

## Sudoku – napredne metode rješavanja (8.2)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

U ovom broju nastavljamo s kompleksnim *lancima* i obradit ćemo posebne *lanca* koji čine *petlje*. **Petlje** (*Nice Loops*, skraćeno *NL*) su *lanci* koji se vraćaju na početno polje, polje s kojeg je *lanac* krenuo.

Pravila za propagaciju *NL lanca*:

1. kada čvor ima dvije slabe veze (skraćeno *sv*), u polju moraju biti samo 2 kandidata (par kandidata) i brojevi nastavka *lanca* moraju biti različiti
2. kada čvor ima dvije jake veze (skraćeno *jv*), brojevi (kandidati) nastavka *lanca* moraju biti različiti
3. kada čvor ima dvije različite veze (jednu jaku i jednu slabu), *lanac* se mora nastaviti na istom kandidatu

Tip *petlje* određuje veza povratka na početno polje *lanca*:

- s prekidom (Discontinuous) – ako postoji prekid u početnom polju, odnosno postoji kontradikcija (ne poštuju se pravila za propagaciju)
- neprekinute (Continuous) – ako nema prekida u početnom polju, odnosno *petlja* se bez kontradikcije može ponavljati bez detektiranja kraja

*Napomena*: *petlja* smije imati samo jedan prekid (diskontinuitet) i to polje smatramo početnim poljem; u njemu nisu zadovoljena pravila za propagaciju, odnosno ta pravila u početnom polju ne vrijede.

**Petlje s prekidom** (*Discontinuous Nice Loops*) su *petlje* u kojima postoji kontradikcija u početnom polju, tj. ne poštuju se jedno od tri pravila propagacije.

Ovisno o vrsti nepoštivanja pravila propagacije, postoje tri tipa *petlji* s prekidom:

- tip 1 – ako početno polje ima dvije slabe veze na istom kandidatu, on se može eliminirati iz tog polja
- tip 2 – ako početno polje ima dvije jake veze na istom kandidatu, on je rješenje tog polja
- tip 3 – ako početno polje ima slabu vezu i jaku vezu na različitim kandidatima, tada se kandidat sa slabom vezom može eliminirati iz tog polja

Zaključak: ako se propagacijska pravila ne poštuju (imamo kontradikciju u početnom polju) i ako postoji slaba veza, tada možemo eliminirati kandidata s tom slabom vezom iz početnog polja, a u protivnom rješenje tog polja je kandidat s jakim vezom.

*Napomena*: svako kršenje propagacijskih pravila čini *petlju* nevažećom. Npr. ako je polje okruženo s dvije slabe veze na različitim kandidatima, ali sadrži više od dva kandidata, veza je nevažeća i ta *petlja* ne vrijedi, osim ako je to polje diskontinuiteta.

Kod *Nice Loops* metode povezni čvorovi (nodes) čine polja, a ne individualni kandidati kao kod *AIC* metode koju smo obradili u prethodnom nastavku.

Pogledajmo primjer na slici 1.

<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	139	7	5	1	138	4	138	39
B	5	4	1389	38	6	138	12389	7	239
C	13	2	138	4	9	7	1368	5	36
D	39	7	5	2	4	36	389	368	1
E	23	36	4	1	8	9	5	236	7
F	1	1369	1239	67	37	5	2369	4	2369
G	4	8	13	67	37	2	136	9	5
H	7	5	239	389	1	368	236	36	4
I	129	139	39	2	5	4	7	123	8

Slika 1.

Polje A2 je početno polje *lanca* koje počinje i završava u istom polju pa se radi o *petlji* u kojoj nije zadovoljeno 1. propagacijsko pravilo: ako čvor ima dvije slabe veze (ulazna i izlazna veza je ovdje na broju 1) tada se *lanac* mora nastavljati na različitim brojevima i u polju smiju biti samo dva kandidata. Vidimo da niti su u polju samo dva kandidata, niti su nastavci *petlje* različiti, stoga se radi o *petlji s prekidom tipa 1*. Budući da polje A2 ima dvije slabe veze na istom kandidatu, taj kandidat se može eliminirati iz tog polja.

Opis *petlje*: ako je A2 1 tada C1 nije 1 (sv), ako C1 nije 1 tada je I1 1 (jv), ako I1 nije 2 tada je I8 2 (jv), ako je I8 nije 1 tada je A8 1 (jv), ako je A8 1 tada A2 ne može biti 1 (nije) 1 (sv) → znači da A2 nije 1!

Logika: pretpostavka u početnom polju (polju kontradikcije) “ako je A2 1” dovodi nas na povratku u početno polje *petlje* do tvrdnje da “tada A2 nije 1”, što znači da ni u kojem slučaju (čak i ako je A2 1), broj 1 nije rješenje polja A2 i možemo ga eliminirati iz tog polja. Rezime logike:  $1 - A2 - 1$  (ako je A2 1 tada A2 ne može biti 1).

NL zapis *petlje*:  $A2 - 1 - C1 = 1 = I1 = 2 = I8 = 1 = A8 - 1 - A2 - 1 ==> A2 <> 1$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	57	9	3	67	467	2	145	145
B	34	1	57	2	79	8	39	45	6
C	2	346	346	1	5	49	39	8	7
D	139	3589	135	8	6	2378	357	4	1279
E	7	346	346	9	2	1	5	26	8
F	139	35689	2	4	378	357	17	16	139
G	6	2379	137	8	4	39	17	12579	1259
H	5	249	14	7	169	69	8	3	1249
I	1349	3479	8	5	139	2	6	1479	149

Slika 2.

U primjeru na slici 2 imamo još jednu NL *petlju*. Vidimo da polje D2 ima dvije jake veze na istom kandidatu, čime nije zadovoljeno 2. propagacijsko pravilo i imamo *petlju* s prekidom tip 2. Budući da polje D2 ima dvije jake veze na istom kandidatu, taj kandidat je rješenje polja D2.

Opis *petlje*: ako D2 nije 8 tada je F2 8 (jv), ako F2 nije 6 tada je F8 6 (jv), ako je F8 6 tada E8 nije 6 (sv), ako je E8 2 tada E5 nije 2 (sv), ako E5 nije 2 tada je D5 2 (jv), ako D5 nije 8 tada je D2 8 (jv) → D2 je 8!

Logika: pretpostavka u početnom polju “ako D2 nije jednako 8”, dovodi nas na povratku u početno polje *petlje* do tvrdnje da “tada D2 mora biti 8”, što znači da nema nikakve logike da polje D2 bude išta drugo nego 8 (čak i ako smo pretpostavili da nije 8). Rezime logike:  $8 = D2 = 8$  (ako D2 nije 8 tada D2 mora biti 8).

NL zapis *petlje*:  $D2 = 8 = F2 = 6 = F8 - 6 - E8 - 2 - E5 = 2 = D5 = 8 = D2 ==> D2 = 8$

Na slici 3 imamo primjer *petlje* s prekidom tip 3. A1 je početno polje jer u njemu nije zadovoljeno 3. propagacijsko pravilo. Naime, polje A1 ima miješane veze na različitim kandidatima, tako da možemo eliminirati kandidata sa slabom vezom, a to je u ovom slučaju broj 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	567	8	5	1	59	2	69	679	4
B	567	7	67	459	8	459	3	1679	169
C	4	9	1	6	3	7	5	8	2
D	39	14	6	7	6	149	2	5	139
E	369	14	5	349	2	8	169	169	7
F	2	7	69	359	59	159	8	4	1369
G	8	5	4	2	7	69	169	3	169
H	1	3	2	59	4	569	7	69	8
I	79	6	79	8	1	3	4	2	5

Slika 3.

Opis *petlje*: ako A1 nije 5 tada je A5 5 (jv), ako je A5 5 tada F5 nije 5 (sv), ako je F5 9 tada F3 nije 9 (sv), ako je F3 6 tada B3 nije 6 (sv), ako je B3 7 tada A1 nije 7 (sv) → znači  $A1 <> 7!$

Logika: pretpostavka u početnom polju “ako A1 nije 5”, dovodi nas na povratku u početno polje *petlje* do tvrdnje da “tada A1 ne može biti (nije) 7”, što znači da i ako pretpostavimo da je A1 7 ( $7 <> 5$ ), *petlja* pokazuje da A1 ne može biti 7, tj. nema logike da je  $A1 = 7$ . Rezime logike:  $7 - A1 = 5$  (ako A1 nije 5 tada A1 ne može biti 7).

NL zapis *petlje*:  $A1 = 5 = A5 - 5 - F5 - 9 - F3 - 6 - B3 - 7 - A1 ==> A1 <> 7$

**Neprekinute *petlje* (Continuous Nice Loops)** su *petlje* u kojima ne postoji kontradikcija u početnom polju, tj. poštuju se sva tri pravila propagacije.

Neprekinute *petlje* ne dokazuju inicijalnu pretpostavku za početno polje, zapravo više uopće nije bitno koje je početno ili završno polje, odnosno sva polja mogu eliminirati kandidate iz polja izvan ili unutar *petlje* na sljedeći način:

- ako polje ima dvije jake veze s različitim kandidatima, tada se svi drugi kandidati iz tog polja mogu eliminirati
- ako su dva polja povezana sa slabom vezom na određenom kandidatu, tada se on može eliminirati iz svih polja izvan *petlje* koja su povezana s njima

Kod **notacije neprekinutih *petlja*** stavljamo na početak zapisa ‘–’ i na kraj ‘=’ kako bi pokazali da je *petlja* bez prekida.

Pogledajmo primjer na slici 4. Radi se o neprekinutoj *petlji* jer su u svim poljima zatvorenog *lanca* zadovoljena sva propagacijska pravila. Stoga nema početnog polja, možemo se kretati (povezivati polja) u bilo koju stranu počevši od bilo kojeg polja.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	45 7	7	4	8	24	9	25	1	6
B	8	59	29	47	1	6	3	257	2457
C	1	24	6	247	5	3	8	9	47
D	469	69	8	1	3	245	7	25	259
E	7	3	29	6	28	258	159	4	129
F	25	45	1	24	9	7	6	3	7
G	3	1	7	9	6	28	4	258	25
H	269	269	4	5	78	128	129	278	3
I	29	8	5	3	247	124	129	7	1279

Slika 4.

Opis *petlje*: ako A5 nije 4 tada je I5 4 (jv), ako I5 nije 7 tada je I9 7 (jv), ako je I9 7 tada C9 nije 7 (sv), ako je C9 4 tada C2 nije 4 (sv), ako C2 nije 4 tada je A1 4 (jv), ako je A1 4 tada A5 nije 4 (sv). Polje I5 ima dvije jake veze na kandidatima 4 i 7, tako da možemo eliminirati sve ostale kandidate iz tog polja. Polja C2 i C9 su povezana slabom vezom na kandidatu 4 tako da možemo eliminirati broj 4 iz povezanog polja C4. Također, polja C9 i I9 su povezana slabom vezom na kandidatu 7, pa možemo eliminirati broj 7 iz povezanog polja B9. Kod slabe veze polja A1 i A5 preko boja 4, nema ništa za eliminaciju.

NL zapis *petlje*: – A5=4=I5=7=I9–7–C9–4–C2=4=A1–4–A5====>  
I5<>2, C4<>4, B9<>7

Na slici 5 imamo također jednu neprekinutu *petlju* koja nema niti u jednom čvoru prekid jer su zadovoljena sva propagacijska pravila u svim poljima. Vidimo da je *petlja* potpuno bidirekionalna.

Opis *petlje*: ako je A2 5 tada C3 nije 5 (sv), ako je C3 6 tada C6 nije 6 (sv), ako C6 nije 6 tada je A6 6 (jv), ako je A6 6 tada A2 nije 6. Nažalost, ne postoji ništa za eliminaciju. To su tzv. redundantne *petlje* i sudoku zna biti pun takvih *petlji* (npr. *petlja* je povezana zaključanim setovima: parovima, trojkama, i slično).

Ako pogledate pažljivije, vidjet ćete da su sve veze u *petlji* zapravo jake, no po definiciji svaka jaka veza je ujedno i slaba te se kao takva može koristiti da bi zadovoljili propagacijska pravila.

NL zapis *petlje*:  $-A2-5-C3-6-C6=6=A6-6-A2=$  (redundantna *neprekidna petlja*)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	148	56	9	34	6	7	346	158	358
B	2478	47	48	5	1	234	9	378	6
C	127	3	56	9	6	8	26	57	157
D	347	4567	356	348	25	1	258	9	4578
E	479	1457	2	48	59	47	3	6	14578
F	3479	8	135	6	259	347	125	2457	1457
G	38	9	7	2	4	58	6	1	35
H	5	124	13	7	6	9	28	248	348
I	6	24	48	1	3	58	7	245	9

Slika 5.

Nakon što smo obradili sve tipove *petlji* i njihove karakteristike, ostaje pitanje kako pronaći *petlju* u mreži. To nije nimalo lako i zato ove metode spadaju u jedne od krajnjih metoda pri rješavanju sudokua. Izazovno je (a može biti i zabavno) da kod *Nice Loop petlji* ne morate znati što tražite kada ih počnete graditi. Umjesto toga možete jednostavno odabrati jedan kvadrat i započeti povezivati kandidate u poljima, stvarajući *lanace* i gledajući gdje vode. Ako se uzmu ekstremno teški dijelovi, to može voditi do gubitka velike količine vremena, stoga je najbolje imati na umu neke ciljeve i ideje o tome gdje bi mogli napraviti dobar *lanac*. Iako nema općeg pravila i sigurnog načina, ipak postoje neke smjernice koje se nalaze ispod.

Pronalaženje *petlji*:

- najčešći tip *petlje* je *petlja s prekidom tip 3* (slaba i jaka veza na različitim kandidatima u polju prekida (početnom polju); takve *petlje* obično počinju s jakom vezom u početnom polju
- stoga treba tražiti polje s 3 ili više kandidata (da bi bila veća šansa za pronalazak povratne slabe veze) i jakom vezom na jednom kandidatu u povezanom području
- kada dodajete polja u *lanac*, istražite koja vam veza treba prema njemu i od njega tako da se usredotočite na pronalaženje polja koje odgovara vašim zahtjevima; dostupni tipovi veze ovise o dolaznoj vezi u polje, kako slijedi:
  - ako je dolazna veza slaba ('to polje ne može biti X'), izlazna veza iz tog polja može biti:
    - jaka veza na istom kandidatu – treba naći konjugirani par s tim poljem
    - slaba veza na njegovom drugom kandidatu, ako je polje s dva kandidata
  - ako je dolazna veza jaka ('to polje mora biti X'), izlazna veza iz tog polja može biti:
    - slaba veza na istom kandidatu
    - jaka veza na bilo kojem drugom kandidatu u polju – treba naći konjugirani par

- nemojte zaboraviti da svaku jaku vezu možete prema potrebi koristiti i kao slabu vezu; također da su sve veze moguće jedino u povezanim područjima (retku, stupcu ili kvadratu)
- nakon što je lanac dugačak 3 ili 4 polja treba tražiti povratak na početno polje; dakle treba biti u povezanom području i imati zajedničke kandidate; često se veze ostvaruju preko cijelog retka ili stupca; vještiji rješavači će tražiti dva ili tri polja unaprijed, tražeći put koji vodi do jednog od područja početnih polja.
- ako nema veze natrag treba ili promijeniti tip veze i kandidata ili promijeniti zadnje polje i nastaviti na isti način dalje

AIC metoda se može promatrati kao kombinacija jedne ili više *petlji s prekidom*. *Neprekinute petlje* se u literaturi još nazivaju i *Alternating Interference Chain Loops (AIC Loops)*.

Kao i kod *AIC lanaca*, i ovdje postoje *grupne petlje (Group Nice Loops)* ili točnije *petlje s grupnim čvorovima (group nodes)*. Pogledajmo primjer na slici 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	<b>2</b>	17	68	1367	13467	<b>9</b>	3478	<b>5</b>	378
B	19	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	147	47	2479	<b>6</b>	27
C	68	79	<b>4</b>	<b>2</b>	356	56	79	38	<b>1</b>
D	1349	<b>6</b>	239	159	14589	458	12358	<b>7</b>	2358
E	<b>5</b>	19	379	1679	6789	<b>1</b>	138	138	<b>4</b>
F	14	<b>8</b>	27	157	1457	<b>3</b>	125	<b>9</b>	<b>6</b>
G	<b>7</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	353	3589	58	<b>6</b>	<b>4</b>	358
H	369	<b>4</b>	3689	3567	35678	<b>1</b>	3578	<b>2</b>	3578
I	368	<b>5</b>	38	<b>4</b>	<b>2</b>	678	1378	18	<b>9</b>

Slika 6.

Imamo *petlju s prekidom* tip 1. Polje prekida, odnosno početno polje je E8 s dvije slabe veze na istom kandidatu 1 kojeg stoga možemo eliminirati.

NL zapis:  $E8 - 1 - I8 - 8 - I3 - 3 - DEF3 - 9 - E2 - 1 - E8 \implies E8 \langle \rangle 1$

U primjeru imamo slučaj da ako je I3 jednako 3 tada u grupi polja DEF ne može biti broj 3 i ona prelazi u zaključani set, odnosno trojku brojeva  $\{2, 7, 9\}$ . Trebate paziti na značenje veze s grupom polja:

- $-3 - DEF3$  znači: niti u jednom polju grupe DEF3 ne može biti broj 3 (grupna slaba veza)
- $=3 = DEF3$  znači: da je u jednom polju grupe DEF3 točan broj 3 (grupna jaka veza)
- $DEF3 - 9 -$  znači: ako je u jednom polju grupe DEF3 točan broj 9 tada nije točan u... (grupna slaba veza)
- $DEF3 = 9 =$  znači: ako ni u jednom polju grupe DEF3 nije točan broj 9 tada je točan u... (grupna jaka veza)

Kod *petlji*, ili općenito *lanaca*, moguće su i istovremene višestruke veze tipa: ako je polje  $A=X$ , tada polje  $B$  ne može biti  $Y$  i polje  $C$  ne može biti  $Y$ . U tom slučaju vezu dijela koji čini "mrtvi kraj", a koju moramo obraditi prije sljedeće veze u *petlji*, stavljamo u zagradu. Pogledajte primjer na slici 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	257	29	257	1	4	8	3	259
B	1	258	248	25	3	9	24	6	7
C	245	3	273	8=7=6	27	1	45	59	
D	48	6	5	9	24	78	27	1	3
E	24	9	247	3	5	1	47	8	6
F	78	3	1	27	48	6	9	45	25
G	7	1	6	4	9	5	3	2	8
H	9	4	28	2=5	28	3	5	7	1
I	58	25	3	1	7	8	6	9	4

Slika 7.

NL zapis *petlje s prekidom tip 3* glasi:  $C3=7=C6=2=I6=8=H5=2=H3(-2-C3)$   
 $-2-A3-9-C3 \implies C3 \langle \rangle 29 \implies C3=7$

U sljedećem nastavku nastavljamo s obradom *forsiranih lanaca*.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	2		4		5	1		
B	7				1				
C		4							2
D			4		6				
E	2	9						1	8
F					8		7		
G	9							4	
H					5				3
I			5	3		1		9	7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	2	8	4	3	5	1	7	9
B	7	5	9	8	1	2	4	3	6
C	3	4	1	7	9	6	8	5	2
D	8	7	4	1	6	3	9	2	5
E	2	9	6	5	4	7	3	1	8
F	5	1	3	2	8	9	7	6	4
G	9	3	2	6	7	8	5	4	1
H	1	6	7	9	5	4	2	8	3
I	4	8	5	3	2	1	6	9	7