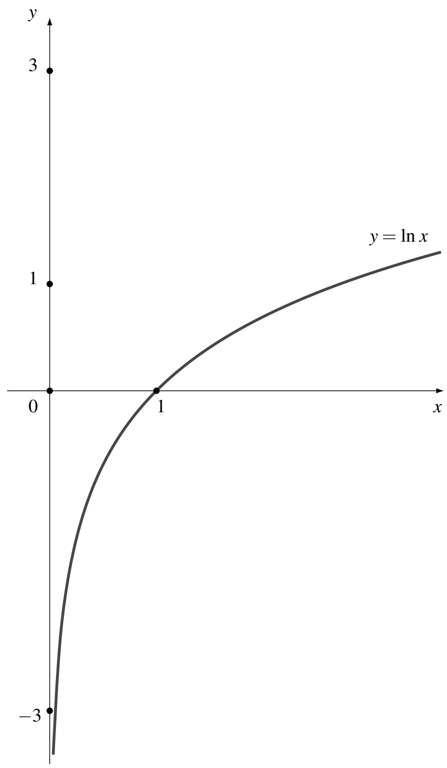




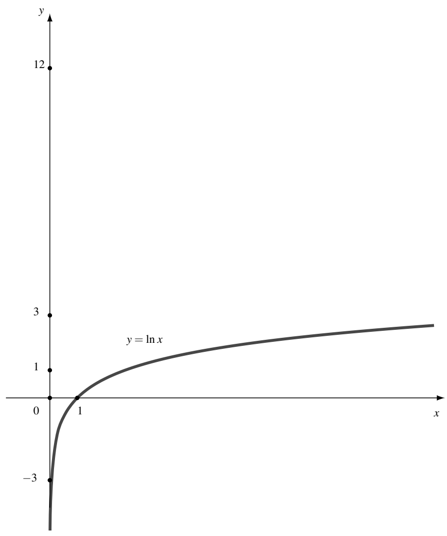
Slika 4. Vrijednosti $x = 12$ *odgovara broj* e^{12}*, koji iznosi više od* $160\,000$*. Drugim riječima, ako* $x = 1$ *interepretiramo kao* 1 *cm, onda će* e^{12} *iznositi više od 1.6 km.*

Vrijednosti $x = 25$ cm odgovara e^{25} cm, tj. (skoro dvostruko) više nego udaljenost do Mjeseca ($384\,000$ km); vidi sliku 4. A za $x = 43$ cm dobivamo e^{43} cm, što iznosi više nego udaljenost do najbliže zvijezde Proxima Centaury, koja je od nas udaljena 4.29 svjetlosnih godina. (Jedna *svjetlosna godina*, tj. udaljenost koju zraka svjetlosti prevali u praznom prostoru tijekom jedne godine, iznosi približno 10^{13} km.) Eksponencijalna funkcija $y = \mathrm{e}^x$ crta se obično kao na prvom grafu na slici 4, tj. blizu ishodišta, ali to je 'najnetipičniji' dio njezina grafa. Drugi graf na slici 4 predstavlja istu funkciju $y = \mathrm{e}^x$ kao i prvi, samo promatran iz četiri puta veće udaljenosti (tako da je jedinica četiri puta kraća). Kao što vidimo, funkcija $y = \mathrm{e}^x$ raste nevjerojatno brzo, tj. kažemo da raste 'eksponencijalnom brzinom'.

Vrijednosti od $x = 100$ odgovara e^{100}, tj. više od 10^{43}. Drugim riječima, ako $x = 1$ interepretiramo kao 1 cm, onda će za $x = 100$ (tj. na udaljenosti od samo 1 metar od ishodišta na x-osi), vrijednost e^{100} iznositi više od 10^{43} cm, tj. 10^{38} km, pa je $\mathrm{e}^{100} \approx 10^{25}$ svjetlosnih godina!



Slika 5. Graf funkcije $y = \ln x$ u blizini ishodišta koordinatnog sustava. Podsjetimo da je, po definiciji, jednakost $y = \ln x$ ekvivalentna s $x = e^y$.



Slika 6. Za funkciju $y = \ln x$, vrijednost $y = 12$ se dostiže za x koji iznosi više od $160\,000$. Drugim riječima, ako $x = 1$ interepretiramo kao 1 cm, onda će vrijednost $y = 12$ cm biti dostignuta za x koji je veći od 1.6 km.

Promatrajmo sada logaritamsku funkciju $y = \ln x$. Vrijednost $y = 25$ cm će tom funkcijom biti dostignuta za x koji je (skoro dvostruko) veći nego udaljenost do Mjeseca (384 000 km); vidi sliku 6. A vrijednost $y = 43$ cm bit će logaritamskom funkcijom dostignuta za x koji je veći od udaljenosti do najbliže zvijezde Proxima Centaury, tj. od 4.29 svjetlosnih godina. Logaritamska funkcija $y = \ln x$ crta se obično kao na slici 5, tj. blizu ishodišta, ali to je 'najnetipičniji' dio njena grafa. Graf prikazan na slici 6 predstavlja istu funkciju $y = \ln x$ kao i na slici 5, samo promatran iz četiri puta veće udaljenosti (tako da je jedinica četiri puta kraća). Kao što vidimo, funkcija $y = \ln x$ raste nevjerojatno sporo, tj. kažemo da raste 'logaritamskom brzinom' (mogli bismo reći – 'puževom brzinom').

Drugim riječima, ako $x = 1$ interepretiramo kao 1 cm, onda će vrijednost $y = 100$ (tj. razina od samo 1 metar iznad x-osi), biti logaritamskom funkcijom dostignuta za x koji je veći od 10^{43} cm, tj. od 10^{38} km ili više od 10^{25} svjetlosnih godina!

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $y = \mathrm{e}^x$ je funkcija $y = \ln x$.[7] Jednakost $y = \ln x$ je po definiciji ekvivalentna s jednakošću $x = \mathrm{e}^y$:

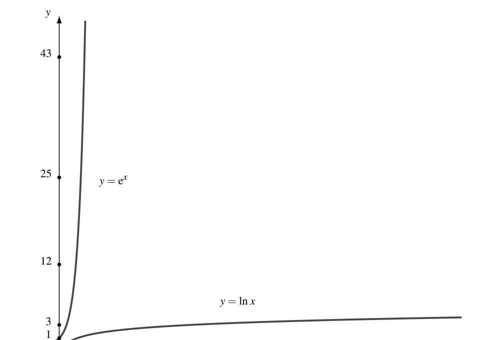
$$y = \ln x \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x = \mathrm{e}^y \quad \text{za } x > 0 \text{ i } y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Logaritamska funkcija $y = \ln x$ je jednoznačno određena time da se poništava za $x = 1$, a za svaki $x > 0$ je koeficijent smjera tangente u odgovarajućoj točki na grafu te funkcije jednak $1/x$. To znači da s porastom varijable x logaritamska funkcija raste sve sporije. Na primjer, za $x = 10$ brzina njena rasta (tj. koeficijent smjera tangente) je $k = 1/10$, a za $x = 100$ je samo $k = 1/100$, tj. graf funkcije je skoro vodoravan. Vidi slike 5, 6 i 7.

Pojam *logaritma* uveo je *John Napier* [čitaj 'Nepier'] (1550.–1617.), škotski matematičar, fizičar i astronom. Među svim logaritamskim funkcijama $y = \log_a x$, funkcija $\ln x := \log_{\mathrm{e}} x$ je jedina čiji graf siječe x-os pod kutem od $45°$ (tj. tangenta na graf funkcije $y = \ln x$ povučena u točki $x = 1$ siječe x-os pod kutem od $45°$).

Osnovno svojstvo logaritamske funkcije je da za sve strogo pozitivne brojeve x_1 i x_2 vrijedi

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad \text{i} \quad \ln 1 = 0.$$



Slika 7. Graf funkcije $y = \mathrm{e}^x$ je za $y \geqslant 12$ skoro vertikalan. Graf funkcije $y = \ln x$ je za $x \geqslant 12$ skoro vodoravan. U literaturi se grafovi ovih funkcija najčešće crtaju samo u blizni ishodišta, gdje su oni zapravo najnetipičniji! Pogledajte dodatna objašnjenja ispod slika 6 i 4.

---

[7] U literaturi na engleskom jeziku se prirodni logaritam $\ln x$ često označava s $\log x$.

Funkcija $f(x) = \mathrm{e}^x$, gdje je $x \in \mathbb{R}$, se može jednoznačno zadati na nekoliko načina.[8] Ta se funkcija u literaturi često zapisuje i kao $f(x) = \exp x$.

Funkcija $f(x) = \mathrm{e}^x$ *je jedina funkcija* $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *koja je diferencijabilna,*[9] $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ (*tj. koeficijent smjera tangente povučene na graf funkcije* f *u točki* $(0, 1)$ *je* $k = 1$) *i vrijedi*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \quad \text{za sve realne brojeve } x_1 \text{ i } x_2. \tag{10}$$

U prethodnoj tvrdnji, u jednadžbi (10), nepoznanica je *funkcija* f, te se zato ona zove *funkcionalnom jednadžbom.* Još jedan način zadavanja eksponencijalne funkcije je ovaj.

Funkcija $f(x) = \mathrm{e}^x$ *je jedina funkcija* $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *koja je diferencijabilna,* $f(0) = 1$ *i za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *je koeficijent smjera tangente povučene u bilo kojoj točki* $(x, f(x))$ *na grafu te funkcije jednak* $k = f(x)$.

Uvjet na tangentu koji se pojavljuje u gornjoj tvrdnji, može se kratko zapisati ovako:

$$f'(x) = f(x) \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

gdje je $f'(x)$ derivacija funkcije f u točki x. Ovo je također jednadžba u kojoj je nepoznanica funkcija f, dakle funkcionalna jednadžba. Ona se u ovom slučaju, budući da u njoj imamo i derivaciju nepoznate funkcije, zove *diferencijalnom jednadžbom.* Nije teško pokazati da su *sva* rješenja diferencijalne jednadžbe (11) oblika $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^x$, gdje je C bilo koja realna konstanta. Uz dodatni uvjet $f(0) = 1$ mora biti $C = 1$, pa je $f(x) = \mathrm{e}^x$ jedino rješenje problema $f'(x) = f(x)$ s početnim uvjetom $f(0) = 1$.

Na sličan način je moguće zadati i logaritamsku funkciju.

Funkcija $g(x) = \ln x$ *je jedina funkcija* $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *koja je diferencijabilna,* $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$ *i vrijedi*

$$g(x_1 x_2) = g(x_1) + g(x_2) \quad \text{za sve realne brojeve } x_1 \text{ i } x_2. \tag{12}$$

Još jedan način zadavanja logaritamske funkcije je ovaj.

Funkcija $g(x) = \ln x$ *je jedina funkcija* $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *koja je diferencijabilna,* $g(1) = 0$ *i za svaki* x *je koeficijent smjera tangente povučene u bilo kojoj točki* $(x, g(x))$ *na graf te funkcije jednak* $k = 1/x$.

Naravno, eksponencijalna i logaritamska funkcija f i g su jedna drugoj inverzne, tj. $f \circ g = id$ (na skupu $(0, \infty)$) i $g \circ f = id$ (na skupu $\mathbb{R}$). Drugim riječima, za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$ je $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y$. Ako je eksponencijalna funkcija $y = \mathrm{e}^x$ već definirana, onda ta ekvivalencija služi kao definicija logaritamske funkcije (u bazi e). Općenitije, za svaku bazu $a > 0$ takvu da je $a \neq 1$, vrijedi

$$y = a^x \quad \iff \quad x = \log_a y.$$

Ako je funkcija $y = a^x$ već definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$, onda je gornjom ekvivalencijom definirana logaritamska funkcija u bazi a.

---

[8] Ovdje nećemo navoditi najslabije moguće uvjete koji definiraju eksponencijalnu funkciju.

[9] Za funkciju kažemo da je *diferencijabilna* (ili derivabilna) ako u svakoj točki njena grafa možemo povući tangentu. Često se za takvu funkciju kaže da je *glatka*. Na pr., funkcija $h(x) = |x|$ nije diferencijabilna, jer njezin graf nema tangente u ishodištu (u ishodištu je šiljak).

Dodatak

Ovaj dodatak je namijenjen čitateljima koji poznaju temelje diferencijalnog računa. O asimptotici (točnije, o brzini konvergencije) niza $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ kad n teži u beskonačno govori nam sljedeća jednakost

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\dfrac{1}{n}}=\frac{\mathrm{e}}{2}, \tag{13}$$

koju ćemo dokazati malo niže. Posebno, to znači da je niz pod limesom u (13) omeđen, tj. sadržan u nekom intervalu $[A,B]$, gdje su A i B pozitivne konstante takve da je $A<B$. Time dobivamo nejednakost (6). Drugim riječima, za sve prirodne brojeve n vrijedi[10]

$$\mathrm{e}-\frac{B}{n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}-\frac{A}{n}. \tag{14}$$

Da bismo izračunali limes u (13), pokazat ćemo da vrijedi i više od toga:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\dfrac{1}{x}}=\frac{\mathrm{e}}{2}. \tag{15}$$

U dokazu jednakosti (15) ćemo dvaput upotrijebiti poznato *l'Hopitalovo pravilo*,[11] kao i činjenicu da je $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\dfrac{1}{x}}&=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right]}{-\dfrac{1}{x^2}}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)\end{aligned}$$

[10] Radi (13), konstante A i B možemo za dovoljno velike n odabrati po volji blizu broja $\mathrm{e}/2$, tako da je $A<\mathrm{e}/2<B$.

[11] L'Hopitalovo pravilo koristimo u sljedećem obliku. Pretpostavimo da su f i $g:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije takve da obje teže nuli kad x teži u beskonačno, te neka je $g'(x)\neq 0$ za sve $x>a$. Ako postoji $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, te su oba limesa međusobno jednaka: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Sličan rezultat vrijedi i za funkcije $f,g:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$.

$$
\stackrel{\text{l'H.}}{=} \mathrm{e}\cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)+\dfrac{1}{(x+1)^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}
= \frac{\mathrm{e}}{2}\cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}}{2}.
$$

U gornjem smo računu upotrijebili

$$
\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right),
$$

što se dobiva izravnom uporabom osnovnih pravila diferencijalnog računa.[12]

Godine 1737., Leonhard Euler je dokazao da je broj e iracionalan. Taj je dokaz (za razliku od dokaza iracionalnosti broja π) iznenađujuće jednostavan; vidi [1] ili [2].

Literatura

[1] RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.

[2] ŽELJKO HANJŠ, DARKO ŽUBRINIĆ, *Iracionalnost broja* e, članak u pripremi.

[3] *Jupyter*, `http://www.jupyter.org`

[4] DARKO ŽUBRINIĆ, *Interaktivni uvodu u Matematičku analizu*, pripremljen u programu Jupyter, `http://www.croatianhistory.net/mat/jupyter/mat1.html`

[12] Na primjer, možemo pisati $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$, pa onda derivirati.