

Fizičar i policajac

Petar Žugec¹

Fizičar projuri kroz crveno svjetlo na semaforu. Zaustavi ga policajac i pita zašto je prošao kroz crveno. Fizičar kaže da mu je zbog gibanja prema semaforu crvena boja Dopplerovim pomakom prešla u zelenu. Policajac ga zatraži da izračuna kojom se brzinom morao gibati da bi se to dogodilo. Fizičar dobije brzinu blisku svjetlosnoj i pokupi kaznu za previsoku brzinu.

- Ako uzmemo da je valna duljina crvene boje 700 nm, a zelene 550 nm, kolikom se brzinom prema vlastitim riječima fizičar morao gibati?
- Ako je indeks loma zraka jednak 1.00029, a policajac uz cestu je uočio plavkastu svjetlost oko fizičara, koliku je najveću valnu duljinu svjetlosti sa semafora fizičar mogao vidjeti? Kojem dijelu elektromagnetskog spektra odgovara ta valna duljina? (Pretpostavimo, za potrebe pojave ovog efekta, da je zbog brzine gibanja kroz zrak došlo do ionizacije fizičareva vozila.) Što je emitiralo plavkastu svjetlost?
- Ako se policajac morao upustiti u potjeru za fizičarom, je li tijekom potjere i dalje mogao vidjeti plavkastu svjetlost?

¹ Autor je s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu;
e-pošta: pzugec@phy.hr

Rješenje

a) Za promatrača u relativnom gibanju s obzirom na izvor elektromagnetskog zračenja dolazi do relativističkog Dopplerovog pomaka²: stvarne promjene frekvencije, valne duljine, količine gibanja i energije zračenja. Pretpostavimo li, radi jednostavnosti, da se semafor nalazi izravno pred fizičarom (na njegovoj liniji kretanja), promjena količine gibanja pojedinih fotona iz snopa svjetlosti određena je Lorentzovom transformacijom kao:

$$p_f = \gamma \left(p_s + \frac{vE_s}{c^2} \right) \quad (1)$$

gdje su p_s i E_s količina gibanja i energija fotona u sustavu semafora, p_f je količina gibanja fotona u sustavu fizičara, dok je $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ konvencionalno definiran Lorentzov faktor. Pri tome je v relativna brzina između fizičara i semafora, uz c kao brzinu svjetlosti u vakuumu. Kako za energiju E i količinu gibanja p fotona u svakom sustavu vrijedi $E = pc$, izravno slijedi:

$$p_f = p_s \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = p_s \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (2)$$

Okoristimo li se još i vezom valne duljine λ i količine gibanja fotona: $p = h/\lambda$, uz h kao Planckovu konstantu, konačno dolazimo do:

$$\lambda_f = \lambda_s \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \quad (3)$$

Ovo je poznat izraz za tzv. *relativistički Dopplerov pomak prema plavom*. Kako je valna duljina crvene svjetlosti u sustavu semafora $\lambda_s = 700$ nm, a zelene svjetlosti u sustavu fizičara $\lambda_f = 550$ nm, inverzijom izraza (3) za brzinu fizičara dobivamo:

$$v = \frac{\lambda_s^2 - \lambda_f^2}{\lambda_s^2 + \lambda_f^2} c \approx 0.24c. \quad (4)$$

Fizičar se, dakle, prema vlastitim riječima gibao brzinom od 24 % brzine svjetlosti: približno 71 000 kilometara u sekundi, tj. gotovo dva puta oko Zemljina ekvatora u sekundi! Stoga nas i ne čudi kazna za previsoku brzinu.

b) Pitanje je sugestivno postavljeno kako bi odmah asociiralo na Čerenkovljevo zračenje. Do emisije Čerenkovljeva zračenja dolazi kad nabijena čestica prolazi kroz medij indeksa loma n brže od brzine svjetlosti u tom mediju ($v > c/n$): efekt koji bismo mogli nazvati *probojem svjetlosnog zida*, u analogiji s probojem zvučnog zida. Pri tome se, naravno, čestica još uvijek giba brzinom manjom od brzine svjetlosti u vakuumu ($v < c$), koja je granična brzina prostiranja bilo čega što postoji u prirodi. Upravo smo zbog potrebe za nabijenim objektom sugerirali da dolazi do ionizacije fizičareva vozila.

Mehanizam Čerenkovljeva zračenja je sljedeći. Prolaskom kroz medij visokoenergijska nabijena čestica uzrokuje naglu polarizaciju materijala (u našem slučaju zraka), koja

² Za relativistički Dopplerov pomak elektromagnetskog zračenja nužno je i dovoljno da se izvor i promatrač gibaju jedan spram drugoga. Za "mehanički" Dopplerov pomak zvuka nije nužno njihovo relativno gibanje, već je potrebno gibanje izvora i/ili slušatelja s obzirom na medij (npr. zrak). Zamislimo samo ekstreman slučaj kada se i slušatelj i izvor zvuka gibaju kroz medij istom, nadzvučnom brzinom, u istom smjeru i tako da slušatelj bježi od izvora. Izvor spram slušatelja miruje, no može li slušatelj uopće čuti zvuk s izvora?

se zatim relaksira emisijom elektromagnetskog zračenja. Dok se čestica giba brzinom manjom od brzine svjetlosti u materijalu, takvo relaksacijsko zračenje uspijeva vratiti energiju čestici. Međutim, kad čestica nadmaši brzinu elektromagnetskog vala, povratno zračenje je ne uspijeva sustići te se zaostala energija oslobađa u obliku Čerenkovljeva zračenja. Dakle, Čerenkovljevo zračenje *ne emitira nabijena čestica, već medij*. Pri tome valja naglasiti da Čerenkovljevo zračenje nije isključivo plavkasto; štoviše, njegov najveći dio nalazi se van spektra vidljive svjetlosti. Naime, do određene granice količina Čerenkovljeva zračenja raste kako valna duljina zračenja pada pa se tako njegov najveći dio tipično nalazi unutar ultraljubičastog dijela spektra. Međutim, mi ga opažamo kao plavkasto (što se tipično može vidjeti u nuklearnim reaktorima) iz istog razloga zašto nam se dnevno nebo čini plavim³: jer osjetljivost ljudskog oka naglo opada prema ljubičastom dijelu spektra, brže negoli raste količina ljubičaste svjetlosti u spektru Čerenkovljeva zračenja.

Vratimo se na postavljeni problem. Iz uvjeta da je fizičar prouzročio emisiju Čerenkovljeva zračenja slijedi da se morao gibati najmanje brzinom širenja svjetlosti u zraku: $v_{\min} = c/n$. Uvrštavanjem ove vrijedosti u (3) slijedi da je maksimalna valna duljina svjetlosti sa semafora (tj. minimalni Dopplerov pomak) koju je mogao vidjeti jednaka:

$$\lambda_f^{(\max)} = \lambda_s \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \approx 8.4 \text{ nm} \quad (5)$$

što odgovara dijelu spektra na prijelazu između ekstremnog ultraljubičastog i mekog X-zračenja.

c) *U sustavu medija (za nas zraka) Čerenkovljevo zračenje emitira se pod jasno određenim kutom θ_z s obzirom na smjer gibanja nabijene čestice, a ovisnim o njezinoj brzini kao:*

$$\cos \theta_z = \frac{c}{nv_f}. \quad (6)$$

Kako u našem slučaju ulogu nabijenog objekta igra ionizirano fizičarevo vozilo, v_f je upravo fizičareva brzina. U tipičnim materijalima (pozitivnog indeksa loma) Čerenkovljevo zračenje širi se unaprijed – naravno, pod kutnim odklonom θ_z s obzirom na smjer gibanja nabijenog objekta. Stoga bismo isprva mogli pomisliti da policajac tijekom potjere – jer zaostaje za fizičarom – više ne može vidjeti Čerenkovljevo zračenje, odnosno plavkast obris oko fizičara. Međutim, zbog brzine policajčeva gibanja tijekom potjere dolazi do promjene smjera zraka svjetlosti u njegovu sustavu, u kojem se smjer zraka može sasvim okrenuti. Drugim riječima, pri dovoljno visokoj brzini potjere policajac počinje sustizati zrake svjetlosti te ih može početi opažati. Odgovor na postavljeno pitanje, dakle, ovisi o policajčevoj brzini.

Provedimo mali račun kako bismo dobili i konkretniji odgovor. Moramo uzeti u obzir da se u mediju zrake svjetlosti šire sporije nego u vakuumu: brzinom c/n . Neka su V_z^{\parallel}

³ Privid plavetnila dnevnog neba nastaje Rayleighovim raspršenjem bijele Sunčeve svjetlosti na atomima i molekulama zraka u atmosferi. Pri tome se puno više raspršuje svjetlost kraćih valnih duljina, što znači da je unutar vidljivog dijela spektra daleko najveći udio ljubičaste svjetlosti preusmjeren prema promatraču koji ne gleda izravno u Sunce. No ljudsko oko izrazito je slabo osjetljivo na ljubičastu svjetlost te je njeno opažanje potisnuto u korist u-spektru-susjedne, plave boje. I dok je osjetljivost oka na pojedine boje dominantan efekt, konačno nijansi plave boje neba kakvu vidimo još doprinosi i činjenica da Sunce zrači više plave svjetlosti od ljubičaste, zajedno sa spektralnom ovisnošću apsorpcije svjetlosti u atmosferi.

i V_z^\perp komponente brzine Čerenkovljevih zraka svjetlosti u sustavu zraka, u smjeru (\parallel) i okomito na smjer (\perp) potjere:

$$V_z^\parallel = \frac{c}{n} \cos \theta_z = \frac{c^2}{n^2 v_f} \quad (7)$$

$$V_z^\perp = \frac{c}{n} \sin \theta_z = \frac{c \sqrt{n^2 v_f^2 - c^2}}{n^2 v_f}. \quad (8)$$

Čisto je geometrijska činjenica da: $\cos \theta_z = V_z^\parallel / \sqrt{(V_z^\parallel)^2 + (V_z^\perp)^2}$. Sada nam treba relativistička transformacija tih komponenata brzine, kako bismo odredili odgovarajuće komponente V_p^\parallel i V_p^\perp u sustavu policajca. Transformacija poprima ponešto drukčiji oblik za paralelnu komponentu:

$$V_p^\parallel = \frac{V_z^\parallel - v_p}{1 - V_z^\parallel v_p / c^2} = \frac{c^2 - n^2 v_f v_p}{n^2 v_f - v_p} \quad (9)$$

od one za okomitu:

$$V_p^\perp = \frac{V_z^\perp \sqrt{1 - v_p^2 / c^2}}{1 - V_z^\parallel v_p / c^2} = \frac{\sqrt{(n^2 v_f^2 - c^2)(c^2 - v_p^2)}}{n^2 v_f - v_p} \quad (10)$$

gdje je v_p policajčeva brzina s obzirom na zrak. Odavde možemo izračunati kut θ_p Čerenkovljevih zraka u policajčevu sustavu. Radi kasnije jednostavnosti kut θ_p s obzirom na smjer gibanja fizičara zamijenit ćemo kutom Θ_p s obzirom na suprotan smjer (tako da $\theta_p = \pi - \Theta_p$) jer nas sad zanima okret svjetlosnih zraka prema policajcu, a Θ_p će na prirodni način iskazivati kutni otklon u njegovu smjeru. Prema tome: $\cos(\pi - \Theta_p) = V_p^\parallel / \sqrt{(V_p^\parallel)^2 + (V_p^\perp)^2}$. Uz $\cos(\pi - \Theta_p) = -\cos \Theta_p$, korištenjem (9) i (10), nakon malo sređivanja preostaje:

$$\cos \Theta_p = \frac{n^2 v_p v_f - c^2}{\sqrt{n^2(n^2 - 1)v_p^2 v_f^2 + c^2(n^2 v_f^2 - 2n^2 v_f v_p + v_p^2)}}. \quad (11)$$

Kako je komponenta brzine Čerenkovljeva zračenja u smjeru policajčeva gibanja uvijek manja od brzine svjetlosti u vakuumu (tj. najviše c/n), policajac uvijek može izabrati dovoljno visoku brzinu v_p da se (u njegovu sustavu) zrake svjetlosti usmjere prema njemu pod po volji uskim kutom Θ_p . Potrebnu brzinu lako bismo našli rješavanjem jednakosti (11) koja se svodi na kvadratnu jednadžbu po v_p , čije puno rješenje – za dva slobodna parametra: v_f i Θ_p – nećemo dalje raspisivati.

Umjesto toga, dodatno ćemo ograničiti problem pretpostavkom da policajac lovi fizičara istom brzinom kojom fizičar odmiče: $v_p = v_f = v$, što poistovjećujemo s brzinom potjere v . Primijetimo da u tom slučaju za paralelnu komponentu brzine zrake iz (9) slijedi: $V_p^\parallel = (c^2 - n^2 v^2) / (n^2 - 1)v$, što je pod uvjetom emisije Čerenkovljeva zračenja ($v > c/n$) uvijek negativno: $V_p^\parallel < 0$. Drugim riječima, za $v_p = v_f$ Čerenkovljeve zrake u sustavu policajca uvijek se šire u stražnje kutove, u potpunoj suprotnosti s naivnim zaključkom koji bismo izvukli na temelju kuta emisije u sustavu zraka, bez uzimanja u obzir transformacije smjera zrake između sustava. Napokon, uvrštavanjem zahtjeva $v_p = v_f = v$ u (11) preostaje bitno pojednostavnjena jednadžba

koju treba riješiti po v , a čije je rješenje:

$$v = \frac{c}{\sqrt{n^2 \sin^2 \Theta_p + \cos^2 \Theta_p}}. \quad (12)$$

Dakle, to je brzina potjere pri kojoj će se kut Čerenkovljeva zračenja u sustavu zraka i transformacija smjera svjetlosne zrake tako poklopiti da je njezin kutni otklon u sustavu policajca jednak Θ_p . Provedimo mali račun. Fizičarevo vozilo nije točkasto pa pretpostavimo da se radi o automobilu čiji je bočni rub sa suvozačke strane na lateralnoj udaljenosti od 0.7 m od policajčeva oka (dio automobila s kojeg Čerenkovljeva svjetlost može doći do policajčeva oka pod najvećim kutom). Uz daljnju pretpostavku da je policajac tijekom potjere 10 m iza fizičara, slijedi da je najveći kut pod kojim može vidjeti Čerenkovljevu svjetlost jednak: $\Theta_p = \arctg(0.7 \text{ m}/10 \text{ m}) \approx 4^\circ$, što u skladu s (12) vodi na najmanju potrebnu brzinu potjere od $v = (1 - 1.4 \cdot 10^{-6})c = 0.9999986c$.

Još valja napomenuti par stvari. Osim promjene smjera zrake svjetlosti, u policajčevu sustavu također dolazi i do Dopplerova pomaka Čerenkovljeva zračenja. Stoga, ako govorimo o Čerenkovljevu zračenju koje je plavkasto u sustavu medija, odnosno o istome zračenju koje je policajac vidio kako plavkasto dok je ispočetka stajao uz cestu, onda će se tijekom potjere energija istih fotona u njegovu sustavu transformirati u skladu s Lorentzovom transformacijom:

$$E_p = \gamma(E_z - vp_z \cos \theta_z) = \frac{E_z}{n} \sqrt{\frac{n-1}{n+1} (n^2 + \text{ctg}^2 \Theta_p)} \quad (13)$$

uz E_z i $p_z = E_z/c$ kao energiju i količinu gibanja Čerenkovljevih fotona u sustavu zraka (no ne u zraku⁴) te E_p kao energiju istih fotona u sustavu policajca. Posljednju jednakost dobili smo korištenjem izraza (6) i (12) koji su, podsjećamo, kompatibilni samo pod uvjetom $v_p = v_f = v$. Uvrštavanjem ranijega kuta $\Theta_p = 4^\circ$ dobivamo omjer $E_p/E_z \approx 0.17$. Uzmimo $\lambda_z = 450 \text{ nm}$ za valnu duljinu relevantne plavkaste nijanse Čerenkovljeva zračenja u sustavu zraka. Prema tome, u opisanim okolnostima Čerenkovljevu svjetlost koja mu je u sustavu zraka izgledala plavkasto policajac tijekom potjere “vidi” kao onu kojoj odgovara vakuumska valna duljina $\lambda_p = \lambda_z/0.17 \approx 2600 \text{ nm}$, što odgovara infracrvenom zračenju! Za izabrani Θ_p dobili smo, dakle, manju energiju fotona u policajčevu sustavu, odnosno pomak prema infracrvenom. No istovremeno možemo primijetiti da zbog funkcije kotangens izraz (13) raste kako Θ_p pada. To znači da postoji neka prijelomna vrijednost Θ'_p pri kojoj će omjer E_p/E_z narasti do jedinice – tj. energija fotona u policajčevu sustavu ostat će jednaka onoj u sustavu zraka – te će se daljnjim smanjenjem kuta Θ_p povećavati dalje od izvorne energije iz sustava zraka. Ovu prijelomnu vrijednost Θ'_p lako nalazimo rješavanjem jednakosti (13) uz $E_p = E_z$, a iz (12) odmah određujemo i pripadnu, prijelomnu brzinu potjere v' :

$$\Theta'_p = \arctg \sqrt{\frac{n-1}{2n^2}} \implies v' = \frac{c}{n} \sqrt{2n-1}. \quad (14)$$

Za zadanu vrijednost $n = 1.00029$ dobivamo $\Theta'_p \approx 0.69^\circ$ te $v' \approx (1 - 4.2 \cdot 10^{-8})c = 0.99999958c$. Dakle, pod manjim upadnim kutovima u policajčevu sustavu, a koji

⁴ Količina gibanja fotona u mediju posve je netrivialan problem, poznat kao Abraham-Minkowski dilema. Ona se danas smatra razriješenom, no diskusija o njoj daleko nadilazi okvire ovog priloga. U svakom slučaju, mi smo iz opravdanih razloga koristili relaciju $p = E/c$ koja vrijedi za fotone u vakuumu. Naime, proces uočavanja fotona odvija se u oku, neovisno o mediju kojim se oni prethodno propagiraju. Pri tome, fotone one boje kojoj u vakuumu odgovaraju određeni parametri (valna duljina, količina gibanja) oko uvijek prepoznaje kao “nositelje” iste boje, neovisno o okolnome mediju ili mediju samog oka. Stoga je za potrebe raspoznavanja boja opravdano koristiti vakuumsku količinu gibanja u Lorentzovim transformacijama.

se postižu pri višim brzinama potjere od v' , policajac “uočava” da je Čerenkovljevo zračenje Dopplerovim pomakom potisnuto prema ultraljubičastom dijelu spektra, a ovisno o brzini potjere i dalje: prema X-zračenju ili čak γ -zračenju.

Druga stvar vrijedna napomene vezana je uz razmatranje komplementarno prethodnome: kad umjesto zračenja koje je izvorno plavkasto u sustavu zraka, promatramo zračenje koje je plavkasto nakon transformacije u policajčev sustav – ono koje policajac vidi kao plavkasto *tijekom potjere*. U tom slučaju moramo odrediti “boju”, odnosno energiju E_z Čerenkovljevih fotona iz sustava zraka, koji će nakon transformacije imati željenu vrijednost energije E_p svojstvene plavkastom zračenju. No sada bismo morali uzeti u obzir da optički odaziv svakog materijala ovisi o boji upadnog zračenja. Drugim riječima, indeks loma svakog materijala ovisi o frekvenciji, odnosno valnoj duljini ili energiji zračenja! Sva dosadašnja razmatranja, počevši od uvjeta emisije Čerenkovljeva zračenja i pripadnog kuta emisije iz (6) ovise o energiji emitiranih Čerenkovljevih fotona kroz funkcionalnu ovisnost $n(E_z)$, svojstvenu svakom pojedinom materijalu. Stoga bismo za potrebe određivanja energije E_z fotona koji će u policajčevu sustavu pod upadnim kutem Θ_p imati energiju E_p plavkastog zračenja morali riješiti složenu jednadžbu:

$$E_p = \frac{E_z}{n(E_z)} \sqrt{\frac{n(E_z) - 1}{n(E_z) + 1} [n^2(E_z) + \text{ctg}^2 \Theta_p]} \quad (15)$$

uz danu (nama ovdje nepoznatu) funkcionalnu ovisnost $n(E_z)$. Koliko god bili bitni, ovdje se nećemo upuštati u te tehničke detalje, već ćemo ponovno provesti jednostavan račun pod pretpostavkom da je indeks loma zraka za sve zračenje jednak zadanoj vrijednosti. Ranije dobiveni omjer $E_p/E_z \approx 0.17$ za $\Theta_p = 4^\circ$ sada uz zahtjev plavkaste boje u policajčevu sustavu ($\lambda_p = 450$ nm) znači da bi izvornome zračenju u sustavu zraka trebala odgovarati vakuumska valna duljina $\lambda_z = 0.17\lambda_p \approx 77$ nm, što je duboko unutar ultraljubičastog spektra! Međutim, upravo zbog funkcionalne ovisnosti $n(E_z)$ tipično uopće nema Čerenkovljeva zračenja na tako visokim (u sustavu medija) energijama zato jer je ponašanje indeksa loma takvo da se pri višim energijama E_z više ne može zadovoljiti uvjet emisije $v > c/n(E_z)$! Stoga je malo vjerojatno da bi policajac tijekom potjere mogao vidjeti plavkastu svjetlost s rubova fizičareva vozila. Međutim, mogao bi je vidjeti s dijelova vozila izravno pred sobom, pod niskim upadnim kutovima Θ_p ! Naime, za niske energije zračenja indeks loma $n(E_z)$ vrlo sporo se mijenja, tj. ne pokazuje tako drastično ponašanje kao pri višim energijama te je približno konstantnog iznosa n_0 . Ta činjenica, u kombinaciji s opažanjem da za $\Theta_p \rightarrow 0$ kotangens iz (15) izrazito raste i dominira izrazom, vodi na zaključak da član E_z pred korijenom mora biti vrlo malen jer je jedini koji može kompenzirati rast kotangensa (naravno, sve s ciljem da preostane željena vrijednost energije E_p). Ovo nam omogućava identificirati aproksimativno ponašanje energije zračenja u sustavu zraka potrebne da bi policajac vidio plavkastu svjetlost pod niskim upadnim kutovima:

$$\lim_{\Theta_p \rightarrow 0} E_z = E_p n_0 \sqrt{\frac{n_0 + 1}{n_0 - 1}} \text{tg } \Theta_p \quad (16)$$

U tim uvjetima, dakle, potrebni su izvorno niskoenergijski Čerenkovljevi fotoni kako bi se u policajčevu sustavu Dopplerovim pomakom našli unutar vidljivog dijela spektra. A u tipičnim okolnostima, ako Čerenkovljeva zračenja uopće ima, tada ga u sustavu medija doista ima i na niskim energijama, iako u manjoj količini, približno proporcionalnoj samoj energiji zračenja E_z .