60. Međunarodna matematička olimpijada 2019. g.

Ovogodišnja, šezdeseta, Međunarodna matematička olimpijada održana je od 11. do 22. srpnja u engleskome gradu Bathu. Hrvatsku su ekipu sačinjavali: *Luka Bulića Bračulj*, *Bernard Inkret*, *Noel Lakić*, *Daniel Širola*, *Marin Varivoda* i *Ivan Vojvodić*. Voditelji su bili *Borna Vukorepa* (vođa puta) i *Ivan Krijan* (član žirija). Prvih nekoliko dana bio je prisutan samo Ivan koji je s ostalim voditeljima birao zadatke za olimpijadu (gdje je jedan od izabranih zadataka bio jedan od bivšeg hrvatskog olimpijca Adriana Bekera), a mi smo par dana poslije s Bornom putovali avionom preko Münchena do Londona, odakle smo se autobusom dovezli do Batha na jugozapadu Engleske.

IMO 2019
60TH INTERNATIONAL
MATHEMATICAL OLYMPIAD

Sutradan ujutro smo se šetali i razgredali prelijepi grad Bath gdje smo imali priliku vidjeti znamenitosti kao što su Bath Abbey, Royal Crescent te Gay Street (ulica u kojoj je živjela spisateljica Jane Austen). Popodne smo prisustvovali svečanom otvaranju samog natjecanja. Sljedeće jutro održan je prvi dan natjecanja u kojem smo 4 sata i 30 minuta rješavali tri zadatka, nakon čega smo s Bornom prokomentirali zadatke i rješenja, a zatim se odmorili i pripremili za sutra. Sutradan je održan drugi dio natjecanja, a nakon toga smo se napokon našli s Ivanom te proanilizirali sve što smo riješili.

Ostatak ovogodišnje olimpijade proveli smo na izletima te u odmaranju i uživanju u Engleskoj. Prvo smo posjetili poznati Stonehenge gdje smo naučili puno o njegovoj povijesti i svrsi, a zatim i grad Salisbury gdje smo uživali u lijepom vremenu te smo u katedrali imali priliku vidjeti čuvenu Magnu Cartu. Također smo iskoristili slobodno vrijeme za uživanje u idiličnoj atmosferi Batha, a i druženje s natjecateljima iz drugih zemalja.

Zadnji dan održano je zatvaranje i proglašenje rezultata. Hrvatska je ekipa osvojila tri brončane medalje (Ivan, Bernard i Noel) te tri pohvale (Marin, Daniel i Luka). Zatvaranje je održano u velikom šatoru na kampusu sveučilišta, sa štandovima s hranom kao što su hamburgeri, čili i šećerna vuna, a ispred šatora je bilo nekoliko atrakcija uključujući i Ferrisov kotač.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
I. Vojvodić	7	7	0	7	2	0	23	brončana
B. Inkret	7	7	0	1	7	0	22	brončana
N. Lakić	7	2	0	7	2	0	18	brončana
D. Širola	7	1	0	6	2	0	16	pohvala
M. Varivoda	1	7	1	0	7	0	16	pohvala
L. Bulić Bračulj	7	0	0	1	7	0	15	pohvala
ekipni rezultat	36	24	1	22	27	0	110	B, B, B, P, P, P

Sutradan smo rano ujutro krenuli autobusom iz Batha u London, gdje smo proveli cijeli dan u turističkom obilasku te smo vidjeli brojne poznate znamenitosti kao što su Tower Bridge, Trafalgar Square, Westminster Pallace i Buckingham Pallace. Nakon cijelog dana razgledavanja, umorni smo se i s užitkom avionom vratili u Zagreb gdje su nas dočekale obitelje i prijatelji.

Luka Bulič Bračulj

Zadatci

Prvi dan, Bath, utorak, 16. srpnja 2019.

Zadatak 1. (Južnoafrička Republika) Neka je $\mathbb{Z}$ skup svih cijelih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a i b vrijedi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Zadatak 2. (Ukrajina) Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC dane su točke A_1 i B_1, redom. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$, redom, takve da su pravci PQ i AB paralelni. Neka je P_1 točka na pravcu PB_1 takva da točka B_1 leži strogo između točaka P i P_1 te da je $\sphericalangle PP_1C = \sphericalangle BAC$. Neka je Q_1 točka na pravcu QA_1 takva da točka A_1 leži strogo između točaka Q i Q_1 te $\sphericalangle CQ_1Q = \sphericalangle CBA$.

Dokaži da su točke P, Q, P_1 i Q_1 konciklične.

Zadatak 3. (Hrvatska) Neka društvena mreža ima 2019 korisnika i neki parovi korisnika su prijatelji. Ako je A prijatelj korisniku B, onda je i B prijatelj korisniku A. Sljedeći događaji mogu se ponavljati jedan za drugim, ali ne istovremeno:

> Tri korisnika A, B i C, takva da su B i C prijatelji korisniku A, ali B i C nisu prijatelji, mijenjaju svoje statuse prijateljstava tako da su B i C sada prijatelji, ali A više nije prijatelj korisniku B niti korisniku C. Svi ostali statusi prijateljstava ostaju nepromijenjeni.

Na početku 1010 korisnika ima po 1009 prijatelja i 1009 korisnika ima po 1010 prijatelja. Dokaži da postoji niz opisanih događaja nakon kojega svaki korisnik ima najviše jednog prijatelja.

Drugi dan, Bath, srijeda, 17. srpnja 2019.

Zadatak 4. (Salvador) *Pozicija* je bilo koja točka (x, y) u ravnini takva da su x i y prirodni brojeva manji ili jednaki 20.

Na početku, svaka od 40 pozicija je slobodna. Ana i Borna igraju igru u kojoj naizmjenično povlače poteze, pri čemu Ana igra prva. U svakom svom potezu Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju tako da je udaljenost bilo koje pozicije na kojima se nalaze crveni kamenčići različita od $\sqrt{5}$. U svakom svom potezu Borna postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kojoj udaljenosti od drugih pozicija na kojima se nalazi neki kamenčić.) Igra završava kad neki igrač više ne može povući potez.

Odredi najveći broj K takav da Ana sigurno može postaviti barem K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Borna postavlja svoje plave kamenčiće.

Zadatak 5. (SAD) Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $N > 1$ takav da je za sve prirodne brojeve $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

cijeli broj. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m \geqslant M$.

Zadatak 6. (Indija) Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Točka X leži unutar $ABCD$ tako da vrijedi

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokaži da je $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180^\circ$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	6				227
SAD	6				227
Južna Koreja	6				226
Sjeverna Koreja	3	3			187
Tajland	3	3			185
Rusija	2	4			179
Vijetnam	2	4			177
Singapur	2	4			174
Srbija	3	1	2		171
Poljska	1	3	2		168
Mađarska	1	3	2		165
Ukrajina	1	4	1		165
Japan	2	2	2		162
Indonezija	1	4	1		160
Indija	1	4		1	156
Izrael	1	3	2		156
Rumunjska	1	2	3		155
Australija	2	1	3		154
Bugarska		5	1		152
Velika Britanija	1	2	3		149
Tajvan	1	2	3		148
Kazahstan		2	4		146
Iran	1	2	3		145
Kanada	1	1	4		144
Francuska		2	4		142
Mongolija	1	1	3	1	141
Italija		2	4		140
Peru		3	1	1	137
Brazil		2	4		135
Turska	1	1	3	1	135
Filipini		1	5		129
Njemačka	1		3	2	126
Saudijska Arabija		1	4		124
Norveška		1	3	2	122
Bjelorusija		2	2	2	119
Estonija		1	4		118
Hong Kong		1	3	1	117
Nizozemska		1	4	1	117
Slovačka		1	3	2	114
Grčka		1	2	3	112
Meksiko		1	3	2	111
Hrvatska			3	3	110
Španjolska			5	1	110
Slovenija		2	1	3	109
Gruzija		1	4	1	108
Češka			4	2	106
Južnoafrička Republika			4	2	106
Danska		1	2	3	105
Armenija		2	1	2	104
Moldavija		1	1	3	100
Azerbajdžan			3	2	98
Litva			3	3	96
Argentina			3	1	95
Portugal		1	1	4	93
Makao			3	3	92
Švedska	1		1	3	92
Sirija		1	1	3	92
Novi Zeland			2	2	89
Švicarska			3	1	89
Austrija			4	1	84
Bosna i Hercegovina				5	84
Tađikistan		1	1	2	82
Uzbekistan			1	3	81
Maroko			1	4	80
Finska		1	1	2	78
Kolumbija			2	2	77
Bangladeš			1	4	76
Belgija		1	1	3	75
Šri Lanka			1	5	73
Malezija			2	2	71
Irska		1		2	61
Latvija				4	56
Turkmenistan				3	53
Tunis				4	48
Cipar				3	47
Sjeverna Makedonija				2	47
Alžir (5)			1	3	46
Salvador (4)			2		45
Kosovo				3	43
Albanija				2	37
Island				2	37
Panama (4)			1	1	37
Kostarika				2	34
Pakistan (5)			1	1	34
Trinidad i Tobago				2	34
Crna Gora (5)				1	33
Ekvador (5)				3	32
Urugvaj (5)				2	29
Kuba (2)				2	23
Čile (4)				2	20
Kirgistan					19
Paragvaj					18
Irak				1	17
Nepal				1	17
Nikaragva (2)				2	17
Egipat (4)					12
Gana (4)				1	11
Mianmar					11
Kambodža				1	10
Bolivija					9
Luksemburg					9
Dominikanska Republika (5)					5
Uganda					5
Gvatemala (3)					4
Honduras (3)					3
Portoriko (1)					3
Tanzanija					3
Venecuela (2)					3
Bocvana (2)					2
Angola (2)					0
Kenija (2)					0
Ujedinjeni Arapski Emirati					0

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.