ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2020. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/280.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3721. Dokaži da je broj

$$27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$$

djeljiv s 26 460.

3722. Riješi jednadžbu

$$2x^2 - 15x + 5 + \sqrt{2x^2 - 15x + 11} = 0.$$

3723. Nađi sva cjelobrojna rješenja sistema jednadžbi

$$3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0$$

$$5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0.$$

3724. Postoje li strogo pozitivni cijeli brojevi x i y takvi da je $x^2(x^2 + y^2) = y^{100}$?

3725. Riješi jednadžbu

$$2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} = 0, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

3726. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^{2021}}{b^{2019}} + \frac{b^{2021}}{c^{2019}} + \frac{c^{2021}}{a^{2019}} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

3727. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC produže se preko vrha C do točaka E i F tako da je $|CE| = |BC| = a$ i $|CF| = |AC| = b$. Točke D i G su takve da je svaki od četverokuta $CBDE$ i $ACFG$ romb. Sjecište pravaca BG i AC je točka M, a sjecište od AD i BC je točka N. Dokaži da je $|CM| = |CN|$.

3728. Neka su a, b, c duljine stranica, v_a, v_b, v_c duljine visina i d_a, d_b, d_c udaljenosti od vrhova do ortocentra šiljastokutnog trokuta. Dokaži jednakost

$$v_a d_a + v_b d_b + v_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

3729. Trokut ABC je šiljatokutan ili pravokutan. U njega je upisan kvadrat $DEFG$ tako da je E, $F \in \overline{AB}$, $D \in \overline{AC}$ i $G \in \overline{BC}$. Kolika je površina kvadrata, ako su duljine stranica trokuta a, b, c. Izračunaj površinu kvadrata ako je $A(-3, 6)$, $B(6, -6)$, $C(8, 8)$.

3730. Ako u ravnini paralelograma $ABCD$ postoji točka M takva da je

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$$

dokaži da je paralelogram pravokutnik.

3731. Na stranicama trokuta ABC s vanjske strane su konstruirani kvadrati sa središtima A_1, B_1, C_1. Neka su a_1, b_1, c_1 duljine stranica trokuta $A_1B_1C_1$ i S površina trokuta ABC. Dokaži

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S.$$

3732. Točke $A(-3, 4)$, $B(5, 4)$, C, D su vrhovi pravokutnika, a na pravcu $x - 4y + 7 = 0$ se nalazi promjer pravokutniku $ABCD$ opisane kružnice. Kolika je njegova površina?

3733. Dokaži da je suma kvadrata duljina bridova trostrane piramide, četiri puta veća od sume kadrata udaljenosti između polovišta njezinih mimoilaznih bridova.

3734. Promatraj polinome s kompleksnim koeficijentima $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ s nultočkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ s nultočkama $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Ako su $a_1 + a_3 + \ldots$ i $a_2 + a_4 + \ldots$ realni brojevi, dokaži da je $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ također realan broj.

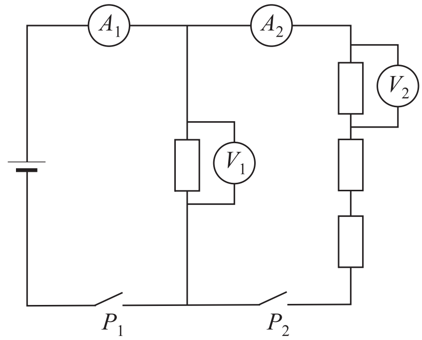
B) Zadatci iz fizike

OŠ – 462. U čašu mase 90 grama i unutarnjeg promjera 5 centimetara učenik je ulio sirup do visine 2 centimetra. Dolio je vodu tako da je ukupna visina tekućine bila 12 centimetara. Masa čaše i tekućine iznosila je 333.5 grama. Gustoća vode je 1000 kg/m^3. Kolika je gustoća sirupa?

OŠ – 463. Ako se trese boca u kojoj je gazirana tekućina tlak u njoj može biti pet puta veći od atmosferskog tlaka. Kolika sila djeluje tada na čep promjera 2 centimetra? Atmosferski tlak je oko 1000 hPa.

OŠ – 464. Učitelj fizike voli nedjeljom dugo hodati. U prvih je 2 sata prešao 10 kilometara, zatim je idućih 45 minuta hodao brzinom 4 kilometra na sat, a u posljednjih je pola sata prešao samo 1.5 kilometara. Usporedite njegove brzine na prvoj i drugoj polovici puta.

OŠ – 465. Svi otpornici na shemi su jednaki i otpor im je 30 Ω. Kad su zatvorena oba prekidača ampermetar A_1 mjeri struju od 800 miliampera. Koliko pokazuju ostali instrumenti? Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se prekidač P_2 otvori?



1714. Tri jednaka tanka homogena štapa mase m i duljine l spojena su u jednakostranični trokut (kao glazbeni triangl). Trokut je obješen u jednom vrhu, tako da se može njihati u ravnini svojih štapova. Odredi period malih oscilacija dobivenog njihala.

1715. Dva vlaka gibaju se jedan prema drugome. Prvi ima $n-1$ vagon i lokomotivu, a drugi n^2-1 vagon i lokomotivu. U nekom trenutku prednji krajevi lokomotive obaju vlakova su poravnati, a 10 s kasnije prednji kraj lokomotive jednog vlaka i zadnji kraj zadnjeg vagona drugog, poravnati su. Zadnji krajevi zadnjeg vagona oba vlaka poravnali su se za 80 s. Ako su svi vagoni i lokomotive jednake duljine, a brzina prvog vlaka je dvostruko veća od brzine drugog, odredi n.

1716. U balon oblika kugle, mase 2 g pušteno je 2 litre zraka gustoće 1.3 kg/m^3. Na balon djeluje stalna vanjska sila koja mu je u trenutku početka gibanja dala akceleraciju 1 m/s^2. Ako je viskoznost zraka 0.0195 Pa$\cdot$s i ako na kuglu polumjera r koja se giba brzinom v u fluidu viskoznosti η prema Stokesovom zakonu djeluje sila kojom se fluid opire gibanju po iznosu jednaka $6\pi\eta rv$, odredi kolika će biti brzina balona pri jednolikom gibanju.

1717. Otpornik otpora 5 Ω uronjen je u 50 ml vode u posudi. Dvije baterije nepoznatog napona i taj otpornik spojimo serijski u strujni krug. Pomoću zapornog sata i termometra izmjerimo brzinu porasta temperature. Nakon toga jednoj bateriji zamijenimo polove i ponovimo mjerenje. Odredi napon svake baterije ako smo mjerenjem dobili porast temperature 0.01 K/s u prvom mjerenju i 0.005 K/s u drugom.

1718. Odredi površinu Zemlje koja se može odjednom vidjeti iz točke s 415 km visine (orbita Međunarodne svemirske postaje ISS). Radijus Zemlje je 6371 km. Koliki se postotak Zemljine površine tada vidi?

1719. Oko patuljastog planeta gustoće 2700 kg/m^3 kruži satelit 150 km iznad površine. Ako je ophodno vrijeme satelita 2 sata i 30 minuta, odredi ubrzanje slobodnog pada na površini patuljastog planeta.

1720. Prilikom fisije nuklearnog goriva nastaju male količine tricija, vodikovog izotopa ^{3}H, vremena poluraspada 12.312 godina. Ako je aktivnost uzorka tricija $3\cdot 10^{11}$ Bq, koliku masu tricija sadrži uzorak?

Zadatke 1715, 1716 i 1717 postavio je učenik XV. gimnazije u Zagrebu, Filip Vučić, na čemu mu se uredništvo MFL-a zahvaljuje.

C) Rješenja iz matematike

3693. *Broj*

$$123456789(10)(11)(12)(13)(14)$$

napisan je u bazi 15. Koliki je ostatak dijeljenja tog broja sa 7?

Rješenje. Zadani broj možemo zapisati:

$$A = 15^{13} + 2\cdot 15^{12} + 3\cdot 15^{11} + \ldots$$
$$+ 11\cdot 15^3 + 12\cdot 15^2 + 13\cdot 15 + 14.$$

Koristimo poznatu formulu:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2$$
$$+ \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Odavde vidimo da je $15^n - 1$ djeljivo sa 7, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada zapišimo:

$$\begin{aligned}A = (15^{13} - 1) + 2(15^{12} - 1) + 3(15^{11} - 1)\\ + \ldots + 11(15^3 - 1) + 12(15^2 - 1)\\ + 13(15 - 1) + 105.\end{aligned}$$

Kako su, prema gore navedenom, svi brojevi u zagradama djeljivi sa 7 i $105 = 7 \cdot 15$ slijedi $7 \mid A$. Dakle, ostatak dijeljenja danog broja sa 7 je 0.

Oliver Kukas (3),
Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

3694. *Dokaži da za svaki trokut sa stranicama duljina a, b, c vrijedi nejednakost*

$$a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \leq \frac{2}{3}s^2,$$

gdje je s poluopseg trokuta. Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna s

$$s(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2) \leq \frac{2}{3}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{6}(a+b+c)^2 \leq a^2+b^2+c^2$$

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2+b^2+c^2$$

$$2(ab+bc+ca) \leq 2(a^2+b^2+c^2).$$

Ova nejednakost je ekvivalentna s

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3695. *Rješenja kvadratne jednadžbe*

$$x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$$

su x_1 i x_2. Dokaži da su x_1^3 i x_2^3 rješenja od

$$x^2 - 2b(b^2+3c^2)x + (b^2-c^2)^3 = 0.$$

Rješenje. Iz prve jednadžbe

$$x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$$

slijedi

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(b^2-c^2)}}{2} = b \pm c$$

tj. $x_1 = b - c$, $x_2 = b + c$.

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 &= (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\\ &= (b-c+b+c)((b-c)^2\\ &\quad - (b-c)(b+c) + (b+c)^2)\\ &= 2b(b^2+3c^2).\end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe

$$x^2 - 2b(b^2+3c^2)x + (b^2-c^2)^3 = 0,$$

prema Vièteovim formulama slijedi

$$x_1' + x_2' = 2b(b^2+3c^2).$$

Prema tome je

$$x_1^3 + x_2^3 = x_1' + x_2',$$

$$\begin{aligned}x_1^3x_2^3 &= (x_1x_2)^3 = [(b-c)(b+c)]^3\\ &= (b^2-c^2)^3 = x_1'x_2'.\end{aligned}$$

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

3696. *Nađi sve parove prostih brojeva p i q takve da je*

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

Rješenje. 1) Ako p i q daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, tj. ako je $p \equiv q \pmod 3$ onda je $p^3 - p^5 \equiv p^2 \pmod 3 \implies p^3 \equiv p^2(1+p^3) \pmod 3$:

a) Ako $p \not\equiv 0 \pmod 3$, onda je $p \equiv (1+p^3) \pmod 3 \implies p^3 - p \equiv -1 \pmod 3$ tj. $3 \nmid (p^3 - p)$. No, kako je $p^3 - p = (p-1) \cdot p \cdot (p+1)$, umnožak tri uzastopna prirodna broja, jedan od njih je sigurno djeljiv s 3, pa $3 \mid (p^3 - p) \equiv q \pmod 3$. To je proturječje.

b) Ako je $p \equiv q \equiv 0 \pmod 3$, onda je $p = q = 3$ i $3^3 - 3^5 = (3+3)^2$, a to je nemoguće.

Dakle, ne vrijedi $p \equiv q \pmod 3$, odnosno brojevi p i q sigurno daju različite ostatke pri dijeljenju s 3.

2) Ako je $p \equiv 1 \pmod 3$ i $q \equiv 2 \pmod 3$, tada je $p^3 - q^5 \equiv 1 - 2^5 \equiv 2 \pmod 3$ i $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$. Kako je ovo nemoguće ovaj slučaj ne daje rješenje.

3) Ako je $p \equiv 2 \pmod 3$ i $q \equiv 1 \pmod 3$, tada je $p^3 - q^5 \equiv 8 - 1 \equiv 1 \pmod 3$ i $(p+q)^2 \equiv 0 \pmod 3$, pa opet ne vrijedi $p^3 - q^5 \equiv (p+q)^2 \pmod 3$ i nemamo rješenja.

4) Ako je $p \equiv 0 \pmod 3$ i $q \not\equiv 0 \pmod 3$. Tada je $p = 3$ i lijeva strana jednakosti je negativan broj, a to je očito nemoguće (jer je desna pozitivna kao potpun kvadrat).

5) Ako je $q \equiv 0 \pmod 3$ i $p \not\equiv 0 \pmod 3$. Sada je $q = 3$ i $p^3 - 243 = (p+3)^2$

$$\Longrightarrow p^3 - p^2 - 6p - 252 = 0.$$

Jer je $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, mogući korijeni p ovog polinoma su (prosti) djelitelji slobodnog člana, tj. $p \in \{2, 3, 7\}$. Neposrednom provjerom vidimo da je $p = 7$ nultočka, pa dijeljenjem polinoma je:

$$(p-7)\underbrace{(p^2 + 6p + 36)}_{>0} = 0.$$

Dakle, jedino rješenje zadatka je

$$(p, q) \in \{(7, 3)\}.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3697. *Nađi jednadžbu pravca kroz točku* $(2, 5)$ *koji s pravcem* $x - 3y + 6 = 0$ *zatvara kut od* 45°.

Rješenje. Iz $x - 3y + 6 = 0$ imamo $y = \frac{1}{3}x + 2$ tj. $k_1 = \frac{1}{3}$. Tražimo pravac $y = kx + l$. Kako su on prolazi točkom $(2, 5)$ vrijedi $5 = 2k + l \Longrightarrow l = 5 - 2k$ tj.

$$p \ldots y = kx + 5 - 2k.$$

Formula za kut između dvaju pravaca glasi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \Longrightarrow 1 = \left| \frac{k - \frac{1}{3}}{1 + \frac{k}{3}} \right|$$

tj.

$$\left| \frac{3k - 1}{k + 3} \right| = 1.$$

$$1^\circ \qquad \frac{3k-1}{k+3} = 1, \qquad k = 2$$

$$2^\circ \qquad \frac{3k-1}{k+3} = -1, \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, imamo dva pravca koja zadovoljavaju uvjete zadatka:

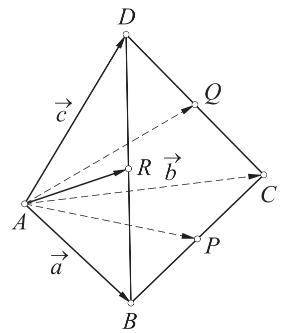
$$p_1 \ldots y = 2x + 1$$

$$p_2 \ldots y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3698. *Neka je ABCD tetraedar takav da su težišnice trokuta ABC, ACD, ABD, iz vrha A, međusobno okomite. Dokaži da su duljine bridova tetraedra koji sadrže vrh A jednake duljine.*

Rješenje. Neka je dani tetraedar razapet vektorima $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$, kao na slici.



Sada je

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0 \\ &\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = 0 \qquad (1) \\ &\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 \\ &(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c}) = 0 \qquad (2) \\ &\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 \\ &(\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = 0 \qquad (3) \\ &\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c}^2 = 0. \end{aligned}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = -\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c},$$

što se i tvrdilo.

Oliver Kukas (3), Zabok

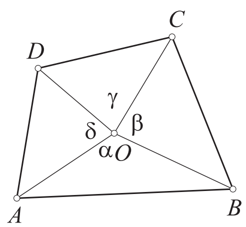
3699. *Unutar konveksnog četverokuta ABCD površine P dana je točka O, pri čemu vrijedi*

$$|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2=2P.$$

Dokaži da je ABCD kvadrat i O njegovo središte.

Rješenje. Prema formuli za površinu trokuta imamo:

$$\begin{aligned}2P&=|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha+|BO|\cdot|CO|\cdot\sin\beta\\&\quad+|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\gamma+|DO|\cdot|AO|\cdot\sin\delta\\&\leqslant|AO|\cdot|BO|+|BO|\cdot|CO|\\&\quad+|CO|\cdot|DO|+|DO|\cdot|AO|\\&\leqslant\frac{|AO|^2+|BO|^2}{2}+\frac{|BO|^2+|CO|^2}{2}\\&\quad+\frac{|CO|^2+|DO|^2}{2}+\frac{|DO|^2+|AO|^2}{2}\\&=|AO|^2+|BO|^2+|CO|^2+|DO|^2.\end{aligned}\tag{1}$$

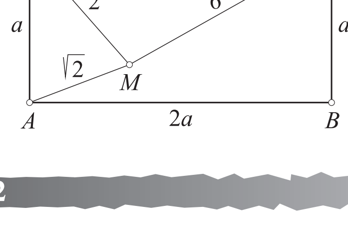


Dokazali smo nejednakost (1), a jednakost se postiže ako je $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90^\circ$ i $|AO|=|BO|=|CO|=|DO|$ tj. ako je dani četverokut kvadrat i točka O njegovo središte.

Oliver Kukas (3), Zabok

3700. *Unutar pravokutnika ABCD dana je točka M takva da je* $|AM|=\sqrt{2}$, $|DM|=2$ *i* $|CM|=6$. *Izračunaj površinu pravokutnika ako je* $|AB|=2|AD|$.

Rješenje. Neka je $|AD|=a$. Tada je $|AB|=2a$, $\alpha=\sphericalangle MDA$. Tvrdnja: $P=2a^2$.



Primjenom kosinusova poučka na trokute AMD i CDM dobivamo:

$$|AM|^2=|AD|^2+|DM|^2-2|AD|\cdot|DM|\cos\alpha$$

$$|CM|^2=|DM|^2+|CD|^2-2|DM|\cdot|CD|\sin\alpha.$$

Uvrštavanjem danih podataka dobivamo

$$2=a^2+4-2a\cdot 2\cos\alpha$$

tj. $$\cos\alpha=\frac{a^2+2}{4a}$$

$$36=4+4a^2-2\cdot 2\cdot 2a\sin\alpha$$

tj. $$\sin\alpha=\frac{a^2-8}{2a}.$$

Iz $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ imamo

$$\left(\frac{a^2+2}{4a}\right)^2+\left(\frac{a^2-8}{2a}\right)^2=1$$

$$5a^4-76a^2+260=0$$

$$a^2=10,\quad a^2=5.2.$$

Ako je $a^2=5.2$ tada je $\sin\alpha<0$, što ne može biti. Zaključujemo $a^2=10$ i $P(ABC)=20\text{ cm}^2$.

Oliver Kukas (3), Zabok

3701. *Ako su* α, β, γ *kutovi trokuta, dokaži nejednakost*

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Najprije transformiramo desnu stranu nejednakosti:

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma\\&=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma\\&=2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)-2\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)\\&=2\sin\gamma(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\\&=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

Dana nejednakost je sada oblika:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\&\geqslant 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}\tag{1}$$

Sada ćemo dokazati nejednakost:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\&\geqslant 3\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\&\geqslant 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}\tag{2}$$

Prvi dio nejednakosti je neposredna posljedica nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine. Ako dokažemo i drugi dio nejednakosti zadatak je riješen. Imamo:

$$3\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \geqslant 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \ /\ ^3$$
$$\Longrightarrow\ \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \leqslant \frac{27}{64}\ \Big/ \sqrt{\ }$$
$$\Longrightarrow\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}. \qquad (3)$$

Ovdje koristimo poznate trigonometrijske nejednakosti:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

i

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\begin{aligned}&\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\ &= 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ &\leqslant 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8},\end{aligned}$$

čime je dana nejednakost dokazana.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, što se vidi iz (2).

Oliver Kukas (3), Zabok

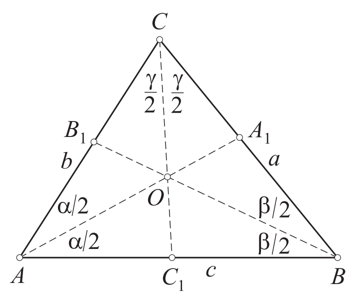
3702. *U trokutu ABC simetrale kutova AA_1, BB_1, CC_1 sijeku se u točki O. Dokaži*

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|} \leq \frac{4R}{r}$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane mu kružnice.

Rješenje. Primjenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta na $\triangle AA_1C$ dobivamo:

$$\frac{|AO|}{|A_1O|} = \frac{b}{|A_1C|}. \qquad (1)$$



Isti poučak primjenimo na $\triangle ABC$ pa je redom:

$$\begin{aligned}&\frac{|A_1C|}{|A_1B|} = \frac{b}{c}\\ \Longrightarrow\ &\frac{|A_1C|}{|A_1B|} + 1 = \frac{b}{c} + 1\\ \Longrightarrow\ &\frac{|A_1C| + |A_1B|}{|A_1B|} = \frac{b+c}{c}\\ \Longrightarrow\ &\frac{a}{|A_1B|} = \frac{b+c}{c} \Longrightarrow |A_1B| = \frac{ac}{b+c}.\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}&|A_1C| = a - |A_1B| = \frac{ab}{b+c}\\ &\overset{(1)}{\Longrightarrow}\ \frac{|AO|}{|A_1O|} = \frac{b+c}{a}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Analogno dobivamo:

$$\frac{|BO|}{|B_1O|} = \frac{a+c}{b} \quad \text{i} \quad \frac{|CO|}{|C_1O|} = \frac{a+b}{c}. \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}&\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|}\\ &= \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}\\ &= \{\text{sinusov poučak}\}\\ &= \frac{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\alpha+\sin\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\\ &= \left(2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\tfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta-\gamma}{2}\right.\\ &\qquad \left.\cdot 2\sin\tfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)\Big/\\ &\quad \left(2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cdot 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}\right)\\ &= \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\\ &\leqslant \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{4R}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\\ &= \frac{4R}{P}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Oliver Kukas (3), Zabok

3703. *U trokutu ABC simetrale kutova AA_1, BB_1, CC_1 sijeku se u točki O. Dokaži*

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|}\geq 8.$$

Prvo rješenje. Kako su uvjeti isti kao i u prošlom zadatku, iskoristit ćemo formulu (4) koju smo izveli:

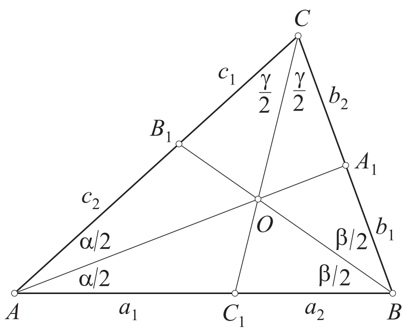
$$\begin{aligned}&\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|}\\ &=\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}\\ &\overset{\text{A-G}}{\geqslant}\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}}{abc}\\ &=8.\end{aligned}$$

I ovdje se jednakost postiže ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Oliver Kukas (3), Zabok

Drugo rješenje. Kako se simetrale kutova sijeku u točki O prema van Abelovom teoremu imamo:

$$\frac{|AO|}{|A_1O|}=\frac{|AC_1|}{|BC_1|}+\frac{|AB_1|}{|CB_1|}$$
$$\frac{|BO|}{|B_1O|}=\frac{|BA_1|}{|CA_1|}+\frac{|BC_1|}{|AC_1|}$$
$$\frac{|CO|}{|C_1O|}=\frac{|CA_1|}{|BA_1|}+\frac{|CB_1|}{|AB_1|}$$



odakle je

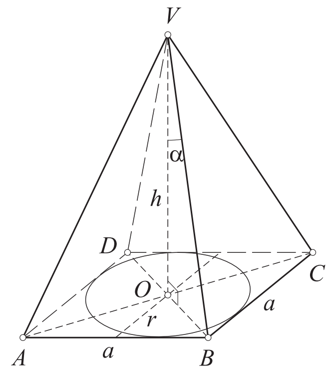
$$\begin{aligned}&\frac{|AO|}{|A_1O|}\cdot\frac{|BO|}{|B_1O|}\cdot\frac{|CO|}{|C_1O|}\\ &=\left(\frac{|AC_1|}{|BC_1|}+\frac{|AB_1|}{|CB_1|}\right)\left(\frac{|BA_1|}{|CA_1|}+\frac{|BC_1|}{|AC_1|}\right)\\ &\quad\cdot\left(\frac{|CA_1|}{|BA_1|}+\frac{|CB_1|}{|AB_1|}\right)\\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\frac{|AB_1|}{|CB_1|}\frac{|BA_1|}{|CA_1|}\frac{|BC_1|}{|AC_1|}\frac{|CA_1|}{|BA_1|}\frac{|CB_1|}{|AB_1|}}\\ &=8.\end{aligned}$$

Ur.

3704. *Odredi polumjer upisane kružnice u bazu pravilne četverostrane piramide čiji su bočni bridovi pod kutem α prema njegovoj visini, a volumen joj je V.*

Rješenje.

$$|OB|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|OB|}{h}\implies h=\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$



$$\begin{aligned}&V=\frac{1}{3}a^2h\\ &\implies V=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6\operatorname{tg}\alpha}\\ &\implies a^3=3\sqrt{2}V\operatorname{tg}\alpha\\ &\implies a=\sqrt[3]{3\sqrt{2}V\operatorname{tg}\alpha}\\ &\implies r=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}.\end{aligned}$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3705. *Izračunaj sumu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Rješenje. Promatrajmo

$$a_n=\frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Imamo

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Odavde dobivamo

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right).$$

Prelaskom na limes imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Oliver Kukas (3), Zabok

3706. *Dan je niz brojeva (a_n), $n \geq 0$ koji zadovoljavaju uvjete*

$$a_0 = 3$$
$$(3-a_{n+1})(6+a_n) = 18, \quad n \geq 0.$$

Odredi sumu $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$.

Rješenje. Iz

$$(3-a_{n+1})(6+a_n) = 18 \implies a_{n+1} = \frac{3a_n}{6+a_n},$$

pa je

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{a_n+6}{3a_n} = \frac{1}{3}+\frac{2}{a_n}\\
&= \frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+4\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{a_{n-2}}\right) = \ldots =\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\ldots+2^n\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{a_0}\right)\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2^1}{3}+\frac{2^2}{3}+\ldots+\frac{2^n}{3}+\frac{2^{n+1}}{3}\\
&= \frac{1}{3}(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n+1})\\
&= \frac{1}{3}(2^{n+2}-1).
\end{aligned}
$$

Sada je:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i} &= \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}(2^{i+1}-1)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}2^{i+1}-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}1\\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-\frac{1}{3}(n+1)\\
&= \frac{2^{n+2}}{3}-\frac{n}{3}-1.
\end{aligned}
$$

Oliver Kukas (3), Zabok

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 454. *Tijelo mase 2 kg, srednje snage 100 W te specifičnog toplinskog kapaciteta 450 J/kgK giba se jednoliko ubrzano. Za 5 sekundi tijelu se zbog trenja temperatura povisi za 0.2 °C. Odredi akceleraciju tijela na tom putu i faktor trenja između tijela i podloge. Kinetička energija tijela računa se po formuli* $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Rješenje.

$m = 2$ kg

$P = 100$ W

$c = 450\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

$t = 5$ s

$\Delta t = 0.2\,^\circ\text{C}, \quad \Delta T = 0.2$ K

$a = ?, \quad \mu = ?$

$W = Pt = 100\ \text{W}\cdot 5\ \text{s} = 500\ \text{J}$

$Q = cm\Delta t$

$\quad = 450\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\cdot 2\ \text{kg}\cdot 0.2\ \text{K} = 180\ \text{J}$

$W = E_k + Q$

$E_k = W - Q = 320$ J

$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 17.89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$a = \frac{v}{t} = \frac{17.89\ \text{m/s}}{5\ \text{s}} = 3.58\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$s = \frac{at^2}{2} = 44.75$ m.

Rad sile trenja je proizvedena toplina.

$$F_{\text{tr}} = \frac{Q}{s} = \frac{180\ \text{J}}{44.75\ \text{m}} = 4\ \text{N}$$

$$\mu = \frac{F_{\text{tr}}}{G}$$

$$G = 20\ \text{N}$$

$$\mu = \frac{4\ \text{N}}{20\ \text{N}} = 0.2.$$

Ur.

OŠ – 455. *Ivan i Marko, međusobno udaljeni 10 metara, rade kružne valove na vodi udarajući štapovima po površini vode. Ivan udara svake sekunde, a Marko dva puta u sekundi. Primijetili su da su se njihovi valovi dodirnuli nakon što je Ivan 5 puta udario štapom po vodi. Odredi brzinu, frekvenciju i valnu duljinu tih valova.*

Rješenje.

$$s = 10\ \text{m}$$

$$f_M = 2\ \text{Hz}$$

$$f_I = 1\ \text{Hz}$$

$$N_I = 5$$

$$t_M = t_I = t$$

$$t = \frac{N_I}{f_I} = 5\ \text{s}$$

$$N_M = f_M t = 10.$$

Ivanovi i Markovi valovi se rasprostiru u istom sredstvu pa su im brzine jednake.

$$v_M = v_I$$

$$N_I\lambda_I + N_M\lambda_M = s$$

$$5\lambda_I + 10\lambda_M = 10\ \text{m}$$

$$\lambda_I + 2\lambda_M = 2\ \text{m}$$

$$v = \lambda f$$

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_I} = \frac{f_I}{f_M} = 0.5$$

$$2\lambda_M = \lambda_I$$

$$2\lambda_M + 2\lambda_M = 2$$

$$\lambda_M = 0.5\ \text{m}$$

$$\lambda_I = 1\ \text{m}$$

$$v_I = v_M = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Filip Vučić (8),
OŠ Trnsko, Zagreb

OŠ – 456. *Da bi objesio poster Nikole Tesle na zid učionice za fiziku učenik je morao zabiti čavao u zid. Prilikom prvog udarca čavao se zabio 2 centimetra u zid. Masa čekića iznosila je 0.5 kilograma, a učenik je procijenio da je sila kojom je udario bila oko 50 njutna. Koliku je brzinu čekić imao kad je udario u čavao?*

Rješenje.

$$s = 2\ \text{cm} = 0.02\ \text{m}$$

$$m = 0.5\ \text{kg}$$

$$\underline{F = 50\ \text{N}}$$

$$v = ?$$

$$W = Fs = 1\ \text{J}$$

$$E_k = W$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2Ek}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Filip Vučić (8), Zagreb

OŠ – 457. *Izvor svjetlosti je postavljen 60 centimetara ispred sabirne leće jakosti 5 dioptrija. Njegova se oštra slika može uhvatiti na zastoru. Ako leću zamijenimo lećom jakosti 4 dioptrije koliko se mora pomaknuti zastor da bi slika na njemu bila oštra?*

Rješenje.

$$j = 5\ \text{dpt}$$

$$j' = 4\ \text{dpt}$$

$$\underline{a = 0.6\ \text{m}}$$

$$x = ?$$

$$x = b' - b$$

$$f = \frac{1}{j}$$

$$f = 0.2\ \text{m}$$

$$f' = 0.25\ \text{m}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b'}$$

Rješenjem gornjih dviju jednadžbi dobiva se:

$$b = 0.3\ \text{m}$$

$$b' = 0.43 \text{ m}$$

$$x = 0.13 \text{ m} = 13 \text{ cm}.$$

Zastor se mora pomaknuti 13 cm dalje od leće.

Filip Vučić (8), Zagreb

1700. *Na letjelicama za duboki svemir, kao izvor energije često se koristi radioizotopni termoelektrični generator, u kojemu se iskorištava snaga oslobođena α-raspadom ^{238}Pu. Odredi termičku snagu koju proizvodi 1 kg tog izotopa plutonija. Vrijeme poluraspada iznosi 87.74 godine, a prosječna energija α-čestice emitirane raspadom iznosi 5.58 MeV (megaelektron volta).*

Rješenje. Množina i broj atoma za 1 kg plutonija 238 iznose

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1000 \text{ g}}{238 \text{ g/mol}} = 4.2017 \text{ mol},$$

$$N = n \cdot N_A = 4.2017 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$$

$$= 2.53 \cdot 10^{24}.$$

Vrijeme poluraspada izrazimo u sekundama, $T = 87.74 \text{ god} = 2\,768\,863\,824 \text{ s}$, i uvrstimo u izraz za aktivnost:

$$A = \frac{N}{T} \cdot \ln 2 = 6.334 \cdot 10^{14} \text{ Bq}.$$

Uz prosječnu energiju

$$Q = 5.58 \text{ MeV} = 8.929 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

snagu dobijemo umnoškom

$$P = AQ = 565.5 \text{ W}.$$

Ur.

1701. *Uzmimo da neki planet mase M radijusa R ima jezgru i plašt, takve da je jezgra koncentrična kugla radijusa $R/2$, a plašt ostatak planeta. Ako je ubrzanje sile teže na površini jednako ubrzanju sile teže na granici plašta i jezgre, odredi postotak mase planeta u jezgri i omjer gustoća jezgre i plašta.*

Rješenje. Masa planeta jednaka je zbroju mase jezgre i mase plašta: $M = M_j + M_p$. Ubrzanje sile teže na površini je

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

a ubrzamje na granici plašta i jezgre

$$g' = \frac{GM_j}{(R/2)^2}.$$

Izjednačavanjem $g = g'$ dobivamo

$$M = 4M_j,$$

dakle u jezgri je 25 % mase planeta. Omjer gustoća je

$$\frac{\rho_j}{\rho_p} = \frac{M_j/V_j}{M_p/V_p} = \frac{M_jV_p}{M_pV_j}.$$

Volumen planeta je

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi,$$

volumen jezgre je

$$V_j = \frac{4}{3}(R/2)^3\pi = \frac{1}{6}R^3\pi,$$

pa je volumen plašta razlika

$$V_p = V - V_j = \frac{7}{6}R^3\pi.$$

Odatle je traženi omjer gustoća

$$\frac{\rho_j}{\rho_p} = \frac{M_j \cdot \frac{7}{6}R^3\pi}{3M_j \cdot \frac{1}{6}R^3\pi} = \frac{7}{3}.$$

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

1702. *Odredite volumni udio helija i argona u njihovoj smjesi, ako je brzina zvuka u toj smjesi jednaka brzini zvuka u zraku iste temperature i tlaka. Uzmimo da se zrak sastoji od dvoatomnih molekula prosječne molekulske mase 29 g/mol.*

Rješenje. Brzina zvuka u idealnom plinu može se izraziti kao

$$v^2 = \frac{\gamma RT}{M},$$

gdje je γ koeficijent adijabatske ekspanzije, a M relativna masa čestice. Izjednačavanjem izraza za traženu smjesu i zrak dobivamo

$$\frac{\gamma_S RT}{M_S} = \frac{\gamma_Z RT}{M_Z}$$

Kraćenjem s RT i uvrštavanjem $\gamma_S = 5/3$ (jednoatomni plin) i $\gamma_Z = 7/5$ (dvoatomni plin), te zadani $M_Z = 29$ g/mol dobivamo

$$M_S = M_Z \frac{\gamma_S}{\gamma_Z} = 29 \cdot \frac{5/3}{7/5}$$

$$= 34.52 \text{ g/mol}.$$

Udio helija u smjesi φ_{He} izračunamo iz atomskih masa helija (4.0026 g/mol) i argona

(39.947 g/mol):

$M_S = \varphi_{He} \cdot 4.0026 + (1-\varphi_{He}) \cdot 39.947 = 34.524.$

Odatle je $\varphi_{He} = 0.15087$, tj. smjesa se sastoji od 15.1 % helija i 84.9 % argona.

Ur.

1703. *Tijelo je 10 000 km udaljeno od površine Zemlje. Kojom se minimalnom brzinom mora kretati u odnosu na Zemlju a da ne padne, nego ostane u orbiti? Smatrat ćemo da je tijelo palo ako se spusti bliže od 200 km površini Zemlje. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km, mase* $6 \cdot 10^{24}$ *kg*.

Rješenje. Minimalna brzina na toj udaljenosti odgovara putanji kojoj je apogej (najdalja točka) na $10\,000 + 6371 = 16\,371$ km od središta Zemlje, a perigej (najbliža točka) na $200 + 6371 = 6571$ km od središta. Velika poluos elipse te orbite iznosi

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{16371 + 6571}{2} = 11\,471 \text{ km}.$$

Brzina *kruženja* po kružnici istog radijusa je srednja brzina te putanje, i iznosi

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{GM}{a}} = \sqrt{\frac{4.0044 \cdot 10^{14}}{11\,471\,000}} = 5908.38 \text{ m/s}.$$

Minimalnu (i maksimalnu) brzinu putanje možemo izračunati iz srednje brzine:

$$v_{\min} = \overline{v}\sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}} = 3743.23 \text{ m/s},$$

$$v_{\max} = \overline{v}\sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}} = 9325.89 \text{ m/s}.$$

Dakle, tijelo mora imati minimalnu brzinu 3743.23 m/s, i to okomito na spojnicu sa središtem Zemlje da bi ostalo u orbiti, pri čemu će proletjeti brzinom 9325.89 m/s približujući se površini na 200 km. Za sve iznose početne brzine manje od toga, tijelo će pasti na Zemlju, neovisno o smjeru početne brzine.

Ur.

1704. *Jednobojna žarulja svijetli izotropno svjetlosnom snagom P po noći u magli. Pomoću svjetlomjera odredimo osvjetljenje na 10 i 30 metara od žarulje. Na 10 m ono iznosi* 0.19 W/m^2, *a na 30 m* 0.016 W/m^2. *Odredi snagu P i duljinu puta u magli koja apsorbira polovicu intenziteta paralelnog snopa svjetla.*

Rješenje. Bez apsorpcije u magli, osvjetljenje žarulje snage P na udaljenosti r iznosilo bi

$$I'(r) = \frac{P}{S(r)} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Uz apsorpciju osvjetljenje iznosi

$$I(r) = 2^{-\frac{r}{r_0}} I'(r) = 2^{-\frac{r}{r_0}} \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Omjer intenziteta na 10 i 30 metara je

$$\frac{I(10)}{I(30)} = \frac{30^2}{10^2} \cdot 2^{\frac{30-10}{r_0}} = \frac{0.19}{0.016} = 11.875,$$

$$9 \cdot 2^{\frac{20}{r_0}} = 11.875,$$

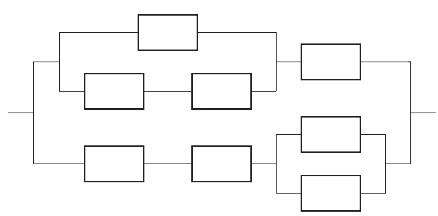
$$r_0 = 50.0087 \text{ m}.$$

To je duljina puta koja intenzitet paralelnog snopa smanji na polovinu. Snagu P onda izračunamo koristeći

$$P = I(10) \cdot 4\pi \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{10}{r_0}} = 0.19 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 1.1487 = 274.3 \text{ W}.$$

Ur.

1705. *Osam jednakih otpornika otpora* $10\ \Omega$ *spojimo u shemu na slici. Pokaži da je ukupni otpor sklopa opet* $10\ \Omega$. *Ako bi sklop priključili na napon 10 V, kolika bi struja tekla kroz svaki od otpornika?*



Rješenje. Donja grana sheme sastoji se od dva serijski spojena otpornika i paralelnog spoja dva otpornika desno, čiji je zajednički otpor $R^2/(R+R) = R/2$. Time je ukupan otpor donje grane $R + R + R/2 = 5R/2$. Paralelni spoj u gornjoj grani ima otpor $R \cdot 2R/(R+2R) = 2R/3$. Time je ukupan otpor u gornjoj grani $R + 2R/3 = 5R/3$. Paralelni spoj gornje i donje grane daje ukupan otpor:

$$R_u = \frac{R_G R_D}{R_G + R_D} = \frac{5R/3 \cdot 5R/2}{5R/3 + 5R/2} = \frac{5R/6}{1/3 + 1/2} = R.$$

Kako je napon jednak 10 V za obje grane, struja $I = U/R = 1$ A se dijeli u omjeru $R_G/R_D = 2/3$, pa će gornjom granom teći 0.6 A, a donjom 0.4 A struje. U donjoj grani struje su redom 0.4, 0.4, 0.2 i 0.2 ampera, a u gornjoj paralelan spoj dijeli struju u omjeru 2 : 1 pa su struje redom 0.4, 0.2, 0.2 i kroz desni otpornik 0.6 ampera.

Filip Vučić (8), Zagreb

1706. *S visine od 1.2 metra pustimo dva jednaka utega, prvi slobodno pada, a drugi klizi niz kosinu nagiba* 20°. *Drugi uteg treba 5 puta više vremena da dođe do dna od prvog. Odredi koeficijent trenja utega i kosine.* $g = 9.81$ m/s^2. *Otpor zraka zanemariti.*

Rješenje. Slobodni pad prvog utega traje $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.49462$ s. Drugi uteg tada klizi niz kosinu tijekom $t_2 = 5t_1 = 2.4731$ s. Duljinu kosine s izračunamo kao hipotenuzu pravokutnog trokuta, s katetom $h = 1.2$ m i nasuprotnim kutom $\alpha = 20^\circ$

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1.2}{\sin 20^\circ} = 3.5086 \text{ m}.$$

Akceleracija drugog utega a_2 slijedi iz

$$s = \frac{a_2}{2}t_2^2,$$

$$a_2 = \frac{2s}{t_2^2} = 1.1473 \text{ m/s}^2.$$

Koeficijent trenja μ utječe na a_2 izrazom za kosinu:

$$a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

$$0.225068 = \mu \cdot 0.9397$$

$$\mu = 0.2395.$$

Borna Cesarec (2), Krapina