Iracionalnost Eulerova broja e

Željko Hanjš, Darko Žubrinić

Eulerov broj $\mathrm{e} \approx 2.718$ predstavlja jednu od najvažnijih konstanata u matematici. Naziv je dobio prema znamenitom švicarskom matematičaru Leonhardu Euleru (1707.–1783.). Zadnjih sedamnaest godina života Euler (čitaj 'Ojler') je bio slijep, ali unatoč tome nevjerojatno aktivan kao znanstvenik. Predviđao je da će nakon njegove smrti, njegovi neobjavljeni radovi biti objavljivani još dvadesetak godina. Istina je stvarno ova: objavljivani su još oko osamdeset godina nakon njegove smrti!

Cilj je ovog članka dokazati da je Eulerov broj e *iracionalan*, tj. da se ne može dobiti kao kvocijent dvaju prirodnih brojeva. Euler je to svojstvo broja e otkrio 1737. g., u dobi od tridesetak godina. Ovdje ćemo predstaviti dokaz koji je iznenađujuće jednostavan.[1] Vidi Propoziciju 1. Dokaz se temelji na faktorijelnoj aproksimaciji broja e.

Postoje indikacije da se Euler dopisivao sa znamenitim hrvatskim znanstvenikom Ruđerom Boškovićem, a možda se s njime i osobno poznavao. Vidi [5].

Faktorijelna aproksimacije broja e

U članku [3] opisali smo osnovne konstrukcije Eulerova broja e i brzinu konvergencije odgovarajućih aproksimacija. Broj $\mathrm{e} \approx 2.718$ se može definirati s pomoću beskonačnog reda[2]

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{1}$$

Značenje te jednakosti je da parcijalne sume

$$s_n := 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad \text{gdje je } n \in \mathbb{N},$$

konvergiraju prema broju e kada n teži u beskonačno (ili što je isto, vrijednost $\mathrm{e} - s_n$ je po volji malena, čim je n dovoljno velik).

Štoviše, može se pokazati da je brzina konvergencije *faktorijelna*, tj. vrijedi

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e} - s_n \leqslant \frac{3}{(n+1)!}.$$

Na primjer, već je $s_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!} \approx 2.7182818$, i sve su navedene znamenake iste kao i za broj e.

Iracionalnost broja e

Pogledajmo Eulerov iznenađujuće jednostavan i elegantan dokaz iracionalnosti broja e, koji se temelji na njegovom prikazu s pomoću beskonačnog reda navedenog u (1). Dokaz je dostupan čitateljima koji su upoznati s pojmom reda potencija. Priloženi dokaz, uz male preinake, slijedi onaj iz vrlo znamenite knjige [1, Odjeljak VI.2.3], jedno od najljepše pisanih djela za popularizaciju matematike.

Propozicija 1. (L. Euler) *Broj* e *je iracionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo, protivno tvrdnji, da je broj e racionalan, tj. $\mathrm{e} = m/n$, gdje su m i n neki prirodni brojevi. Budući da je $\mathrm{e} \in \langle 2, 3 \rangle$, zaključujemo da e nije prirodan broj, pa mora biti $n \geqslant 2$. Budući da je $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (vidi (1)), dobivamo jednakost $m/n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Množeći ju s $n!$, dobivamo

$$m(n-1)! = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!},$$

tj.[3]

$$\begin{aligned} 0 < m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Na samom početku je $m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ prirodan broj (primijetite da je $\frac{n!}{k!}$ prirodan broj za svaki $k = 0, 1, \ldots, n$). S druge strane, on bi morao biti sadržan u intervalu $\langle 0, 1/2 \rangle$, a to nije moguće. Ovim protuslovljem je dokazano da je broj e iracionalan. □

Iracionalnost broja π dokazao je *Johann Lambert* (1728.–1777.), a već taj dokaz je veoma težak (za razliku od dokaza iracionalnosti broja e). Dokaz da je broj π

[3] Pretposljednja jednakost u (2) slijedi iz formule za zbroj beskonačnog *geometrijskog reda* $1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}$, koja vrijedi za sve realne brojeve $q \in \langle -1, 1 \rangle$. Poznajemo ju s kraja srednje škole (slijedi iz poznate formule za zbroj geometrijskog niza: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$). U pretposljednjoj jednakosti u (2) smo tu formulu upotrijebili s $q = 1/3$.

čak *transcendentan* (tj. da ne može biti nultočka nijednog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, koji nije identički jednak 0) dao je tek 1882. g. njemački matematičar *Ferdinand von Lindemann* (1852.–1939.). Transcendentnost broja e dokazao je francuski matematičar *Charles Hermite* (1822.–1901.). Dokazi transcendentnosti realnih brojeva su obično vrlo složeni.

Naravno, transcendentni brojevi su iracionalni, jer kada bi za neki transcendentan broj vrijedilo $x = m/n$, gdje su m i n cijeli brojevi (s $n \neq 0$), onda bismo imali $nx - m = 0$, tj. x bi bio nultočka polinoma prvog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima.

Brojevi koji nisu transcendentni, tj. takvi da se mogu dobiti kao nultočka nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, koji nije identički jednak nula, zovu se *algebarski brojevi*. Među njima su racionalni brojevi, ali i neki iracionalni, kao što je $\sqrt{2}$. Takav je i broj $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt[5]{10}}$, jer je $x^3 = 7 + \sqrt[5]{10}$, a odatle $(x^3 - 7)^5 - 10 = 0$, tj. x je nultočka polinoma petnaestog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima.

Prema tome, realne brojeve možemo podijeliti na racionalne i iracionalne. Isto tako, realne brojeve možemo podijeliti na algebarske i transcendentne.

Moglo bi se pomisliti da je skup svih iracionalnih brojeva u nekom smislu 'malen' u odnosu na skup racionalnih. Istina je upravo obrnuta. Točnije, ako u bilo kojem zadanom intervalu na slučajan način biramo realan broj, onda će on *skoro sigurno* biti iracionalan. Pojam 'skoro sigurno' se može precizno definirati. Drugim riječima, među svim realnim brojevima, racionalni brojevi su rijetkost (iako ih ima beskonačno mnogo), dok su iracionalni brojevi 'najčešći'.

Također, transcendentnih brojeva ima bitno više od algebarskih (iako su oba skupa beskonačna, tj. prvi skup je 'više beskonačan' od drugog). Točnije, ako u bilo kojem zadanom otvorenom intervalu realnog pravca na slučajan način biramo realan broj, onda će on skoro sigurno biti transcendentan. Drugim riječima, među svim realnim brojevima, algebarski brojevi su 'rijetkost' (iako ih ima beskonačno mnogo), dok su transcendentni brojevi 'najčešći'.

Iznenađujuća je činjenica da je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ *jednakobrojan* skupu algebarskih brojeva A. Točnije, postoji bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ u A.[4]

Više o ovoj problematici vidi u člancima Gregureka i Vukovića [4, 5].

Način označavanja konstanata

Čitatelj je možda već primijetio da za Eulerov broj rabimo oznaku e, a ne e. Također za broj *pi* rabimo oznaku $\mathrm{\pi}$, a ne π. Hrvatski ured za norme, u skladu s Europskim uredom za norme, preporuča da se za konstante (ne samo matematičke, nego i fizikalne)

[4] Za funkciju $f : \mathbb{N} \to A$ kažemo da je *bijekcija*, ako je *injekcija* (tj. za sve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ iz $f(n_1) = f(n_2)$ slijedi $n_1 = n_2$) i *surjekcija* (tj. za svaki $a \in A$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f(n) = a$). Ako između neka dva *konačna* skupa postoji bijekcija, onda se lako uvjeriti da moraju imati isti broj elemenata. Vrijedi, naravno, i obratno: ako dva konačna skupa imaju isti broj elemenata, onda među njima postoji bijekcija. Dakle, bijektivnost dvaju (konačnih) skupova isto je što i jednakobrojnost. Pojam *jednakobrojnosti* proširujemo na isti način i na beskonačne skupove: kažemo da su dva (beskonačna) skupa *jednakobrojna* ako među njima postoji bijekcija. Na primjer, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je jednakobrojan sa skupom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, pa čak i sa skupom racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, kao i sa skupom A algebarskih, ali nije sa skupom svih realnih brojeva $\mathbb{R}$. Kažemo kraće da su skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i A *prebrojivi*, dok je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Skupovi iracionalnih i transcendentnih brojeva su također neprebrojivi, tj. ne postoje bijekcije s tih skupova na $\mathbb{N}$. Vidi članke [4, 5].

koriste uspravna slova, a ne kosa. Mnogi se ne drže tih preporuka, pa ni MFL. Koliko nam je poznato, te se preporuke ne drži niti Matematički odsjek PMF-a niti Hrvatsko matematičko društvo. Zanimljivo je da se na dodiplomskom i diplomskom studiju FER-a na tome ne inzistira, dok doktorski studij na FER-u inzistira na tome. Neke institucije, časopisi i knjige u svijetu se dosljedno drže tog dogovora, kao i mnogih drugih.

Možda je najneobičnija situacija s oznakom otvorenog intervala na realnom pravcu, za što u Hrvatskoj imamo čak tri različite oznake: (a, b), $\langle a, b\rangle$ i $]a, b[$. Prva i zadnja oznaka se preporučuju prema Hrvatskom uredu za norme. Oznaka $]a, b[$ za otvoren interval rabi se u Francuskoj. Ovo je samo dio šireg problema neusklađenosti matematičkih (i fizikalnih) oznaka u Hrvatskoj.[5]

Literatura

[1] Richard Courant, Herbert Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.

[2] Željko Hanjš, Darko Žubrinić, *Dopisivanje Ruđera Boškovića i Leonharda Eulera*, Matematičko-fizički list 2/218 (2004), str. 121–122.

[3] Željko Hanjš, Darko Žubrinić, *O Eulerovu broju* e *i odgovarajućoj eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji*, Matematičko-fizički list 1/277 (2019), str. 15–24.

[4] Petar Gregurek, Mladen Vuković, *Prebrojivi skupovi*, Matematičko-fizički list 271 (2018), 3, str. 152–157.

[5] Petar Gregurek, Mladen Vuković, *Neprebrojivost skupa transcendentnih brojeva*, Matematičko-fizički list 272 (2018), 4, str. 222–227.

[5] Zahvaljujemo prof. dr. Zvonku Benčiću na informacijama o normizaciji oznaka u matematici i fizici.