13. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2019. g.

Trinaesta Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO 2019) održana je od 26. kolovoza do 1. rujna u češkim Pardubicama. Hrvatsku ekipu predstavljali su *Vedran Cifrek*, *Matej Ljubičić*, *David Mikulčić*, *Krešimir Nežmah*, *Gabrijel Radovčić* i *Lovro Vladić* (svi učenici zagrebačke XV. gimnazije) uz vodstvo *Ivana Kokana* te *Matka Ljulja*. Nakon ranojutarnjeg leta i doručka u Pragu, vlakom smo stigli u Pardubice te smo se smjestili u hotel.

Sutradan smo ujutro bili na svečanom otvorenju Olimpijade, a tijekom popodneva smo imali organizirane izlete po starim češkim dvorcima. Sljedeće je jutro održano pojedinačno natjecanje na kojemu smo pet sati rješavali četiri zadatka. Nakon natjecanja kratko smo prokomentirali zadatke s voditeljima te zatim otišli na ručak i nakon toga u razgledavanje još nekih od brojnih dvoraca.

Idući je dan došlo vrijeme za ekipno natjecanje. Nakon tih pet napornih i uzbudljivih sati riješili smo pet od osam zadataka. Opet smo imali priliku kratko prokomentirati zadatke s voditeljima, a zatim smo imali još jedan izlet, ovaj put u obližnji povijesni grad Kutná Hora.

Cijeli smo sljedeći dan proveli na izletu u prirodi u okolici Pardubica.

Posljednji smo dan ujutro bili na izletu u Kraljičinom Gradcu (Hradec Králové) poznatom po višestoljetnoj tradiciji uzgajanja konja u ovome dijelu Europe, a navečer je bilo svečano zatvorenje Olimpijade. Osvojili smo pet pojedinačnih medalja: jednu brončanu (Lovro), tri srebrne (Gabrijel, Vedran i David) te jednu zlatnu s najboljim rezultatom na natjecanju (Krešimir). Tu smo večer proveli družeći se međusobno, i s drugim ekipama.

Povratak u Zagreb opet je bio zrakoplovom iz Praga. U zagrebačkoj zračnoj luci su nas dočekali roditelji i bivši natjecatelji da nam čestitaju na lijepom uspjehu. Zatim smo se, nakon uzbudljivog i interesantnog tjedna, pozdravili i otišli svaki svojim putem.

Sve u svemu, ovogodišnji je MEMO bio lijepo iskustvo s dobrim rezultatima i svi ćemo ga se rado prisjećati.

David Mikulčić

Zadatci s pojedinačnog natjecanja, 28. kolovoza 2019.

I-1. Odredi sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da
$$f\big(xf(y)+2y\big)=f(xy)+xf(y)+f\big(f(y)\big)$$
vrijedi za sve realne brojeve x i y.

I-2. Neka je $n\geqslant 3$ prirodni broj. Kažemo da je vrh A_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ konveksnog mnogokuta $A_1A_2\dots A_n$ *bohemijski* ako se njegova centralnosimetrična slika u odnosu na polovište dužine $\overline{A_{i-1}A_{i+1}}$ (uz $A_0=A_n$ i $A_{n+1}=A_1$) nalazi unutar ili na rubu mnogokuta $A_1A_2\dots A_n$. Odredi najmanji mogući broj bohemijskih vrhova koje može imati konveksni n-terokut (ovisno o n).

(Konveksni mnogokut $A_1A_2\dots A_n$ ima n vrhova i sve unutarnje kutove manje od 180°.)

I-3. Neka je ABC šiljastokutni trokut s opisanom kružnicom ω u kojem je $|AC|>|BC|$. Pretpostavimo da je P točka na ω takva da je $|AP|=|AC|$ i da je P

unutarnja točka kraćeg luka $\overset{\frown}{BC}$ kružnice ω. Neka je Q sjecište pravaca AP i BC. Nadalje, pretpostavimo da je R točka na ω takva da je $|QA| = |QR|$ i da je R unutarnja točka kraćeg luka $\overset{\frown}{AC}$ kružnice ω. Konačno, neka je S sjecište pravca BC i simetrale stranice $\overline{AB}$. Dokaži da su točke P, Q, R i S konciklične.

I-4. Odredi najmanji prirodni broj n za koji je istinita sljedeća tvrdnja: Među bilo kojih n uzastopnih cijelih brojeva moguće je odabrati neprazan skup uzastopnih cijelih brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2019.

Zadatci s ekipnog natjecanja, 29. kolovoza 2019.

T-1. Odredite najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right),$$

pri čemu su a, b i c nenegativni realni brojevi takvi da je $ab+bc+ca=1$.

T-2. Neka je α realni broj. Odredite sve polinome P s realnim koeficijentima takve da vrijedi

$$P(2x+\alpha) \leqslant (x^{20}+x^{19})\,P(x)$$

za sve realne brojeve x.

T-3. U razredu je n dječaka i n djevojčica, gdje je n prirodni broj. Visine sve djece u razredu su različite. Svaka djevojčica određuje broj dječaka koji su viši od nje, od toga oduzima broj djevojčica koje su više od nje, te zapisuje rezultat na papir. Svaki dječak određuje broj djevojčica koje su niže od njega, od toga oduzima broj dječaka koji su niži od njega, te zapisuje rezultat na papir. Dokažite da su brojevi koje su napisale djevojčice isti kao i brojevi koje su napisali dječaci (do na permutaciju).

T-4. Dokažite da se svaki cijeli broj između 1 i 2019 može prikazati kao aritmetički izraz koji se sastoji od najviše 17 brojki 2 i proizvoljnog broja zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i zagrada. Brojke 2 ne smije se koristiti u drugim operacijama, na primjer za stvaranje višeznamenkastih brojeva (poput 222) ili potenciranje (poput 2^2).

Valjani primjeri:

$$\left((2\times 2+2)\times 2-\frac{2}{2}\right)\times 2=22,\ (2\times 2\times 2-2)\times\left(2\times 2+\frac{2+2+2}{2}\right)=42.$$

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|AB|<|AC|$. Neka je D sjecište simetrale stranice $\overline{BC}$ i stranice $\overline{AC}$. Neka je P točka na kraćem luku $\overset{\frown}{AC}$ kružnice opisane trokutu ABC takva da je $DP \parallel BC$. Konačno, neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Dokažite da je $\sphericalangle APD = \sphericalangle MPB$.

T-6. Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu B i opisanom kružnicom c. Označimo s D polovište kraćeg luka $\overset{\frown}{AB}$ kružnice c. Neka je P točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|CP|=|CD|$, a X i Y dvije različite točke na c takve da je $|AX|=|AY|=|PD|$. Dokažite da su točke X, Y i P kolinearne.

T-7. Neka su a, b i c prirodni brojevi takvi da je $a<b<c<a+b$. Dokažite da $c(a-1)+b$ ne dijeli $c(b-1)+a$.

T-8. Neka je N prirodni broj takav da je zbroj kvadrata njegovih pozitivnih djelitelja jednak umnošku $N(N+3)$. Dokažite da postoje indeksi i i j takvi da vrijedi $N=F_i\cdot F_j$, gdje je $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ Fibonaccijev niz definiran s $F_1=F_2=1$ i $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ za sve $n\geqslant 3$.