

## Sudoku – napredne metode rješavanja (8.3)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

U završnom nastavku kompleksnih lanaca obradit ćemo *forsirane lance* (*Forcing Chain*, skraćeno *FC*). *Forcing Chain* je generički izraz za bilo koji lanac koji vodi do kontradikcije ili istinitosti i na taj način nameće (forsira) određene zaključke. Bilo koja *petlja s diskontinuitetom* (*Discontinuous Nice Loop*) ili *naizmjenično povezani lanac* (*AIC*) predstavljaju *forsirani lanac* po definiciji. Lanci koji ne vode sami do kontradikcije mogu se međusobno kombinirati u *višestruko forsirani lanac* (*Multiple Forcing Chain*) kako bi svi zajedno mogli dokazati istinitost ili kontradikciju, odnosno “isforsirati” određeni zaključak.

Lanac može početi s ON (točno) ili s OFF (netočno) stanjem pojedinog kandidata, kandidata u jednom polju ili u jednom povezanom području. Kada se kandidat X stavi u ON stanje, to automatski postavlja stanje svih ostalih kandidata u polju te drugih X kandidata u povezanom području u OFF stanje. Kada se kandidat stavi u OFF stanje to može staviti u ON stanje drugog kandidata ako su samo dva u polju ili samo dva u povezanom području (tj. ako su oni konjugirani parovi, odnosno imamo jaku vezu).

U strategiji forsiranih lanaca istražujemo posljedice ako je pojedini kandidat ili grupa kandidata prvo ON, a potom OFF ili su svi kandidati u jednom polju, odnosno jednom povezanom području ON. Tražimo kontradikcije i donosimo zaključke na temelju rezultata.

U kontradikciji su svi oni lanci koji počinju s istom pretpostavkom, ali dovode do zaključka da ne mogu biti istiniti (točni). Primjeri kontradikcije:

- lanci dokazuju da polje ne može sadržavati određenu znamenku (kandidata)
- lanci eliminiraju sve znamenke (kandidate) u povezanom području
- lanci utvrđuju da je više od jedne znamenke (kandidata) točno u određenom polju
- lanci utvrđuju da je više istih znamenaka (kandidata) točno u povezanom području

Mogućnosti *višestruko forsiranih lanaca* su gotovo neograničene te s njima možemo riješiti sve mreže i zato ih često koristimo kao zadnje sredstvo u rješavanju (*Last Resort*), iako je kod kompleksnih mreža njihovo pronalaženje prilično dugotrajno i mukotrпно.

Razlikujemo:

- *Forsirane lance jednog kandidata* (*Digit Forcing Chain*)
- *Forsirane lance jednog polja* (*Cell Forcing Chain*)
- *Forsirane lance povezanog područja* (*Unit Forcing Chain*)

Na slici 1 je prikazana shema mogućih kontradikcija i zaključaka kod *forsiranih lanaca jednog kandidata*. U odabranom polju izaberemo jednog kandidata i istražimo lanac implikacija ako je taj kandidat ON. Potom za istog kandidata u istom polju istražimo lanac implikacija ako je taj kandidat OFF. U oba slučaja lanac mora završiti u istom polju ili u istom povezanom području i ovisno o rezultatu, imamo četiri situacije (tipa):

1. ako oba lanca ukazuju da je u zadnjem polju isti kandidat ON, tada on mora biti ON (točan)

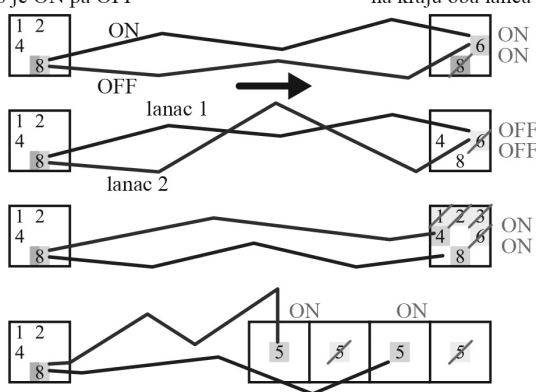
<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

2. ako oba lanca ukazuju da je u zadnjem polju isti kandidat OFF, tada se on može eliminirati
3. ako u jednom slučaju (kada je odabrani kandidat ON) lanac ukazuje da je u zadnjem polju točan jedan kandidat, a u drugom (kada je odabrani kandidat OFF) da je točan drugi kandidat, tada mora biti točan jedan od ta dva kandidata i možemo eliminirati sve ostale kandidate iz zadnjeg polja
4. ako u jednom slučaju (kada je odabrani kandidat ON) lanac ukazuje da je u određenom povezanom području točan jedan kandidat, a u drugom (kada je odabrani kandidat OFF) da je točan isti kandidat u drugom polju povezanog područja, tada u tom području mora biti točan jedan od ta dva kandidata i možemo eliminirati sve te ostale kandidate iz tog povezanog područja (retka, stupca ili kvadrata)

#### Forsirani lanci jednog kandidata

8 je ON pa OFF

na kraju oba lanca



#### Tip 1

Ako je jedan kandidat ON u oba slučajja, to mora biti rješenje polja.

#### Tip 2

Ako je jedan kandidat OFF u oba slučajja, on se može eliminirati iz polja.

#### Tip 3

Ako je u jednom slučaju jedan kandidat ON, a u drugom drugi kandidat, ostale možemo eliminirati.

**Tip 4** Ako je u oba slučajja isti kandidat ON u povezanom području, možemo ga iz ostatka područja eliminirati.

Slika 1.

Pogledajte primjer na slici 2.

|                  |             |               |                  |          |             |          |             |             |             |
|------------------|-------------|---------------|------------------|----------|-------------|----------|-------------|-------------|-------------|
| 1<br>5<br>8      | 2 3<br>5    | 1 2<br>8      | 1 2<br>4 5<br>8  | 6        | 4 5<br>8    | 4 3<br>7 | 3<br>4<br>7 | 3<br>9      | 4           |
|                  | 2 3<br>6    | 7             | 8                | 4        | 2<br>9      | 9        | 5           | 4           | 3<br>1      |
| 9                | 1<br>5      | 4             | 3                | 7        | 1<br>5      | 8        | 2<br>6      | 2<br>6      | 6           |
| 3                | 4<br>6      | 1<br>9        | 4<br>6<br>4<br>9 | 1<br>9   | 7           | 2        | 5           | 8           |             |
| 1<br>4           | 2<br>6<br>4 | 1 2<br>6<br>9 | 5<br>8           | 3<br>8   | 3<br>5<br>8 | 1<br>7   | 1<br>4<br>7 | 4<br>6<br>9 | 6<br>9      |
| 7                | 8           | 5             | 2<br>9           | 1 2<br>4 | 6<br>4      | 1<br>4   | 4<br>6<br>9 | 3           |             |
| 1<br>4<br>5      | 4<br>5<br>9 | 3<br>9        | 1<br>4<br>5      | 8        | 2           | 6        | 1<br>4<br>3 | 7           |             |
| 2                | 1<br>4<br>5 | 6             | 7                | 5        | 3<br>4      | 3<br>4   | 9           | 8           | 4<br>5      |
| 1<br>4<br>5<br>8 | 7           | 3<br>8        | 1<br>4<br>5<br>6 | 9        | 4<br>5<br>6 | 1<br>4   | 3<br>4      | 1 2<br>4    | 2<br>4<br>5 |

Slika 2.

Odabrali smo početno polje I9 i kandidata 5. U prvom slučaju postavili smo da je broj 5 u polju I9 netočan (OFF). U tom slučaju je broj 5 točan u polju H9 (jaka veza),

tada u H5 nije 5 (slaba veza), u E5 je 5 (jaka veza), u E4 nije 5 (slaba veza), pa mora biti 8 (jaka veza u polju), tada nije 8 u B4, pa mora biti 8 u B1 (jaka veza), tada u B1 nije 6 (slaba veza u polju) pa mora biti točan broj 6 u E1 (jaka veza). Zaključak: ako u polju I9 nije točan broj 5, tada u polju E1 mora biti točan broj 6.

$$\text{NL zapis: } I9=5=H9-5-H5=5=E5-5-E4-8-B4=8=B1=6=E1 \\ \implies I9 \neq 5 \implies E1=6$$

Na slici 3 imamo analizu lanca ako je broj 5 u polju I9 točan (ON). U tom slučaju u I9 nije točan broj 2 i on mora biti točan u C9 (jaka veza); stoga u C9 nije točan broj 6, pa on mora biti točan u polju E9. Dakle, ako je u polju I9 točan broj 5, tada u polju E9 mora biti točan broj 6.

|             |               |               |                 |          |          |          |        |        |        |
|-------------|---------------|---------------|-----------------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|
| 1<br>5<br>8 | 2 3<br>5<br>6 | 1 2<br>8<br>7 | 1 2<br>4 5<br>8 | 6<br>8   | 4 5<br>8 | 4 3<br>7 | 3<br>4 | 3<br>7 | 4<br>9 |
| 6<br>8      | 2 3<br>6      | 7             | 2<br>8          | 2<br>4   | 9        | 5        | 4      | 3      | 1      |
| 9           | 5             | 4             | 3               | 7        | 5        | 8        | 2      | 6      | 6      |
| 3           | 4             | 6             | 1<br>9          | 1<br>4   | 6<br>4   | 7        | 2      | 5      | 8      |
| 1<br>4      | 2<br>6        | 1 2<br>4      | 1 2<br>9        | 3<br>5   | 3<br>5   | 1<br>4   | 1<br>4 | 6<br>6 | 6<br>9 |
| 7           | 8             | 5             | 2<br>9          | 1 2<br>4 | 1<br>6   | 4        | 4      | 6      | 3      |
| 1<br>4      | 5<br>4        | 4<br>5        | 3<br>9          | 1<br>4   | 5<br>5   | 8        | 2      | 6      | 7      |
| 2           | 1<br>4        | 5<br>6        | 6               | 7        | 3<br>5   | 1<br>4   | 3<br>9 | 8      | 4<br>5 |
| 1<br>4      | 5<br>7        | 3<br>8        | 1<br>4          | 5<br>6   | 9        | 4        | 5      | 6      | 2<br>4 |

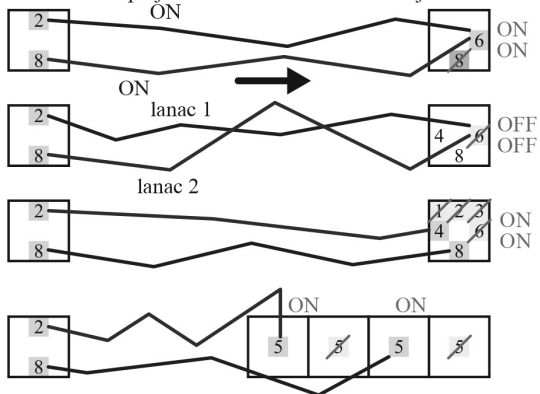
Slika 3.

$$\text{NL zapis: } I9=2=C9=6=E9 \implies I9=5 \implies E9=6$$

Iz analize oba lanca, da je broj 5 u I9 ili točan ili netočan (a to su jedine moguće kombinacije i jedna od njih mora biti istinita) zaključujemo da je broj 6 točan ili u E1 ili u E9. Budući da se polja E1 i E9 nalaze u jednom povezanom području (retku E) možemo eliminirati broj 6 iz svih ostalih polja u tom povezanom području. Konkretno u primjeru možemo eliminirati broj 6 iz E2 i E8 (tip 4).

#### Forsirani lanci jednog polja

svi kandidati u polju su ON na kraju svih lanaca



#### Tip 1

Ako je jedan kandidat ON u svim slučajevima, to mora biti rješenje polja.

#### Tip 2

Ako je jedan kandidat OFF u svim slučajevima, on se može eliminirati iz polja.

#### Tip 3

Ako je u jednom slučaju jedan kandidat ON, a u drugom drugi kandidat, ostale možemo eliminirati.

#### Tip 4

Ako je u svakom slučaju isti kandidat ON u povezanom području, možemo ga iz ostatka područja eliminirati.

Slika 4.

Na slici 4 je prikazana shema mogućih kontradikcija i zaključaka kod *forsiranih lanaca jednog polja*. U odabranom polju istražujemo lance implikacija za sve kandidate u polju kada su ON. Analiza i zaključci su isti kao i kod *forsiranih lanaca jednog kandidata*.

Ista logika vrijedi i ako su svi kandidati u polju netočni (OFF).

Pogledajte primjere na slikama 5 i 6.

|                  |                  |                |              |              |                |                |              |                |                |                |
|------------------|------------------|----------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 4                | <sup>2 3</sup>   | <sup>2 3</sup> | 6            | <sup>4</sup> | <sup>2 3</sup> | 1              | 9            | 5              | <sup>7 8</sup> | <sup>2</sup>   |
| 9                | <sup>1 2</sup>   | <sup>5</sup>   | 7            | <sup>2</sup> | <sup>5</sup>   | 6              | 8            | <sup>1 2</sup> | 4              | 3              |
| <sup>1 2 3</sup> | 8                | <sup>1</sup>   | <sup>5</sup> | <sup>4</sup> | <sup>2</sup>   | <sup>2 3</sup> | <sup>5</sup> | <sup>3</sup>   | <sup>1 2</sup> | <sup>6</sup>   |
| 8                | <sup>2 3</sup>   | <sup>5 6</sup> | 4            | 1            | 9              | <sup>3</sup>   | <sup>7</sup> | <sup>2</sup>   | <sup>3</sup>   | <sup>2</sup>   |
| <sup>1 2 3</sup> | <sup>1 2 3</sup> | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup> | 6            | 4              | 5              | 8            | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup>   | <sup>1 2</sup> |
| <sup>1</sup>     | <sup>3</sup>     | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup> | <sup>1</sup> | <sup>3</sup>   | 8              | <sup>3</sup> | 2              | 9              | <sup>1</sup>   |
| 5                | 4                | <sup>8 9</sup> | <sup>7</sup> | <sup>5</sup> | <sup>5</sup>   | 6              | 4            | 2              | <sup>8 9</sup> | <sup>7</sup>   |
| <sup>6</sup>     | <sup>6</sup>     | 2              | 9            | 8            | 4              | 3              | <sup>1</sup> | <sup>5</sup>   | <sup>1</sup>   | <sup>5</sup>   |

Slika 5.

Odabrano je polje G9 sa samo dva kandidata (to je dobra praksa jer ćemo imati samo dva lanca).

Prvi lanac (slika 5):  $G9=8 \Rightarrow G9-8-A9-2-A2-3-E2 \Rightarrow E2 <> 3$

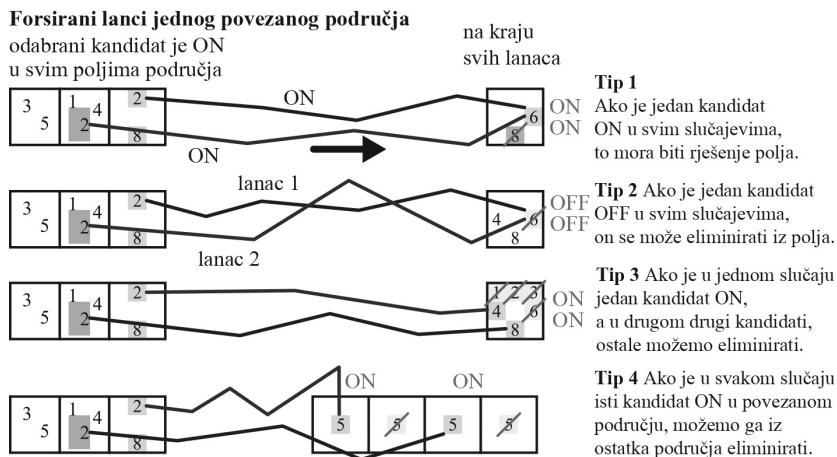
|                  |                  |                |              |              |                |                |              |                |                |                |
|------------------|------------------|----------------|--------------|--------------|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 4                | <sup>2 3</sup>   | <sup>2 3</sup> | 6            | <sup>4</sup> | <sup>2 3</sup> | 1              | 9            | 5              | <sup>7 8</sup> | <sup>2</sup>   |
| 9                | <sup>1 2</sup>   | <sup>5</sup>   | 7            | <sup>2</sup> | <sup>5</sup>   | 6              | 8            | <sup>1 2</sup> | 4              | 3              |
| <sup>1 2 3</sup> | 8                | <sup>1</sup>   | <sup>5</sup> | <sup>4</sup> | <sup>2</sup>   | <sup>2 3</sup> | <sup>5</sup> | <sup>3</sup>   | <sup>1 2</sup> | <sup>6</sup>   |
| 8                | <sup>2 3</sup>   | <sup>5 6</sup> | 4            | 1            | 9              | <sup>3</sup>   | <sup>7</sup> | <sup>2</sup>   | <sup>3</sup>   | <sup>2</sup>   |
| <sup>1 2 3</sup> | <sup>1 2 3</sup> | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup> | 6            | 4              | 5              | 8            | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup>   | <sup>1 2</sup> |
| <sup>1</sup>     | <sup>3</sup>     | <sup>1</sup>   | <sup>3</sup> | <sup>1</sup> | <sup>3</sup>   | 8              | <sup>3</sup> | 2              | 9              | <sup>1</sup>   |
| 5                | 4                | <sup>8 9</sup> | <sup>7</sup> | <sup>5</sup> | <sup>5</sup>   | 6              | 4            | 2              | <sup>8 9</sup> | <sup>7</sup>   |
| <sup>6</sup>     | <sup>6</sup>     | 2              | 9            | 8            | 4              | 3              | <sup>1</sup> | <sup>5</sup>   | <sup>1</sup>   | <sup>5</sup>   |

Slika 6.

Drugi lanac (slika 6):  $G9=9 \Rightarrow G9-9-G2=9=E2 \Rightarrow E2 <> 3$

Dakle, oba lanca ukazuju da u E2 ne može biti točan broj 3 i stoga 3 možemo eliminirati iz polja E2 (tip 2).

Na slici 7 je prikazana shema mogućih kontradikcija i zaključaka kod *forsiranih lanaca jednog povezanog područja*. U određenom povezanom području istražujemo lance implikacija za odabranog kandidata kada se postavi ON pojedinačno u svakom polju tog područja. Analiza i zaključci su isti kao i kod *forsiranih lanaca jednog kandidata*:



Slika 7.

Jasno je da u ovom slučaju imamo toliko lanaca koliko imamo istih kandidata u odabranom povezanom području, zato je poželjno odabrati područje sa što manje kandidata, po mogućnosti samo dva. Ista logika vrijedi i ako su svi kandidati u povezanom području netočni (OFF).

Pogledajte primjer na slici 8.

|            |          |            |          |          |            |          |          |          |     |
|------------|----------|------------|----------|----------|------------|----------|----------|----------|-----|
| 3          | 2<br>4 5 | 2<br>4 5   | 1        | 6<br>8   | 2<br>4 5   | 1        | 7        | 1<br>6   | 9   |
| 2<br>4 8   | 1        | 9          | 2 3<br>6 | 7        | 2 3<br>8   | 4        | 4        | 2<br>6   | 5   |
| 2<br>4 5   | 7        | 6          | 1 2<br>5 | 9        | 1 2<br>4 5 | 1        | 3        | 4<br>8   | 2   |
| 2<br>4 5   | 9        | 2<br>4 5   | 2<br>7   | 8        | 6          | 4        | 3        | 2<br>4 7 | 1   |
| 2 3<br>4 5 | 8        | 2 3<br>7 9 | 2 3<br>5 | 2 3<br>5 | 6          | 4        | 2<br>7 9 | 4        | 2   |
| 6          | 2 3<br>7 | 2          | 4        | 1        | 2 3<br>7 9 | 8 9      | 5        | 2<br>8   | 2   |
| 4 5        | 8        | 1<br>4 5   | 1<br>7 9 | 5        | 6          | 1<br>4 5 | 2        | 1<br>4 9 | 3   |
| 7          | 2<br>4 5 | 1 2<br>4 5 | 1<br>9   | 5        | 3          | 1<br>4 5 | 4 5      | 1<br>9   | 8 6 |
| 9          | 6        | 3          | 2<br>5 8 | 2<br>4 5 | 1 2<br>4 5 | 1<br>4 5 | 1<br>4   | 7        | 7   |

Slika 8.

Odabran je kandidat 2 u retku A koji se nalazi u poljima A2, A3 i A5. Dakle imamo tri lanca i možemo pokazati da u sva tri slučaja kada je u tim poljima broj 2 točan (ON), u polju F2 ne može biti točan broj 2 te ga možemo eliminirati iz tog polja (tip 2).

Prvi lanac:  $A_2=2 \Rightarrow A_2-2-F_2 \Rightarrow F_2 <> 2$

Drugi lanac:  $A_3=2 \Rightarrow A_3-2-H_3=2=H_2-2-F_2 \Rightarrow F_2 <> 2$

Treći lanac:  $A_5=2 \Rightarrow A_5-2-B_6-3-F_6=3=F_2 \Rightarrow F_2 <> 2$

Zaključak:  $(A_2 \vee A_3 \vee A_5)=2 \Rightarrow F_2 <> 2$

U sljedećem nastavku nastavljamo s *Nishio metodom*.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | 2 |   |   | 1 | 3 | 8 | 9 |   |
|   |   |   | 4 | 5 |   |   | 1 | 6 |
|   |   | 4 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   | 6 | 4 |   |   | 5 |
|   | 4 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |   |
| 7 |   |   | 1 | 3 |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   | 3 |   |   |
| 9 | 5 |   |   | 4 | 1 |   |   |   |
|   | 3 | 7 | 5 | 9 |   |   | 8 |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 5 | 7 | 1 | 3 | 8 | 9 | 4 |
| 3 | 7 | 9 | 4 | 5 | 8 | 2 | 1 | 6 |
| 1 | 8 | 4 | 6 | 2 | 9 | 5 | 7 | 3 |
| 8 | 9 | 1 | 2 | 6 | 4 | 7 | 3 | 5 |
| 5 | 4 | 3 | 9 | 8 | 7 | 1 | 6 | 2 |
| 7 | 6 | 2 | 1 | 3 | 5 | 9 | 4 | 8 |
| 4 | 1 | 6 | 8 | 7 | 2 | 3 | 5 | 9 |
| 9 | 5 | 8 | 3 | 4 | 1 | 6 | 2 | 7 |
| 2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 6 | 4 | 8 | 1 |