# ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2019. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/279.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

## A) Zadatci iz matematike

**3707.** Ako su $a$ i $b$ cijeli brojevi takvi da je $8a^2+1=b^2$, dokaži da je njihov umnožak djeljiv s $3$.

**3708.** U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=2.$$

**3709.** Matematičkom indukcijom dokaži da ako je $n$ prirodan broj, tada je $5^n \equiv 1+4n \pmod{16}$.

**3710.** Nađi sva rješenja sistema jednadžbi

$$\log^2 x+\log^2 y=7$$
$$\log x-\log y=2.$$

**3711.** Može li funkcija $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin\lfloor x\rfloor$, biti periodička?
($\lfloor x\rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od $x$.)

**3712.** Duljine stranica trokuta su $a$, $b$, $c$, dok je visina na stranicu $a$ jednaka $h_a$. Dokaži nejednakost

$$a^2+4h_a^2\leqslant(b+c)^2.$$

**3713.** Ako je $G$ težište tetraedra $OABC$ kod kojeg je $\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=\sphericalangle AOB=90^\circ$, dokaži

$$|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2=11|GO|^2.$$

**3714.** Ako je

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=7,$$

izračunaj $\sin^2 2\alpha$.

**3715.** Ako za površinu trokuta vrijedi

$$P=\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$$

dokaži $\alpha=45^\circ$ ili $\alpha=135^\circ$.

**3716.** Visine trokuta $ABC$ povučene iz vrhova $A$ i $B$ leže redom na pravcima $x+5y-3=0$ i $x+y-1=0$, a stranica $\overline{AB}$ na pravcu $x+3y-1=0$. Nađi jednadžbe pravaca na kojima leže stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$.

**3717.** Dokaži da za svaki prirodan broj $n$ vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant 3.$$

**3718.** Ravninski lik površine $5$ podijeljen je na $9$ manjih likova od kojih svaki ima površinu $1$. Dokaži da postoje dva manja lika koji imaju zajedničku površinu veću ili jednaku $\frac{1}{9}$.

**3719.** Valjak je upisan u sferu radijusa $R$. Kut između najveće dužine valjka i njegove baze je $\alpha$. Koliki je volumen valjka?

**3720.** Koliko ima uređenih parova $(m,n)$ cijelih brojeva za koje je $mn>0$ i

$$m^3+n^3+99mn=33^3?$$

## B) Zadatci iz fizike

**OŠ – 458.** Srce zdravog čovjeka u mirovanju kuca frekvencijom od oko 70 otkucaja u minuti. U slučaju velikog napora taj se broj može udvostručiti. Prilikom svakog otkucaja srce obavi rad jednak onome koji se obavi kad se udžbenik za fiziku mase 200 grama podigne metar visoko. Kolika je snaga srca u mirovanju, a kolika kad čovjek naporno radi?

**OŠ – 459.** Ivan i Hrvoje žive u kućama koje su udaljene 5.4 kilometra. Obojica su istovremeno krenuli iz svojih kuća jedan prema drugome. Ivan je hodao brzinom 4.8 km/h, a Hrvoje brzinom 4.2 km/h. Hrvojev pas je krenuo kad i oni. Pas trči brzinom 8 km/h od Hrvoja do Ivana, pa opet natrag do Hrvoja i tako trči od jednog do drugog sve dok se oni ne sretnu. Koliki će put pretrčati pas?

**OŠ – 460.** Masa 100 metara metalne žice iznosi 4 kilograma. Njen je otpor 40 $\Omega$.

Izračunaj električni otpor tog metala ako mu je gustoća $8000\ \mathrm{kg/m^3}$.

**OŠ – 461.** Akvarij je dugačak 80 cm i širok 50 cm. Prije nego se u njega stave tropske ribice vodu u njemu treba zagrijati na $24\ ^\circ\mathrm{C}$. Početna temperatura vode iznosila je $16\ ^\circ\mathrm{C}$. Grijač snage 6 kilovata je ugrijao vodu na željenu temperaturu za 896 sekundi. Kolika je dubina vode u akvariju? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$, a njezin specifični toplinski kapacitet je $4200\ \mathrm{J/kg\ ^\circ C}$.

**1707.** Odredi aktivnost (broj raspada u sekundi) jednog grama prirodnog uranija. Atomska težina uranija je $238.03\ \mathrm{g/mol}$. Izotopski sastav i vremena poluraspada u godinama su

| | | |
|---|---|---|
| $^{238}\mathrm{U}$ | $99.2745\,\%$ | $4.468 \cdot 10^9$ |
| $^{235}\mathrm{U}$ | $0.72\,\%$ | $7.038 \cdot 10^8$ |
| $^{234}\mathrm{U}$ | $0.0055\,\%$ | $2.455 \cdot 10^5$ |

**1708.** Na površini Mjeseca izmjeren je prosječni tlak $3 \cdot 10^{-10}$ Pa. Ako je radijus mjeseca 1737 km, a ubrzanje sile teže na površini $1.62\ \mathrm{m/s^2}$, odredi masu cjelokupne "atmosfere" Mjeseca.

**1709.** Tijelo ubrzava jednoliko, tako da prevali 1 metar u 2.5 s, a u sljedećih 2.5 s još dva metra. Koliko je ubrzanje i početna brzina?

**1710.** Dalekovidna osoba koristi naočale jačine $+2.25$ dpt za čitanje. Na kojoj će minimalnoj daljini od očiju osoba jasno vidjeti tekst s naočalama, ako je najmanja daljina oštrog vida bez naočala 80 cm?

**1711.** Jupiter i Saturn naći će se 21. 12. 2020. međusobno vrlo blizu na nebu (to zovemo konjunkcija dvaju planeta). Ako su duljine velikih poluosi putanja 5.203 a.j. za Jupiter i 9.539 a.j. za Saturn, odredi kada će se njihovi položaji sljedeći puta poklopiti (uz zanemarivanje ekscentričnosti putanja i razlike položaja Zemlje u oba slučaja).

**1712.** Dva Ohmska otpornika su spojena serijski u strujni krug. Jouleova snaga veća je 8 % na otporniku s 10 Ω većim otporom. Odredi otpor oba otpornika.

**1713.** Ionski izvor akceleratora protona daje struju $100\ \mu\mathrm{A}$. Akcelerator ubrzava protone do kinetičke energije 150 keV. Kolika je snaga snopa? Koliko iona u sekundi daje snop?

## C) Rješenja iz matematike

**3679.** *Riješi sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 22 \\ xy &= 4. \end{aligned}$$

*Rješenje.*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x + y &= 22 \\ (x+y)^2 - 2xy + x + y &= 22 \\ (x+y)^2 + (x+y) - 30 &= 0 \\ (x+y)_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 30}}{2}, \\ (x+y)_1 = 5, \quad (x+y)_2 &= -6. \end{aligned}$$

Iz Vièteovih formula za

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 4 \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4 \quad \text{i} \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 1.$$

Iz

$$\begin{aligned} x + y &= -6 \\ xy &= 4 \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 4 &= 0 \\ x_{3,4} &= -3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$x_3 = -3 - \sqrt{5}, \quad x_4 = -3 + \sqrt{5} \quad \text{i}$$

$$y_3 = -3 + \sqrt{5}, \quad y_4 = -3 - \sqrt{5}.$$

Rješenja sustava jednadžbi su: $(1,4)$, $(4,1)$, $(-3-\sqrt{5}, -3+\sqrt{5})$, $(-3+\sqrt{5}, -3-\sqrt{5})$.

*Borna Cesarec (1), Srednja škola Krapina, Krapina*

**3680.** *Nađi sve trojke pozitivnih cijelih brojeva* $(a, b, c)$ *takvih da vrijedi*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

*Rješenje.* Ne mijenjajući općenitost možemo staviti $a \geqslant b \geqslant c$. Tada je $2 \leqslant \left(1+\frac{1}{c}\right)^3$ tj. $c \leqslant 3$.

Imamo tri slučaja.

1° Za $c=1$ je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1$, što ne zadovoljava.

2° Za $c=2$ je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{3}$, što povlači $\frac{4}{3} \leqslant \left(1+\frac{1}{b}\right)^2$ tj. $b<7$. Kako je $1+\frac{1}{a}>1$ imamo $1+\frac{1}{b}<\frac{4}{3}$ tj. $b>3$. Za $b=4,\ 5,\ 6$ dobivamo trojke $(7,6,2)$, $(9,5,2)$, $(15,4,2)$.

3° Za $c=3$ je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}$. Slično dobivamo $b<5$ i $b \geqslant 3$ tj. $(8,3,3)$, $(5,4,3)$.

*Oliver Kukas (3),*
*Gimnazija A. G. Matoša, Zabok*

**3681.** *Odredi sva cjelobrojna rješenja $x$, $y$, $z$ jednadžbe*

$$(x-y-1)^3+(y-z-2)^3+(z-x+3)^3=18.$$

*Rješenje.* Uvedimo supstituciju $A=x-y-1$, $B=y-z-2$ i $C=z-x+3$, vrijedi

$$\left.\begin{aligned} A^3+B^3+C^3&=18\\ A+B+C&=0. \end{aligned}\right\}$$

Odavde je:

$$A^3+B^3-(A+B)^3=18$$

tj.

$$AB(A+B)=-6.$$

Budući da su sva tri broja u umnošku na lijevoj strani cijela, jedan od njih sigurno mora biti ili 1 ili $-1$ da bismo dobili kao rezultat $-6$. Razlikujemo slučajeve:

1° $A=1 \implies B(B+1)=-6 \implies B^2+B+6=0 \implies B \notin \mathbb{R}$

2° $A=-1 \implies B(B-1)=6 \implies B^2-B-6=0 \implies B_1=-2,\ B_2=3$

3° $B=1 \implies A(A+1)=-6 \implies A \notin \mathbb{R}$

4° $B=-1 \implies A(A-1)=6 \implies A_1=-2,\ A_2=3$

5° $\left.\begin{aligned} A+B&=1\\ AB&=-6 \end{aligned}\right\} \implies B=1-A \implies$
$A(1-A)=-6 \implies A^2-A-6=0 \implies A_1=3,\ B_1=-2;\ A_2=-2,\ B_2=3$

6° $\left.\begin{aligned} A+B&=-1\\ AB&=6 \end{aligned}\right\} \implies B=-1-A \implies$
$A(-1-A)=-6 \implies A^2+A+6=0 \implies A \notin \mathbb{R}$

Dakle, $(A,B,C) \in \{(-2,-1,3),(-2,3,-1),(-1,-2,3),(-1,3,-2),(3,-2,-1),(3,-1,-2)\}$.

Vraćanjem supstitucije dobivamo linearne sustave jednadžbi:

$$\begin{aligned} x-y-1&=-2\\ y-z-2&=-1\\ \underline{z-x+3}&\underline{{}=3}\\ x-y&=-1\\ y-z&=1\\ \underline{z-x}&\underline{{}=0}\\ z&=x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y&=-1\\ y-x&=1 \quad \text{tj.} \quad (t,t+1,t), \quad t\in\mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y-1&=-2\\ y-z-2&=3\\ \underline{z-x+3}&\underline{{}=-1}\\ x-y&=-1\\ y-z&=5\\ \underline{z-x}&\underline{{}=-4}\\ z&=x-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y&=-1\\ y-x&=1 \quad \text{tj.} \quad (t,t+1,t-4), \quad t\in\mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y-1&=-1\\ y-z-2&=-2\\ \underline{z-x+3}&\underline{{}=3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y&=0\\ y-z&=0\\ \underline{z-x}&\underline{{}=0} \quad \text{tj.} \quad (t,t,t), \quad t\in\mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} x-y-1=-1 \\ y-z-2=3 \\ \underline{z-x+3=-2} \\ \quad x-y=0 \\ \quad y-z=5 \\ \quad \underline{z-x=-5} \end{array}$$

$$y=x \quad \text{tj.} \quad (t,t,t-5), \quad t\in\mathbb{Z};$$

$$\begin{array}{l} x-y-1=3 \\ y-z-2=-2 \\ \underline{z-x+3=-1} \\ \quad x-y=4 \\ \quad y-z=0 \\ \quad \underline{z-x=-4} \\ \qquad z=y \end{array}$$

$$x-y=4$$
$$y-x=-4 \quad \text{tj.} \quad (t,t-4,t-4), \quad t\in\mathbb{Z};$$

$$\begin{array}{l} x-y-1=3 \\ y-z-2=-1 \\ \underline{z-x+3=-2} \\ \quad x-y=4 \\ \quad y-z=1 \\ \quad \underline{z-x=-5} \\ \qquad x=t \end{array}$$

$$y=t-4$$
$$z=t-5 \quad \text{tj.} \quad (t,t-4,t-5), \quad t\in\mathbb{Z}.$$

Prema tome, sva cjelobrojna rješenja dane jednadžbe možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\{&(t,t+1,t),(t,t+1,t-4),(t,t,t),\\ &(t,t,t-5),(t,t-4,t-4),\\ &(t,t-4,t-5):t\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3682.** *Dokaži da za pozitivne brojeve $a$, $b$, $c$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant ab+bc+ca.$$

*Rješenje.* Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine imamo:

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc &\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}\\ &=3ab\\ \frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca &\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a}\cdot ca}\\ &=3bc\\ \frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab &\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{b}\cdot ab}\\ &=3ac.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+ab+bc+ca\\ &\quad\geqslant 3(ab+bc+ca)\\ &\quad\Longrightarrow\ \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geqslant ab+bc+ca.\end{aligned}$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3683.** *Odredi sve susjedne proste brojeve $p$ i $q$ takve da je $p^2-pq+q^2$, također, prosti broj. (Prosti brojevi $p$ i $q$ su susjedni ako je $|p-q|=2$.)*

*Rješenje.* Bez smanjenja općenitosti stavimo neka je $p>q$. Za prva dva susjedna prosta broja $p=5$, $q=3$ tvrdnja vrijedi jer je $p^2-pq+q^2=19$ prost broj.

Pokažimo da je to ujedno i jedini par susjednih prostih brojeva s traženim svojstvom.

Svaki prosti broj veći od 3 možemo zapisati u obliku $3k\pm1$. U našem slučaju mora biti $p=3k+1$, $q=3k-1$. No, sada je:

$$\begin{aligned}&p^2-pq+q^2\\ &\quad=(3k+1)^2-(3k+1)(3k-1)+(3k-1)^2\\ &\quad=9k^2+3=3(3k^2+1),\end{aligned}$$

što je očito složen broj.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3684.** *Dani su brojevi* $a_1, \ldots, a_n \in [2,3]$. *Dokaži nejednakost*

$$\log_{a_1}(5a_2-6)+\ldots+\log_{a_{n-1}}(5a_n-6)$$
$$+\log_{a_n}(5a_1-6) \geqslant 2n.$$

*Rješenje.* Za bilo koji $a_k \in [2,3]$, $k=1,2,\ldots,n$ vrijedi $a_k^2 \leqslant 5a_k-6$ (jer je rješenje kvadratne nejednadžbe $x^2-5x+6 \leqslant 0$ segment $x \in [2,3]$). Kako su baze logaritama brojevi veći od 1 vrijedi:

$$\log_{a_{k-1}} a_k^2 \leqslant \log_{a_{k-1}}(5a_k-6)$$

za svaki $a_k \in [2,3]$, $k=1,2,\ldots,n$.

Ako označimo lijevu stranu dane nejednakosti s $L$ možemo pisati:

$$L \geqslant \log_{a_1} a_2^2+\log_{a_2} a_3^2+\ldots+\log_{a_{n-1}} a_n^2+\log_{a_n} a_1^2$$
$$=2\left(\frac{\log a_2}{\log a_1}+\frac{\log a_3}{\log a_2}+\ldots+\frac{\log a_n}{\log a_{n-1}}+\frac{\log a_n}{\log a_1}\right).$$

Kako je svaki od pribrojnika u ovoj zagradi pozitivan broj, možemo primijeniti A-G nejednakost:

$$L \geqslant 2n\sqrt[n]{\frac{\log a_2}{\log a_1}\cdot\frac{\log a_3}{\log a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\log a_n}{\log a_{n-1}}\cdot\frac{\log a_n}{\log a_1}}$$
$$=2n.$$

Dakle, vrijedi $L \geqslant 2n$ i jednakost se postiže u dva slučaja:

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=2$$

i

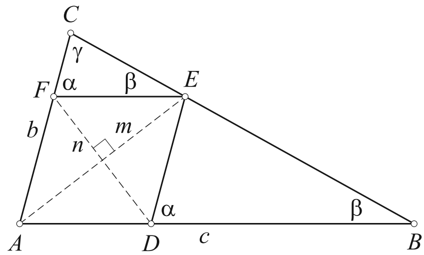
$$a_1=a_2=\ldots=a_n=3.$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3685.** *Romb ADEF je upisan u trokut ABC tako da imaju zajednički vrh A i točka E dijeli stranicu* $\overline{BC}$ *na dužine čije su duljine u omjeru* $|EC|:|BE|=2:3$. *Odredi duljine stranica trokuta koje imaju zajednički vrh A ako su duljine dijagonala romba* $m$ *i* $n$.

*Rješenje.* Uz oznake kao na slici vidimo $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ pa imamo:

$$\frac{c}{|EF|}=\frac{|BC|}{|CE|}$$
$$\Longrightarrow \frac{c}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}}=\frac{|BE|+|CE|}{|CE|}$$
$$\Longrightarrow \frac{2c}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{3}{2}+1$$
$$\Longrightarrow c=\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}. \qquad (1)$$




Također je

$$\frac{c}{|EF|}=\frac{b}{|FC|}$$
$$\Longrightarrow \frac{2c}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{b}{b-\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}}$$
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{5}{2}=\frac{2b}{2b-\sqrt{m^2+n^2}}$$
$$\Longrightarrow 10b-5\sqrt{m^2+n^2}=4b$$
$$\Longrightarrow b=\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}. \qquad (2)$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

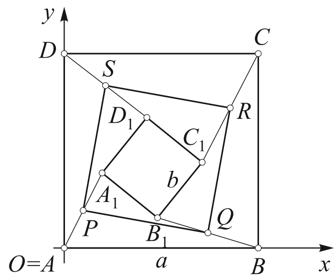
**3686.** *U ravnini su dana dva jednakoorijentirana kvadrata ABCD i* $A_1B_1C_1D_1$. *Neka su* $P$, $Q$, $R$, $S$ *polovišta dužina* $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$. *Dokaži da je PQRS kvadrat.*

*Rješenje.* Neka je kvadrat $ABCD$ u kompleksnoj ravnini tako da je $A=0$. Tada je

$$z_A=z_0=0$$
$$z_B=a$$
$$z_C=a(1+i)$$
$$z_0=ai.$$

Vrhu $A_1$ pripada kompleksan broj $z_{A_1}$. Tada je $z_{B_1}-z_{A_1}=be^{i\varphi}$ za stranicu kvadrata $A_1B_1C_1D_1$ i neki kut $\varphi$. Tada je

$$z_{B_1}=z_{A_1}+be^{i\varphi}$$
$$z_{C_1}-z_{B_1}=ibe^{i\varphi} \Longrightarrow z_{C_1}=z_{A_1}+(1+i)be^{i\varphi}$$
$$z_{D_1}=z_{A_1}+(z_{D_1}-z_{A_1})=z_{A_1}+(z_{C_1}-z_{B_1})$$
$$=z_{A_1}+ibe^{i\varphi}.$$




Sada je

$$z_P = \frac{z_A + z_{A_1}}{2} = \frac{z_{A_1}}{2}$$

$$z_Q = \frac{z_B + z_{B_1}}{2} = \frac{a + z_{A_1} + be^{i\varphi}}{2}$$

$$z_R = \frac{z_C + z_{C_1}}{2} = \frac{a(1+i) + z_{A_1} + b(1+i)e^{i\varphi}}{2}$$

$$z_S = \frac{z_D + z_{D_1}}{2} = \frac{a_i + z_{A_1} + ibe^{i\varphi}}{2}.$$

Nadalje,

$$\left.\begin{aligned} z_{PQ} = z_Q - z_P = \frac{a + be^{i\varphi}}{2} \\ z_{SR} = z_R - z_S = \frac{a + be^{i\varphi}}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \ |z_{PQ}| = |z_{SR}|$$

tj. $|PQ| = |SR|$ i $PQ \| SR$.

$$z_{QR} = z_R - z_Q = \frac{a + be^{i\varphi}}{2} \cdot i$$

odakle slijedi $|z_{QR}| = |z_{PQ}|$ tj. $|QR| = |PQ|$ i $QR \perp PQ$.

Dakle, $PQRS$ je kvadrat.

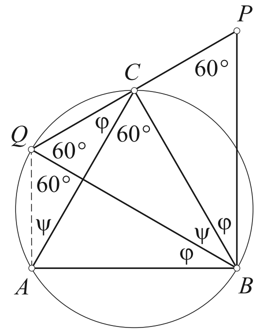
*Ur.*

**3687.** *Dani su jednakostranični trokuti $ABC$ i $BPQ$ takvi da stranica $\overline{PQ}$ sadrži vrh $C$. Dokaži jednakost*

$$|BP|^2 = |AB|^2 + |PC| \cdot |QC|.$$

*Rješenje.* Točke $A$, $B$, $C$, $Q$ su konciklične (leže na istoj kružnici) jer su im kutovi $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BQC$ jednaki kao kutovi nad istom tetivom $\overline{BC}$. Kako su kutovi nad istom tetivom jednaki, lako vidimo da ih možemo označiti kao na slici. Još je $\varphi + \psi = 60^\circ$ i očito je $\triangle ABQ \cong \triangle BCP$ pa je

$$|AQ| = |PC|. \qquad (1)$$




Primjenom Ptolemejevog poučka na tetivni četverokut $ABCQ$ redom imamo:

$$|AB| \cdot |CQ| + |BC| \cdot |AQ| = |AC| \cdot |BQ|$$

$$|AB| \cdot |QC| + |AB| \cdot |AQ| = |AB| \cdot |BP|$$

$$|QC| + |AQ| = |BP|.$$

Kvadriranjem ove jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} |BP|^2 &= |QC|^2 + 2|QC||AQ| + |AQ|^2 \\ &= \{\text{kosinusov poučak za } \triangle ACQ\} \\ &= |AC|^2 + 2|QC||AQ| \cos 120^\circ + 2|QC||AQ| \\ &= |AB|^2 - |QC||AQ| + 2|QC||AQ| \\ &\overset{(1)}{=} |AB|^2 + |PC||QC|, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3688.** *Dane su točke $A$ i $B$ na promjeru kružnice sa središtem $C$, tako da je $|CA| = |CB| = t$. Tetiva $\overline{DE}$ kružnice sadrži točku $A$. Dokaži da je zbroj kvadrata duljina stranica trokuta $BDE$ jednak $6R^2 + 2t^2$, gdje je $R$ polumjer kružnice.*

*Rješenje.* Najprije, prema potenciji točke $A$ obzirom na kružnicu, uočimo da vrijedi:

$$|AD| \cdot |AE| = |AF| \cdot |AG|$$

tj.

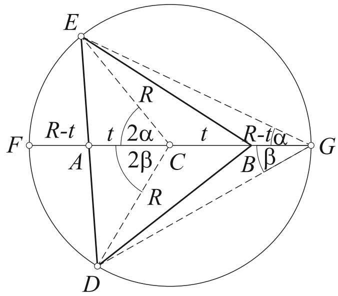
$$|AD| \cdot |AE| = (R - t)(R + t)$$

$$|AD| \cdot |AE| = R^2 - t^2. \qquad (1)$$

Primjenjujući kosinusov poučak redom na trokute $BCE$, $BCD$, $ACE$ i $ACD$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= R^2 + t^2 - 2tR\cos(180^\circ - 2\alpha) \\ &= R^2 + t^2 + 2tR\cos 2\alpha \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= R^2 + t^2 - 2tR\cos(180^\circ - 2\beta) \\
&= R^2 + t^2 + 2tR\cos 2\beta \qquad (3) \\
|AE|^2 &= R^2 + t^2 - 2tR\cos 2\alpha \qquad (4) \\
|AD|^2 &= R^2 + t^2 - 2tR\cos 2\beta. \qquad (5)
\end{aligned}$$




Sada je

$$\begin{aligned}
&|BE|^2 + |BD|^2 + |ED|^2 \\
&= R^2 + t^2 + 2tR\cos 2\alpha \\
&\quad + R^2 + t^2 + 2tR\cos 2\beta + (|EA| + |AD|)^2 \\
&= 2R^2 + 2t^2 + 2tR\cos 2\alpha + 2tR\cos 2\beta \\
&\quad + |EA|^2 + 2|EA||AD| + |AD|^2 \\
&\overset{(1)}{=} 2R^2 + 2t^2 + 2tR\cos 2\alpha + 2tR\cos 2\beta \\
&\quad + R^2 + t^2 - 2tR\cos 2\alpha \\
&\quad + 2R^2 - 2t^2 + R^2 + t^2 - 2tR\cos 2\beta \\
&= 6R^2 + 2t^2,
\end{aligned}$$

što se i tvrdilo.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3689.** *Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nasuprotni im kutovi, dokaži nejednakost*

$$\left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\left(1 - \frac{b}{c+a}\right)\left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \leqslant \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

*Kada vrijedi jednakost?*

*Prvo rješenje.* Najprije ćemo koristiti Malweidove formule:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

Dokazat ćemo jednu od njih, npr. prvu:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{c} &= \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta}{2R\sin\gamma} \\
&= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} \\
&= \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}} \\
&= \frac{\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{\cdot}\cos\dfrac{\gamma}{2}} \\
&= \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}.
\end{aligned}$$

Sada transformiramo lijevu stranu dane nejednakosti:

$$\begin{aligned}
L &= \left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\left(1 - \frac{b}{c+a}\right)\left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \\
&= \left(1 - \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}\right)\cdot\left(1 - \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}\right) \\
&\quad\cdot\left(1 - \frac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right) \\
&= \frac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}} \\
&\quad\cdot\frac{\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2} - \sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\left(90^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}-\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}-\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}$$

$$\cdot\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Pogledajmo nazivnik izraza (1):

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\gamma+\sin\alpha}{2\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\alpha+\sin\gamma)}{8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\overset{\text{A-G}}{\geqslant}\frac{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\cdot2\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}\cdot2\sqrt{\sin\alpha\sin\gamma}}{8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$=8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Iskoristimo dobiveno u izrazu (1) pa je očito

$$L\leqslant\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

čime je tražena nejednakost dokazana.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, tj. za jednakostraničan trokut.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

*Drugo rješenje.* Iz $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ i analogno za $\beta$ i $\gamma$ imamo

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{1}{8}(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2}{(abc)^2}.$$

Dana nejednakost ekvivalentna je sljedećoj

$$\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8abc}$$

$$\geqslant\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\iff (b+c)(c+a)(a+b)\geqslant 8abc,$$

a ova nejednakost vrijedi:

$$(b+c)(c+a)(a+b)\geqslant 2\sqrt{bc}\cdot2\sqrt{ca}\cdot2\sqrt{ab}$$

$$=8abc.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

*Ur.*

**3690.** *Dokaži da za svaki realan broj $x$ vrijedi jednakost*

$$\sin 3x = 4\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

*Rješenje.* Imamo

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x\\ &= \sin x(2\cos^2 x + \cos 2x)\\ &= \sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)\\ &= 4\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)\\ &\quad\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right).\end{aligned}$$

Zbog

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

i

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

vrijedi dana jednakost.

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3691.** *Nađi sva rješenja sustava jednadžbi*

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \ldots = \frac{x_{1010}}{x_{1010}+2019}$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1010} = 2020.$$

*Rješenje.* Najprije označimo

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \ldots = \frac{x_{1010}}{x_{1010}+2019} = t.$$

Sada iz

$$\frac{x_k}{x_k + (2k-1)} = t \implies x_k = \frac{t}{1-t}(2k-1),$$
$$k = 1, 2, \ldots, 1010.$$

Uvrstimo li to u drugu jednadžbu zadanog sustava imamo:

$$\begin{aligned}&\frac{t}{1-t}(1 + 3 + \ldots + 2019) = 2020\\ \implies &\frac{t}{1-t}[(1+2019) + (3+2017)\\ &\quad + \ldots + (1009+1011)] = 2020\\ \implies &\frac{t}{1-t}\cdot 505\cdot 2020 = 2020 \ /\ : 2020\\ \implies &505t = 1 - t \implies t = \frac{1}{506}.\end{aligned}$$

Iz gore dobivene jednakosti je

$$x_k = \frac{2k-1}{505}, \quad k = 1, 2, \ldots, 1010.$$

Dakle, rješenja sustava možemo zapisati kao:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{1010}) = \left(\frac{1}{505}, \frac{3}{505}, \ldots, \frac{2019}{505}\right).$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

**3692.** *Neka su $ABCD$ i $FGHE$ nasuprotne strane kocke i $\overline{AF}$ je njezin brid duljine $|AF| = 2$.*

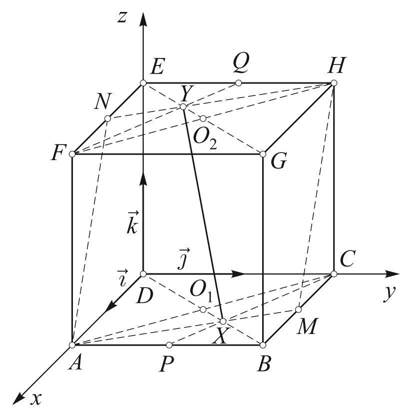
*a) Ako su $M$ i $N$ polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{EF}$, kolika je površina četverokuta $AMHN$.*

*b) Neka su $P$ i $Q$ polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{HE}$. Pravci $AM$ i $CP$, te $HN$ i $FQ$ sijeku se redom u točkama $X$ i $Y$. Izračunaj duljinu dužine $\overline{XY}$.*

*Prvo rješenje.* Smjestimo danu kocku u koordinatni sustav kao na slici. Njeni bridovi razapeti su jediničnim vektorima i to tako da je

$$\overrightarrow{DA} = 2\vec{\imath}, \quad \overrightarrow{DC} = 2\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{DE} = 2\vec{k},$$

jer je brid kocke duljine 2.




a) Računamo:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH} = -\vec{\imath} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EN}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NF}+\overrightarrow{FA}=\vec{\imath}-2\vec{k},$$

pa je očito $AM\|HN$ i $|AM|=|HN|$, te $MH\|NA$ i $|MH|=|NA|$ (kolinearni vektori jednakog modula).

Još je:

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}=-2\imath+2\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=2\vec{\jmath}-2\vec{k}$$

i $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{NM}=0$ tj. $AH\perp NM$.

Prema tome, četverokut $AMHN$ je romb i površina mu iznosi:

$$P=|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AN}|=\left\|\begin{matrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-1&2&0\\-1&0&2\end{matrix}\right\|$$
$$=|4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}|=2\sqrt{6}.$$

b)

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GY}\qquad(*)$$

Koristimo činjenicu da je točka $X$ težište jednakokračnog (pravokutnog) trokuta $ABC$, a točka $Y$ težište jednakokračnog (pravokutnog) trokuta $EFH$.

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{O_1B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow\ \overrightarrow{XB}=\frac{2}{3}\vec{\imath}+\frac{2}{3}\vec{\jmath}\qquad(1)$$

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}=-2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow\ \overrightarrow{GY}=\overrightarrow{GO_2}+\overrightarrow{O_2Y}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{O_2E}$$
$$=-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\frac{1}{3}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath})$$
$$=-\frac{4}{3}\vec{\imath}-\frac{4}{3}\vec{\jmath}.\qquad(2)$$

Sada je:

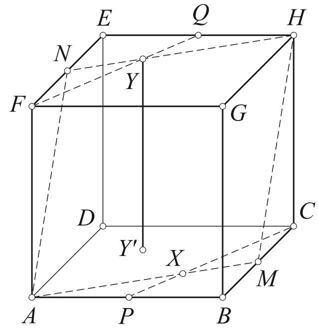
$$\overrightarrow{XY}\overset{*}{=}\frac{2}{3}\vec{\imath}+\frac{2}{3}\vec{\jmath}+\vec{k}-\frac{4}{3}\vec{\imath}-\frac{4}{3}\vec{\jmath}$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{2}{3}\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

te konačno:

$$|\overrightarrow{XY}|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+4}=\frac{2}{3}\sqrt{11}.$$

*Oliver Kukas (3), Zabok*

*Drugo rješenje.* Neka je $|AB|=2$.




a) Po Pitagorinu poučku je $AMHN$ romb sa stranicom duljine $\sqrt{5}$. Njegova površina je

$$\frac{1}{2}|AH|\cdot|MN|=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{6}.$$

b) Neka je $Y'$ ortogonalna projekcija od $Y$ na $ABCD$. Tada je $X$ sjecište težišnica $\overline{AM}$ i $\overline{CP}$ trokuta $ABC$. Dakle

$$|BX|=\frac{1}{3}|BD|=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Radi simetrije je $|DY'|=|BX|$ pa je $|XY'|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Po Pitagorinu poučku je

$$|XY|=\sqrt{|XY'|^2+|YY'|^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+2^2}=\frac{2\sqrt{11}}{3}.$$

*Ur.*

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 450.** *Strijela mase 120 grama je izbačena iz luka na visini h. Njena je ukupna energija u trenutku izlijetanja iznosila 151.8 džula. Meta se nalazi na visini 2h. Tijekom leta strijela izgubi 20 posto svoje kinetičke energije. Na kojoj se visini nalazi meta ako je strijela u nju udarila s ukupnom energijom od 123.6 džula? Koliko je meta udaljena od strijelca ako strijela po metru udaljenosti gubi 0.6 džula kinetičke energije?*

*Rješenje.*

$m = 0.12$ kg

$E_{\text{izlijetanja}} = 151.8$ J

$E_{\text{udarca}} = 123.6$ J

$E_{k_2} = 0.8E_k$

$\dfrac{E_{\text{gubitak}}}{m} = 0.6\ \dfrac{\text{J}}{\text{m}}$

$h_{\text{meta}} = 2h$

$h_{\text{meta}} =?$

$s =?$

$E_p = mgh$

$E_{\text{udarca}} = 2mgh + E_{k_2}$

$$123.6\ \text{J} = 2mgh + 0.8E_k \qquad (1)$$

$$E_{\text{izlijetanja}} = 151.8\ \text{J} = mgh + E_k \ /\ \cdot(-0.8)$$

$$-121.44\ \text{J} = -0.8mgh - 0.8E_k. \qquad (2)$$

Zbrajanjem jednadžbi (1) i (2) dobije se:

$$2.16\ \text{J} = 1.2mgh$$

$$h = \frac{2.16\ \text{J}}{1.2mg} = 1.5\ \text{m}$$

$$h_{\text{meta}} = 3\ \text{m}$$

$$E_k = 150\ \text{J}$$

$$E_{k_2} = 120\ \text{J}$$

$$\Delta E_k = E_k - E_{k_2} = 30\ \text{J}$$

$$\Delta E_k = \frac{E_{\text{gubitak}}}{m} \cdot s$$

$$s = \frac{\Delta E_k}{0.6}\ \text{J/m} = 50\ \text{m}.$$

*Filip Vučić (8),*
*OŠ Trnsko, Zagreb*

**OŠ – 451.** *Radiovalovi putuju brzinom* $3 \cdot 10^8$ *m/s. Radiopostaja je od slušatelja udaljena 120 kilometara. Koliko puta brže dođe signal iz nje do prijemnika nego zvuk iz njega do uha slušatelja koji je od aparata udaljen 3 metra? Brzina zvuka je 340 m/s. Na kojoj bi udaljenosti od prijemnika morao biti slušatelj da ta vremena budu jednaka?*

*Rješenje.*

$$v_1 = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s_1 = 120\,000\ \text{m}, \quad s_2 = 3\ \text{m}$$

$\dfrac{t_2}{t_1} =?$

$t_1 = t_2, \quad s_3 =?$

$t = \dfrac{s}{v}$

$t_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ s

$t_2 = 88 \cdot 10^{-4}$ s

$\dfrac{t_2}{t_1} = 22$

Ako je $t_2 = t_1$, tada je:

$$s_3 = v_2 \cdot t_1 = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$$
$$= 0.136\ \text{m} = 13.6\ \text{cm}.$$

*Filip Vučić (8), Zagreb*

**OŠ – 452.** *Strujni krug se sastoji od 4 jednake žarulje i izvora. Jedna je od žarulja spojena serijski na izvor napona, a preostale tri su spojene u paralelu, ali tako da je u jednoj grani jedna žaruljica, a u drugoj dvije. Izračunaj koliki je napon izvora ako je napon na jednoj od žarulja u grani s dvije žarulje 5 V.*

*Rješenje.*

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

$U_3 = U_4 = 5$ V

$U_p = 10$ V

$U =?$

$R_{\text{ukupni}} = R + R_p$

$$\frac{1}{Rp} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

$$R_p = \frac{2}{3}R$$

$$\frac{U_1}{R} = \frac{10\ \text{V}}{\frac{2}{3}R} \implies U_1 = 15\ \text{V}$$

$$U = U_1 + U_p = 25\ \text{V}.$$

*Luka Raguž (8),*
*OŠ Horvati, Zagreb*

**OŠ – 453.** *Martin ima naočale s divergentnom lećom jakosti 1 dpt. Na kojoj se udaljenosti od optičkog središta leće mora nalaziti ploča da ju Martin kroz svoju leću vidi dvostruko manju nego u stvarnoj veličini?*

*Rješenje.*

$j = -1$ dpt

$\underline{M = 0.5}$

$a = ?$

$j = \dfrac{1}{f} \implies f = -1$ m

Povećanje leće omjer je veličine predmeta $x$ i veličine slike $y$, a iz uvjeta zadatka vrijedi da je veličina slike dvostruko manja od veličine predmeta pa je:

$$x = 2y.$$

Drugi izraz za povećanje leće je:

$$M = -\frac{b}{a}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \implies -2b = a.$$

Iz jednadžbe tanke leće može se izračunati udaljenost slike od optičkog središta leće:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{2b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2b}$$

$$2b = f$$

$$\implies b = -0.5 \text{ m}$$

$$a = 1 \text{ m}.$$

Ploča se mora nalaziti 1 m udaljena od optičkog središta leće.

*Filip Vučić (8), Zagreb*

**1693.** *Na tečaju ronjenja podučava se da gledanjem pod vodom kroz masku ravnog stakla predmete vidimo 33 % uvećane i 25 % približene. Dokaži to. Indeks loma vode je* $4/3$, *indeks loma stakla je 1.5, a za zrak iznosi 1.*

*Rješenje.* Prividnu udaljenost $(d')$ određujemo kao mjesto presjeka pravaca na kojima leže lomljene zrake. Zraka koja upada okomito na masku neće se lomiti $(\alpha = \beta = 0)$, dok za vrlo mali upadni kut $\alpha$, smjer lomljene zrake $\beta$ određujemo Snellovim zakonom:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \approx \frac{\alpha}{\beta}.$$

Odatle možemo zaključiti da ravno (planparalelno) staklo ne mijenja smjer zraka, te da u slučaju zanemarive debljine stakla i zraka te malih odstupanja od okomice vrijedi

$$\frac{d'}{d} = \frac{1}{n_{\text{vode}}} = \frac{3}{4} = 0.75,$$

odnosno $d' = 0.75d$, kako i tvrdi tekst zadatka. Visinu predmeta $h$ vidimo kao $h'$, a iz pravokutnih trokuta s jednom katetom $h$, a drugom $d$ ili $d'$ zaključujemo da je omjer kutova gledanja jednak omjeru

$$\frac{h'}{h} = \frac{d}{d'} = n_{\text{vode}} = 1.33,$$

što je povećanje od 33 %.

*Filip Vučić (8), Zagreb*

**1694.** *Ciljana putanja sonde Parker Solar Probe približava se do 0.046 a.j. središtu Sunca (a.j. = astronomska jedinica =* $1.496 \cdot 10^{11}$ *m) i udaljava se do 0.73 a.j. od Sunca. Odredi ophodno vrijeme sonde i brzine kojima se sonda giba u odnosu na Sunce u krajnjim točkama putanje.*

*Rješenje.* Ophodno vrijeme određuje duljina velike poluosi $a$ eliptične putanje, koju odredimo kao srednju vrijednost krajnjih udaljenosti od Sunca, perihela $(r_{\min})$ i ahela $(r_{\max})$:

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = 0.776 \text{ a.j.}$$

Koristeći astronomsku jedinicu za prostornu i godinu za vremensku jedinicu, treći Keplerov zakon poprima posebno pogodan oblik:

$$T^2 = a^3, \quad T = 0.24168 \text{ godina}.$$

Brzinu ćemo najlakše izračunati iz $\overline{v}$, brzine kruženja po kružnici radijusa $a$ i numeričkog ekscentriciteta putanje $e$:

$$\overline{v} = \frac{2a\pi}{T} = 10.087 \text{ a.j./god},$$

$$e = 1 - \frac{r_{\min}}{a} = 0.88144.$$

Brzine u perihelu i ahelu su redom:

$$v_{\max} = \overline{v}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 40.18 \text{ a.j./god} = 190.5 \text{ km/s},$$

$$v_{\min} = \overline{v}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 2.532 \text{ a.j./god} = 12.003 \text{ km/s}.$$

*Ur.*

**1695.** *Matematičko njihalo duljine $l$ ima period njihanja $T$. Povećanjem duljine njihala za 21 %, period njihanja se poveća za 0.34 s. Odredi $l$ i $T$.*

*Rješenje.* Ako s $l'$ i $T'$ označimo duljinu i period nakon povećanja, imamo

$$l' = 1.21l$$
$$T' = T + 0.34$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \;\rightarrow\; \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

Uvrštavanjem u zadnji izraz s omjerima dobivamo:

$$1 + \frac{0.34}{T} = \sqrt{1.21} = 1.1$$

Odatle je $T = 3.4$ sekunde, a za $l$ opet iskoristimo jednadžbu perioda njihala,

$$l = g\frac{T^2}{4\pi^2} = 2.8725 \text{ m.}$$

*Borna Cesarec (1),*
*Srednja škola Krapina, Krapina*

**1696.** *Na homogenu kuglu mase 1.9 kg i radijusa 10 cm djelule moment sile 0.012 Nm tako da zaustavlja njenu rotaciju. U nekom trenutku ($t = 0$) kutna brzina rotacije kugle iznosi 7.5 rad/s.*

*a) Odredi vrijeme potrebno da se kugla zaustavi.*

*b) Odredi vrijeme potrebno za prvi okret oko svoje osi.*

*Rješenje.* a) Zaustavno vrijeme kod translatornog gibanja možemo izračunati kao:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F}.$$

Analogni izraz za rotacijsko gibanje bio bi

$$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{I\omega}{M},$$

gdje je $\omega$ kutna brzina, $I = \frac{2}{5}mR^2$ moment tromosti i $M$ moment sile. Uvrštavanjem dobivamo

$$t = \frac{0.4 \cdot 1.9 \cdot 0.1^2 \cdot 7.5}{0.012} = 4.75 \text{ s.}$$

b) Put jednoliko usporenog translatornog gibanja iznosi:

$$s = vt - \frac{a}{2}t^2 = vt - \frac{F}{2m}t^2.$$

Analogni izraz za rotacijsko gibanje je

$$\phi = \omega t - \frac{M}{2I}t^2,$$

gdje za prvi okret uvrstimo prevaljeni kut $\phi = 2\pi$

$$2\pi = 7.5t - \frac{0.012}{0.0152}t^2.$$

Rješavanje daje (rješenje manje od 4.75 s)

$$t = 0.9285 \text{ s.}$$

*Napomena.* Jednolika rotacija kutnom brzinom $\omega$ dala bi $t = \frac{2\pi}{\omega} = 0.83776$ sekundi, a očekujemo da se vrijeme malo poveća zbog usporavanja rotacije.

*Ur.*

**1697.** *Kugla mase 1.95 kg udara brzinom 1.1 m/s centralno i elastično u drugu kuglu koja je dotad mirovala. Nakon sudara se druga kugla giba trostruko brže od prve, u istom smjeru. Odredi masu druge kugle. Koliki se postotak kinetičke energije prenio na drugu kuglu?*

*Rješenje.* Uz uobičajene oznake brzina ($v_1$, $v_2$ prije i $v_1'$, $v_2'$ poslije sudara) zakon očuvanja impulsa daje

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1' + m_2 \cdot 3v_1',$$

a iz zakona očuvanja energije proizlazi

$$m_1v_1^2 = m_1v_1'^2 + m_2 \cdot 9v_1'^2.$$

Uvrštavanjem $m_2$ iz prve jednadžbe u drugu daje kvadratnu jednadžbu po $v_1'$:

$$v_1^2 = v_1'^2 + 3(v_1 - v_1')v_1'.$$

Pozitivno rješenje te jednadžbe iznosi

$$v_1' = 0.55 \text{ m/s.}$$

Odatle se dobiva

$$m_2 = 0.65 \text{ kg},$$
$$E_{k_1} = \frac{m_1v_1^2}{2} = 1.17975 \text{ J},$$

$$E_{k_2'} = m_2 \cdot \frac{9v_1^2}{2} = 0.8848125 \text{ J}.$$

Traženi postotak je tada

$$\frac{E_{k_2'}}{E_{k_1}} = 0.75 = 75\,\%.$$

*Filip Vučić (8), Zagreb*

**1698.** *Balon je napunjen plinom 41 % manje gustoće od zraka. Masa praznog balona je* 18 *grama, a okolni zrak je gustoće* 1.2 $kg/m^3$. *Izračunaj volumen balona ako je uzgon točno jednak težini sklopa. Volumen praznog balona je zanemariv.*

*Rješenje.* Ako masu plina u balonu označimo s $m$ i gustoću s $\rho = 0.59 \cdot 1.2 = 0.708$ kg/m$^3$, uvjet jednake sile teže i sile uzgona možemo raspisati kao:

$$G = (m_b + m)g,$$

$$F_u = \rho_z g V_b,$$

$$m_b + \rho V_b = \rho_z V_b.$$

Odatle je volumen balona

$$V_b = \frac{m_b}{\rho_z - \rho} = \frac{0.018}{1.2 - 0.708} = 0.03658 \text{ m}^3 = 36.58 \text{ l}.$$

*Borna Cesarec (1), Krapina*

**1699.** *Kolica mase 2.7 kg gibaju se jednoliko niz kosinu nagiba* 25°, *tako da snaga sile trenja iznosi 32 W. Kojom se brzinom gibaju kolica? Koliki je koeficijent trenja? Koliku visinsku razliku pređu u 3.5 s gibanja?*

*Rješenje.* S obzirom da su brzina i sila trenja konstantne, možemo snagu izraziti njihovim umnoškom:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{F_{tr}\Delta s}{\Delta t} = F_{tr}v.$$

Silu trenja izračunamo iz

$$F_{tr} = F_k = mg\sin\alpha = 11.194 \text{ N}$$

odatle je

$$v = \frac{P}{F_{tr}} = 2.859 \text{ m/s}.$$

Koeficijent trenja dobijemo iz izraza

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha \implies \mu = \operatorname{tg}\alpha = 0.4663.$$

U 3.5 s kolica pređu $vt = 10$ m, a vertikalna komponenta (visina) tog puta iznosi

$$h = vt\sin\alpha = 4.226 \text{ m}.$$

*Borna Cesarec (1), Krapina*