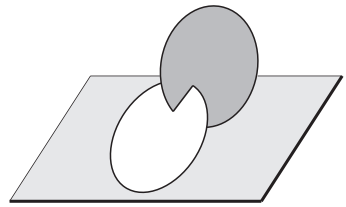
FIZIKA

Proučavanje gibanja tijela *circle roller*

Bruno Golik[1]

Uvod



Slika 1. Prikaz promatranog tijela.

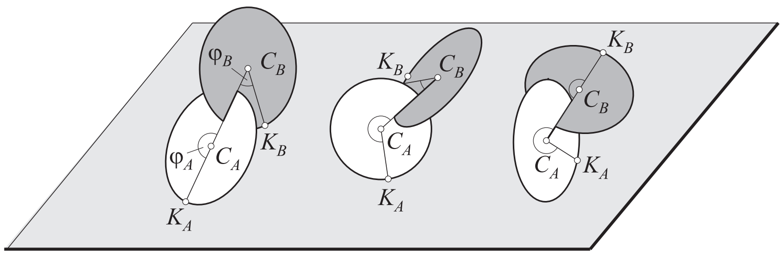
Tijelo će se na ravnoj podlozi ponašati kao kotač ako su zadovoljeni određeni geometrijski uvjeti. Centar mase optimalno treba biti na konstantnoj visini tako da nema oscilacije potencijalne energije. Također je poželjno da tijelo nema oštre rubove koji diraju podlogu jer time dolazi do isprekidanog gibanja tijela i zbog udaraca u podlogu do većih gubitaka energije (primjer je tijelo kvadratičnog presjeka). Među tijela koja zadovoljavaju takve uvjete spada i *circle roller*, tijelo sastavljeno od dva međusobno okomita kruga radijusa R, pri čemu su im centri udaljeni za $\sqrt{2}R$ (slika 1). Iako ovo tijelo postoji u mnogim mjestima kao dječja igračka [1] matematički opis je napravljen 1966. godine [2]. Postoje poopćenja ovog problema na dvije spojene elipse i slične objekte (engl. *sphericon* i *oloid*) [1, 3]. Kompletni matematički opis i numerički izračuni su dani u radu Hiroshi iz 2011. godine [4]. U ovom članku ćemo razmatrati način gibanja ovakvog tijela na ravnoj podlozi tako da trenje ne dopušta proklizavanje. Razmatrat ćemo programski način generiranja krivulja koje opisuju putanju dodirnih točaka tijela s podlogom, kao i putanju centra mase u horizontalnoj ravnini. Također ćemo zadane krivulje aproksimirati pomoću elementarnih funkcija u određenim intervalima. Zbog toga što su sve duljine proporcionalne radijusu krugova, na temelju sličnosti oblika, uzimamo $R = 1$. Debljina diskova koji čine model je zanemariva.

Razrada

Kvalitativno opažanje gibanja tijela pokazuje na to da se centar mase ne giba po pravcu, nego po periodičnoj krivulji sličnoj sinusoidi (nazovimo ju f_C). Tijelo također nema stalnu os rotacije i gibanje nije moguće rastaviti na superpoziciju translacije i rotacije oko stalne osi. Tijelo u svakom trenutku dira podlogu u dvije točke (svaka na jednom krugu). Neka krivulje koje dodirne točke K_A i K_B stvaraju s podlogom budu f_A i f_B. Prvi uvjet gibanja tijela je stalna udaljenost centra mase od tla, što je moguće dokazati da vrijedi za svaki položaj. Iznos te udaljenosti je $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Drugi uvjet,

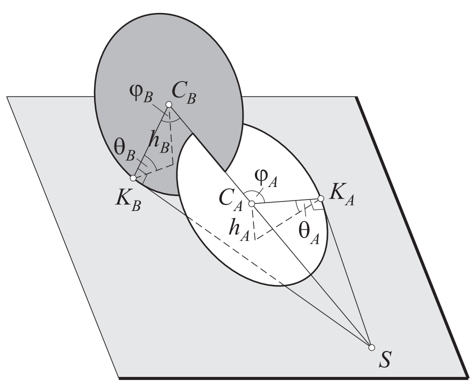
[1] Autor je učenik 4. razreda Prve gimnazije Varaždin i u Centru je izvrsnosti iz fizike Varaždinske županije; e-pošta: `brunogolik1@gmail.com`

uvjet gibanja bez proklizavanja, govori da je duljina dijela krivulje kontakta na podlozi jednaka odgovarajućoj duljini kružnog luka koji ju generira (za $R = 1$ to odgovara kutu kružnog luka u radijanima). Treći uvjet je da tangenta na krivulju f_A u točki K_A bude identična tangenti kruga A u točki K_A (i analogno za B). Uvodimo kutove φ_A i φ_B (slika 2 lijevo) kao kutove između poveznice centara krugova (dužine $\overline{C_A C_B}$), i dužina $\overline{C_A K_A}$ i $\overline{C_B K_B}$. Neka kutovi θ_A i θ_B predstavljaju kutove između plohe podloge i ploha na kojima leže krugovi A i B.



Slika 2. Tijelo prikazano u tri sukcesivna položaja prilikom gibanja s naznačenim ključnim točkama.

Kut φ_A će u generiranju krivulja služiti kao nezavisna varijabla, te ga zbog toga moramo povezati s ostalim veličinama. Koristit ćemo notaciju kutova prikazanu na slici 2 prema kojoj se tijelo giba udesno (tako da se i φ_A i φ_B povećavaju). Zbog periodičnosti gibanja krivulje f_A i f_B su identičnog oblika, ali međusobno translatirane i rotirane, te je zbog toga dovoljno primijeniti račun samo na interval $\varphi_A \in [\pi, 3/2\pi]$ i kasnije dobivene podatke kopirati i zalijepiti kao ekstenziju krivulje. Ograničenje intervala je elegantnije nego stvaranje generalnog rješenja zbog područja definicije nekih inverznih trigonometrijskih funkcija.



Slika 3. Skica modela. Iscrtkane linije predstavljaju linije koje su iza vidljivog djela modela. kut φ_A je označen kao suprotan kut nego ranije na slici 2 zbog preglednosti. Zbog toga što se u računu koristi kosinus kuta dobit će se isti rezultat.

Visine centara krugova dane su direktno preko kutova θ_A i θ_B kao (slika 3):

$$h_A = \sin\theta_A, \qquad h_B = \sin\theta_B. \tag{1}$$

Neka točka S bude sjecište ravnine podloge i pravca na kojem leži dužina koja spaja centre krugova. Označimo dužinu $\overline{C_A S}$ s x. Zbog toga što su trokuti $K_B C_B S$ i $K_A C_A S$

pravokutni, vrijedi:

$$\cos\varphi_B = \frac{1}{\sqrt{2}+x}, \qquad -\cos\varphi_A = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Eliminacijom x-a dobivamo direktnu vezu kutova φ_A i φ_B i možemo izraziti φ_B eksplicitno:

$$(1-\sqrt{2}\cos\varphi_A)(1-\sqrt{2}\cos\varphi_B) = 1 \tag{3}$$

$$\varphi_B = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\cos\varphi_A}}. \tag{4}$$

Koristeći uvjet da je centar mase točno između točaka C_A i C_B te sličnost trokuta:

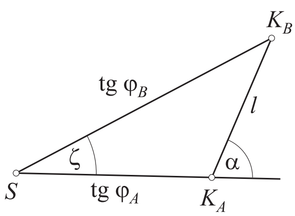
$$(\sin\theta_A + \sin\theta_B) = \sqrt{2}, \qquad \frac{h_A}{h_B} = \frac{\sin\theta_A}{\sin\theta_B} = \frac{x}{x+\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Dobivamo eksplicitne izraze:

$$\theta_A = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\varphi_A}\right), \qquad \theta_B = \arcsin\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\varphi_A}\right). \tag{6}$$

Potrebno će biti izračunati još nekoliko dinamičkih vrijednosti. Prva je udaljenost točaka K_A i K_B. Ako postavimo trodimenzionalni koordinatni sustav tako da je centar mase u ishodištu, a krugovi na dvije okomite plohe, udaljenost se dobiva preko Pitagorinog teorema:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\sqrt{2}-\cos\varphi_A-\cos\varphi_B)^2+\sin^2\varphi_A+\sin^2\varphi_B} \\ &= \sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi_A}+\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi_B}. \end{aligned} \tag{7}$$



Slika 4. Trokut K_AK_BS.

Neka ζ bude kut pod kojim se sijeku tangente na krivulje f_A i f_B u točkama K_A i K_B $(0 \le \zeta \le \pi/2)$ i neka α bude kut koji dužina $\overline{K_AK_B}$ zatvara s tangentom na f_A u točki K_A $(\pi/4 \le \alpha \le \pi/2)$. Vrijednost ζ može se dobiti promatrajući trokut K_AK_BS i koristeći kosinusov poučak (slika 4). Vrijednost kuta ζ dobiva se formulom:

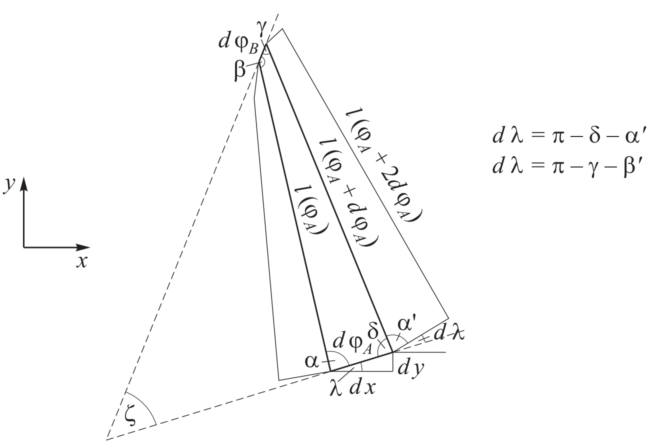
$$\zeta = \arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_A}{\operatorname{tg}\varphi_B}+\frac{\operatorname{tg}\varphi_B}{\operatorname{tg}\varphi_A}-\frac{l^2}{\operatorname{tg}\varphi_A\operatorname{tg}\varphi_B}\right)\right]. \tag{8}$$

Kut α moguće je elegantno prikazati preko kuta ζ za interval koji se koristi u problemu:

$$\alpha = \frac{\zeta}{2}+\frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Generiranje krivulje

Krivulja se generira numerički tako da se mijenja vrijednost kuta φ_A u malim intervalima $d\varphi_A$, čija vrijednost se specificira na početku izvršavanja. Kada kružnica A otisne na podlogu djelić krivulje f_A duljine $d\varphi_A$ istovremeno kružnica B otiskuje djelić duljine $d\varphi_B$ krivulje f_B (izračunava se pomoću (4)). Udaljenost točaka K_A i K_B se tijekom tog pomaka također promijeni (7). Uzimamo da dužina duljine $l(\varphi_A)$ spaja točke K_A i K_B prije tog pomaka, ali joj se duljina promijeni na $l(\varphi_A + d\varphi_A)$ nakon pomaka, kada spaja točke K_A' i K_B'. Time dobivamo tanki četverokut (slika 5). Zbog toga što mu možemo odrediti unutarnje kutove (detaljnije u nastavku) možemo ga povezati s njemu susjednim četverokutima. Za svaki četverokut je potrebno iznova izračunati vrijednosti kutova i ostalih veličina. Kako svaki četverokut sadrži dio obje krivulje, one se simultano generiraju. Neka u početnom trenutku tijelo bude orijentirano tako da je kružnica B okomita na podlogu i tijelo započinje gibanje udesno. Stacionarni Kartezijev koordinatni sustav postavimo tako da (za $t = 0$) ishodište leži u točki K_A, a točka K_B se nalazi na y osi (slika 5 prikazuje sustav neko vrijeme poslije $t = 0$). Početne koordinate točke B se mogu lako izračunati iz Pitagorinog poučka: $K_B(0, \sqrt{(2+2\sqrt{2})})$. Neka za neki četverokut $\operatorname{tg}(\lambda)$ označava nagib koji ima pravac na kojemu leži njegova stranica duljine $d\varphi_A$ u odnosu na postavljeni Kartezijev sustav (slika 5). Ako je kut λ asociran s nekim četverokutom, njemu sljedeći će imati asociran $\lambda + d\lambda$. Diferencijal $d\lambda$ proizlazi iz razlike unutarnjih kutova susjednih četverokuta (analogno kutu λ uvodimo kut η asociran s krivuljom f_B koji nije prikazan na slici).



Slika 5. Prikaz tri susjedna četverokuta i smjer osi u Kartezijevom sustavu (proporcije nisu realno prikazane jer su diferencijali krivulje puno manji od udaljenosti K_A i K_B). Ishodište sustava nije prikazano na slici.

Unutarnji kutovi četverokuta mogu se dobiti iz odgovarajućih kutova ζ i α (formule 8 i 9, slika 5):

$$\alpha + \beta = \pi + \zeta \tag{10}$$

$$\gamma + \delta = \pi - \zeta \tag{11}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{l}{l'}\sin\beta + \frac{d\varphi_A}{l'}\sin(\zeta)\right) \tag{12}$$

(u formuli (12) l i l' predstavljaju duljine lijeve i desne dulje stranice u četverokutu). Drugi član u formuli je bitno manji od prvoga, ali nije zanemariv u računu).

Jednom kada su za neki četverokut poznati kutovi λ, η i koordinate točaka na lijevoj strani (koje odgovaraju točkama s desne strane četverokuta prije njega), lako je odrediti koordinate ostale dvije točke:

$$x'_A = x_A + d\varphi_A \cos\lambda, \qquad y'_A = y_A + d\varphi_A \sin\lambda. \tag{13}$$

(I analogni izraz za x_B i y_B pomoću kuta η).

Moguće je dokazati da je projekcija centra mase na podlogu uvijek kolinearna s točkama K_A i K_B i izračunati njezinu udaljenost od njih. Za točke krivulje f_C vrijedi:

$$x_C = x_A - (x_A - x_B)\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi_A}}{l}, \qquad y_C = y_A - (y_A - y_B)\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\varphi_A}}{l} \tag{14}$$

(x_C i y_C su koordinate centra mase u definiranom Kartezijevom sustavu za neku vrijednost φ_A).

Analiza podataka

Program koji generira krivulje je napisan u programskom jeziku Java, a podaci uređeni i analizirani pomoću programa MS Excel i Logger Pro. Sve vrijednosti korištene u programu su tipa double i jedini unos je $d\varphi_A$. Program se sastoji od jedne petlje koja se izvršava dok vrijedi uvjet $3.14159265 \le \varphi_A < 4.71238898$ pri čemu se u svakom izvođenju φ_A povećava za $d\varphi_A$. Svako izvršavanje petlje generira parove koordinati (x_A, y_A), (x_B, y_B) i (x_C, y_C) kao točke krivulja f_A, f_B i f_C. Očekujemo da će broj važećih decimala biti veći za manje vrijednosti $d\varphi_A$. Zato promotrimo koordinate konačnih generiranih točaka krivulja f_A i f_B u ovisnosti o $d\varphi_A$ (točke odgovaraju vrijednosti $\varphi_A = 3\pi/2$):

$\log(d\varphi_A)$	x_A	y_A	x_B	y_B
-3	1.11081014	0.93189577	0.03865997	2.62096797
-4	1.11120341	0.93343642	0.03874147	2.62165217
-5	1.11124702	0.93360999	0.03875403	2.62174017
-6	1.11125072	0.93362442	0.03875464	2.62174604
-7	1.11125103	0.93362557	0.03875463	2.62174633
-8	1.11125105	0.93362569	0.03875462	2.62174635

Sivo su označene znamenke koje se mogu smatrati preciznima jer su za sve koordinate u retku iste kao i za redak ispod. Zadnji redak nema označenih znamenaka jer program nije izvođen za veće preciznosti pa nema referentnih koordinata. Vidljivo je da je apsolutna pogreška zadnje točke reda veličine $d\varphi_A$. Zbog toga što se točke iterativno generiraju, za očekivati je da isto vrijedi i za sve točke prije zadnje, jer bi se svako ranije odstupanje s vremenom samo povećavalo. To potvrđuje uspoređivanje cijelih skupova podataka za različite vrijednosti $d\varphi_A$ (npr. gledanje razlike svake točke iz skupa dobivenog za $d\varphi_A = 10E-4$ i svake desete točke iz skupa dobivenog za $d\varphi'_A = 10E-5$) i zato vrijedi:

$$\Delta \sim d\varphi_A$$

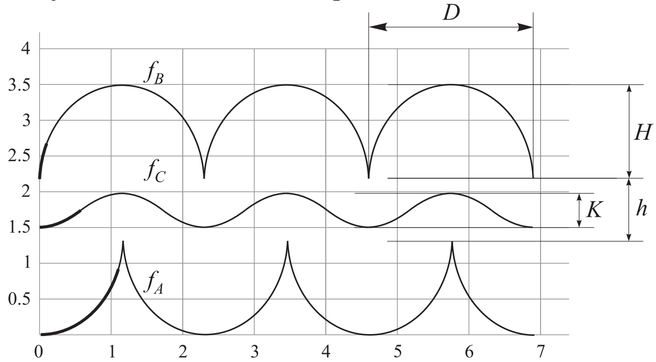
gdje Δ označuje apsolutnu pogrešku.

Vrijednosti paramentara naznačenih na slici 6 iznose (računato za $d\varphi_A = 10E-7$ i zaokruženo na 6 decimala):

$$H \approx 1.358004, \quad D \approx 2.300011, \quad h \approx 0.839365, \quad K \approx 0.447824.$$

Prilikom aproksimacija krivulja koristi se skup točaka dobiven za $d\varphi_A = 10E-6$, ali se zbog ograničenja unosa podataka koristi svaka stota točka. U programu Logger

Pro koristi se opcija automatskog pridruživanja krivulje, te se zatim uspoređivanjem razlike vrijednosti prdruženih funkcija i točaka krivulje ručno modificiraju parametri pridruženih funkcija kako bi se dobila veća preciznost.

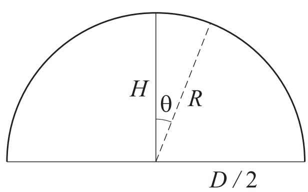


Slika 6. Prikaz krivulja na plohi (koordinatni sustav je isti kao na slici 5). Podebljan je dio krivulje kojeg generira program, dok se ostatak dobiva translacijom i rotacijom tog dijela.

Aproksimacija krivulje f_C na intervalu $[0, D/2]$ izvodi se tako da se interval podijeli na 4 jednaka dijela i svakome se pridruži lokalno konvergirajući polinom četvrtog stupnja: $f_C(x) \approx a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 + e_i x^4$ za $\frac{D}{8}(i-1) \le x < \frac{D}{8} i$.

i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
1	1.55377	0.00040	0.76880	0.05990	−0.35220
2	1.55602	−0.01450	0.77840	0.16640	−0.53970
3	1.70027	−0.97705	3.20410	−2.57100	0.62780
4	1.50872	−0.13310	1.81350	−1.55600	0.35110

Apsolutna pogreška navedene aproksimacije za f_C za svaku je točku manja od $2E-5$. Alternativna metoda bi bila aproksimirati f_C samo za $x \in [0, D/4]$ i iskoristiti simetriju krivulje f_C kako bi se dobio ostatak. Granice pogreške dobivene su grafički, gledanjem razlike krivulja i pridruženih polinoma.



Slika 7.

Krivulja f_A ne može se praktično aproksimirati kao suma elementarnih funkcija $f_n(x)$ zbog toga što joj nagib teži u beskonačno kada se x približava $D/2$. Elementarne funkcije koje dijele to svojstvo presporo konvergiraju da bi bile od koristi. Zato uvodimo polarni koordinatni sustav (prikazan na slici 7) i oblik krivulje f_A opisujemo funkcijom $R(\phi)$ za $\phi \in [0, \pi/2]$ podjelom na 5 intervala različitih duljina. Intervali su različiti zbog drugačijih brzina kojom dodijeljeni polinomi konvergiraju.

Ako uzimamo $\phi_0 = 0$ vrijedi: $R(\phi) \approx a_i + b_i\phi + c_i\phi^2 + d_i\phi^3 + e_i\phi^4$ za $\phi_{i-1} \le \phi < \phi_i$.

i	ϕ_i	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
1	$\pi/8$	1.35800	0.00000	−0.16030	0.00030	0.03100
2	$\pi/4$	1.35790	0.00095	−0.16370	0.00570	0.02770
3	$3\pi/8$	1.36472	−0.02889	−0.11500	−0.02940	0.03710
4	$11\pi/24$	1.60687	−0.82146	0.85930	−0.56270	0.14680
5	$\pi/2$	6.25327	−13.66419	14.17433	−6.70000	1.20800

Apsolutna pogreška navedene aproksimacije za $R(\phi)$ za svaku je točku manja od $1E-5$. Zbog simetrije problema dovoljno je ϕ zamijeniti s $|\phi|$ za proširenje na interval $[-\pi/2, \pi/2]$.

Napomena

Rad sam izradio u sklopu Centra izvrsnosti za fiziku Varaždinske županije. Zahvaljujem se svome mentoru, Marku Petricu, za podršku prilikom istraživanja i izrade rada.

Literatura

[1] C. ENGELHARDT AND C. UCKE, *The two-disc-roller – a combination of physics, art and mathematics*, 2013, `http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/Wobb3e.pdf`

[2] A. T. STEWART, *Two-Circle Roller*, 1966 American Journal of Physics 34, 166–167.

[3] DAVID HIRSCH AND KATHERINE A. SEATON, *The polycons: the sphericon (or tetracon) has found its family*, arXiv 2019, `https://arxiv.org/abs/1901.10677`

[4] HIROSHI IRA, *The Development of the Two-Circle-Roller in a Numerical Way*, 2011, `http://ilabo.bufsiz.jp/Development/2c-english.pdf`