Parametrizacije skupa kvadratnih funkcija[1]

Maja Starčević[2]

U nastavi matematike spominju se dvije vrste parametrizacije skupa kvadratnih funkcija. U ovom ćemo radu opisati njihove karakteristike, odnos njihovih parametara te kako promjena pojedinog parametra utječe na graf funkcije. Navest ćemo još neke načine na koje možemo parametrizirati skup kvadratnih funkcija.

Kvadratna funkcija je funkcija koja se u općenitom obliku uobičajeno zadaje s

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ \ a,\ \ b,\ \ c\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0. \tag{1}$$

Iz tog oblika lako prepoznajemo da je kvadratna funkcija zapravo polinom drugog stupnja, a parametri u definiciji funkcije predstavljaju koeficijente uz pojedine potencije polinoma. Graf kvadratne funkcije je parabola. Za svaki izbor parametara dobivamo parabolu koja je simetrična s obzirom na neki pravac koji je paralelan s y-osi koordinatnog sustava.

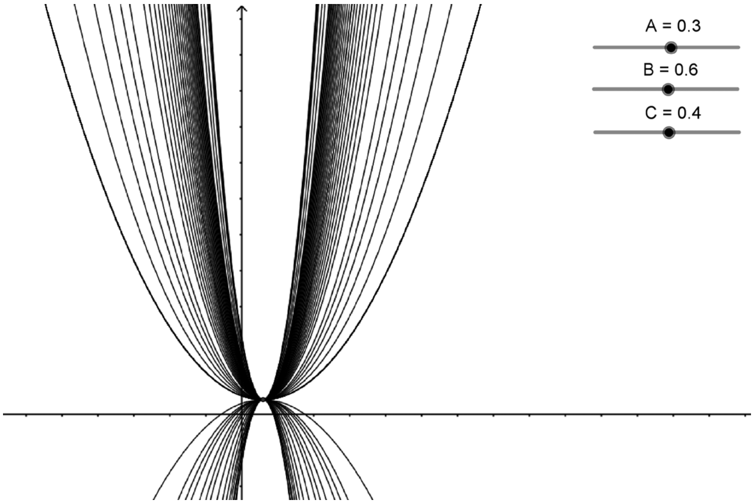
Ako želimo opisati izgled i položaj parabole, potrebno je opisati položaj njezinog tjemena, njezinu usmjerenost (je li otvorom okrenuta prema gore ili prema dolje) i širinu otvora. Parabolu u ovisnosti o parametrima možemo lako promatrati u *GeoGebri*. Parametre a, b i c mijenjamo pomoću postavljenih klizača. U traku za unos unesemo definiciju funkcije, a pomoću alata za određivanje ekstrema lako je ucrtati tjeme. Položaj tjemena pri promjeni nekog od parametara možemo postupno proučavati tako da tjemenu uključimo trag. Nakon toga možemo pomicati odabrani klizač ili ga animirati. Ako želimo taj rezultat dobiti brže, i da bude potpuniji, odaberemo alat za crtanje lokusa te zatim odaberemo tjeme i klizač promatranog parametra. Nacrtat će se putanja tjemena pri promjeni tog parametra. Promjenu širine otvora parabole promatramo na analogan način, tako da čitavoj paraboli uključimo trag.

Kvadratna funkcija općenito se može zadati i u drugačijem obliku od (1). Najpoznatiji oblik je

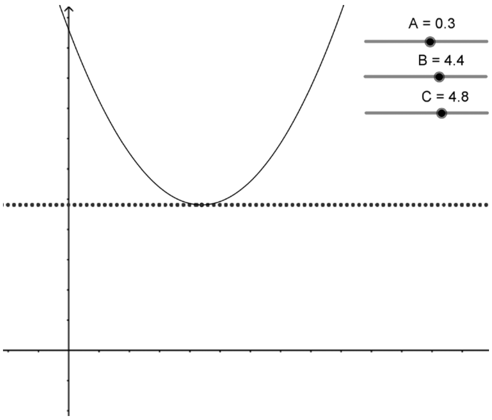
$$f(x)=A(x-B)^2+C,\ \ A,\ \ B,\ \ C\in\mathbb{R},\ \ A\neq 0. \tag{2}$$

[1]Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu
[2]Maja Starčević, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

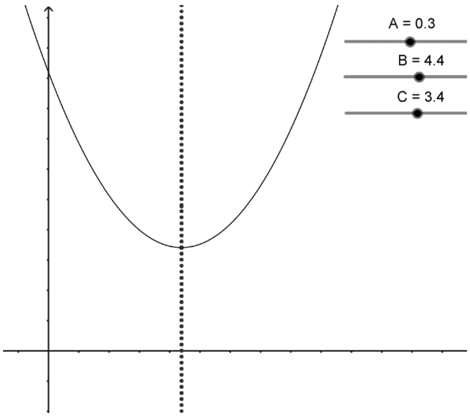
Taj oblik često se proučava u nastavi. Kod takvog parametarskog zapisa kvadratne funkcije lako je komentirati utjecaj promjene parametara na izgled grafa funkcije. Vidimo da koeficijent A utječe na usmjerenost parabole i širinu otvora parabole (Slika 1.). Konkretno, ako je $A > 0$, parabola je okrenuta prema gore, a inače prema dolje. Otvor je širi što broj $|A|$ ima manju vrijednost. Tjeme parabole je u točki (B, C). Promjenom parametra B parabolu pomičemo ulijevo (kad smanjujemo B), odnosno udesno (kad povećavamo B). Pritom se tjeme giba po pravcu $y = C$ (Slika 2.). Nadalje, promjenom parametra C pomičemo parabolu gore (ako povećavamo C) ili dolje (ako smanjujemo C). Tjeme se pritom giba po pravcu $x = B$ (Slika 3.). Pri promjeni parametara B i C ne mijenjamo ni širinu ni usmjerenost parabole.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Ako je kvadratna funkcija zadana u obliku (2), lako dolazimo i do njezinih nultočaka. Pritom nije potrebno poznavati neku formulu ili raditi rastav trinoma.

Naime, iz $f(x) = 0$ lako slijedi

$$\left(x-B\right)^2=-\frac{C}{A},$$

odnosno, nultočke $x_{1,2}$ jednake su

$$x_{1,2}=B\pm\sqrt{-\frac{C}{A}} \tag{3}$$

pa za $\frac{C}{A}<0$ imamo dva različita realna rješenja

$$x_{1,2}=B\pm\sqrt{-\frac{C}{A}},$$

a za $\frac{C}{A}>0$ dobivamo kompleksno konjugirana rješenja

$$x_{1,2}=B\pm i\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Kad je $C = 0$, imamo dvostruko realno rješenje $x_{1,2} = B$.

Neka je sada zadana kvadratna funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$, gdje je $a \neq 0$. Zapišimo tu kvadratnu funkciju pomoću parametrizacije (2):

$$f\left(x\right)=ax^2+bx+c=A\left(x-B\right)^2+C.$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste potencije dobivamo

$$a=A,\ \ b=-2AB,\ \ c=AB^2+C, \tag{4}$$

iz čega, zbog $a \neq 0$, slijedi

$$A=a,\ \ B=-\frac{b}{2a},\ \ C=c-\frac{b^2}{4a}. \tag{5}$$

Dakle, svaka kvadratna funkcija na jedinstven se način može zapisati u obliku (2), a s (4) i (5) dane su redom formule za prijelaz iz parametrizacije (2) u parametrizaciju (1) i obratno. Nadalje, uvrštavanjem (5) u (3) dobivamo

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{-\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{6}$$

odnosno poznatu formulu za kvadratnu jednadžbu $f(x) = 0$ koja se koristi kad je funkcija f zadana u obliku (1). Vrstu nultočaka opet određujemo u ovisnosti o predznaku izraza $\frac{C}{A}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. U slučaju $b^2-4ac>0$ imamo realna rješenja

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac},$$

a u slučaju $b^2-4ac<0$ kompleksna rješenja

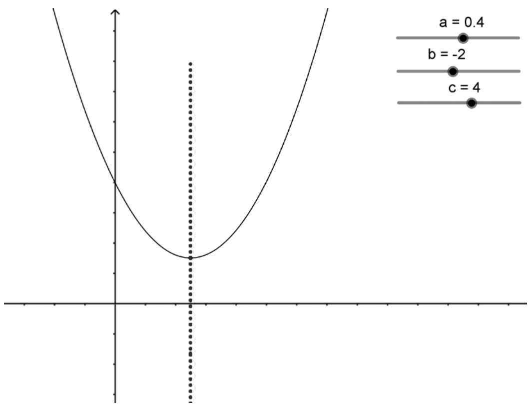
$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{i}{2a}\sqrt{4ac-b^2}.$$

Konačno, za $b^2 - 4ac = 0$ imamo dvostruko realno rješenje $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

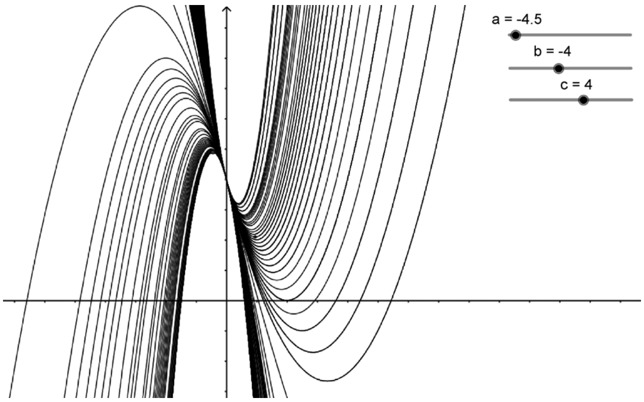
Zapis kvadratne funkcije oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ osnovni je zapis kvadratne funkcije i formula za rješenja pripadne kvadratne jednadžbe koju pamtimo, stoga odgovara tome obliku. Pitamo se je li i kod takve parametrizacije kvadratne funkcije moguće odrediti kako promjena nekog parametra utječe na graf funkcije. Odgovor na to pitanje možemo za početak naslutiti promatranjem parabole u *GeoGebri*. Zapišimo i koordinate tjemena parabole:

$$T = (x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right). \tag{7}$$

Vidimo da se promjenom parametra c parabola pomiče gore ili dolje (Slika 4.), odnosno po pravcu $x = -\frac{b}{2a}$. Promjenom parametra a parabola se širi sa smanjenjem vrijednosti $|a|$ te je okrenuta prema gore ako i samo ako je $a > 0$ (Slika 5.). Promjenom tog parametra i tjeme parabole pomiče se po nekom pravcu (Slika 6.). Odredimo jednadžbu toga pravca. Neka je prvo $b \neq 0$. Tada je i $x_T \neq 0$ pa iz (7) imamo da je $a = -\frac{b}{2x_T}$. Uvrštavanjem u izraz za y_T dobivamo $y_T = \frac{b}{2}x_T + c$. Dakle, tjeme se promjenom parametra a giba po pravcu $y = \frac{b}{2}x + c$. S obzirom da je $x_T \neq 0$, tjeme prolazi kroz sve točke toga pravca osim kroz točku $(0, c)$. Također primjećujemo da nagib toga pravca ovisi o parametru b, a odsječak na y-osi o parametru c. Specijalan slučaj je kad imamo $b = 0$. Tada je tjeme $T = (0, c)$ pa promjenom parametra a samo utječemo na širinu otvora parabole i njezinu usmjerenost, na isti način kao i u slučaju kad je $b \neq 0$, odnosno ne mijenjamo položaj tjemena.

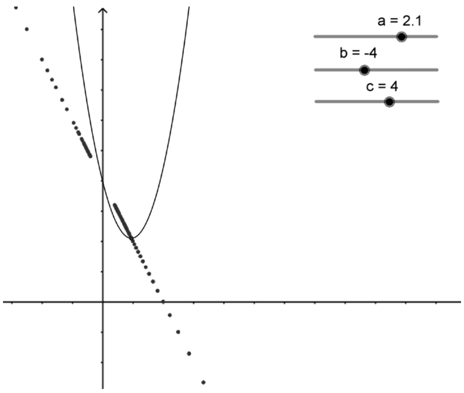


Slika 4.

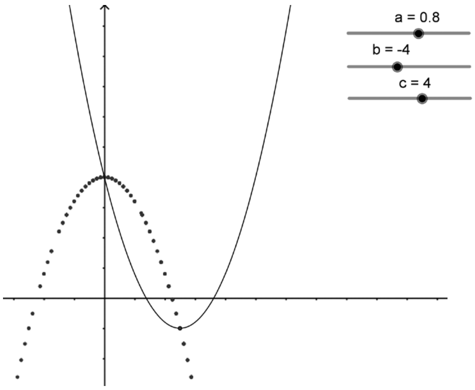


Slika 5.

Slično, pomoću traga možemo primijetiti da promjenom parametra b parabola funkcije f ne mijenja širinu otvora ni usmjerenost, ali se njezino tjeme giba po nekoj drugoj paraboli (Slika 7.). Da bismo izveli jednadžbu te parabole, iz (7) izrazimo $b=-2ax_T$ pa uvrštavanjem u izraz za y_T dobivamo $y_T=c-ax_T{}^2$. Dakle, parabola po kojoj se giba tjeme ima jednadžbu $y=-ax^2+c$, iste je širine otvora kao i parabola zadane funkcije f, ali je suprotno usmjerena i tjeme joj se nalazi u točki $(0, c)$. Točka tjemena parabole funkcije f se promjenom parametra b može naći u bilo kojoj točki parabole $y=-ax^2+c$.



Slika 6.



Slika 7.

Pogledajmo i neke drugačije parametrizacije skupa kvadratnih funkcija. Uzmimo npr. parametrizaciju

$$f(x)=a_1\left(x^2+x\right)+b_1(x+1)+c_1,\ a_1,\ b_1,\ c_1\in\mathbb{R},\ a_1\neq 0. \tag{8}$$

Provjerimo jesmo li na taj način opisali sve kvadratne funkcije. Za sve $a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ tražimo $a_1,\ b_1,\ c_1\in\mathbb{R},\ a_1\neq 0$ takve da je

$$f(x)=a_1\left(x^2+x\right)+b_1(x+1)+c_1=ax^2+bx+c.$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste potencije dobivamo

$$a_1 = a,\ \ a_1 + b_1 = b,\ \ b_1 + c_1 = c, \tag{9}$$

odnosno

$$a_1 = a,\ \ b_1 = b - a,\ \ c_1 = a - b + c$$

pa se svaka kvadratna funkcija može zapisati i u obliku (8).

Zbog (6) i (9) kvadratna jednadžba $f(x) = 0$ ima rješenje

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 - b_1 \pm \sqrt{(a_1 + b_1)^2 - 4a_1(b_1 + c_1)}}{2a_1} = \frac{-a_1 - b_1 \pm \sqrt{(a_1 - b_1)^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1}.$$

Odredimo i kako promjena parametara a_1, b_1, c_1 utječe na graf ovako zapisane kvadratne funkcije. Za početak iz (7) i (9) vidimo da su koordinate tjemena dane s

$$T = (x_T, y_T) = \left(-\frac{a_1 + b_1}{2a_1},\ \frac{4a_1(b_1 + c_1) - (a_1 + b_1)^2}{4a_1} \right).$$

Prvo gledamo kako promjena parametra a_1 utječe na tjeme parabole funkcije f. Neka je za početak $b_1 \neq 0$. Tada je $x_T \neq -\frac{1}{2}$. Nadalje vrijedi

$$a_1 = -\frac{b_1}{2x_T + 1},$$

iz čega dobivamo

$$y_T = b_1 + c_1 + \frac{b_1 x_T{}^2}{2x_T + 1}.$$

Zaključujemo da se u slučaju $b_1 \neq 0$ tjeme giba po grafu funkcije

$$g(x) = b_1 + c_1 + \frac{b_1 x^2}{2x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

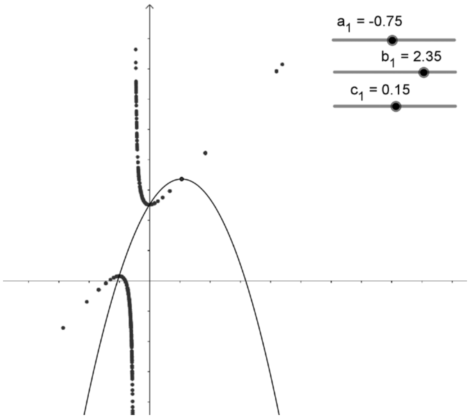
Proučit ćemo svojstva te krivulje na dva načina, pomoću diferencijalnog računa te svođenjem njezine jednadžbe na jednadžbu u kojoj prepoznajemo krivulju drugog reda.

Za početak odredimo neka svojstva funkcije g koristeći njezine derivacije. Prva derivacija iznosi

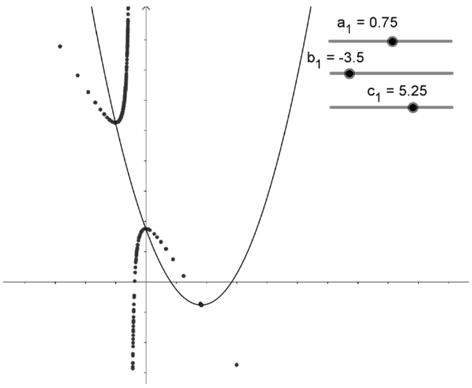
$$g'(x) = \frac{2b_1 x(x+1)}{(2x+1)^2}.$$

Stacionarne točke funkcije g su prema tome $x = 0$ i $x = -1$. Za $b_1 > 0$ je $g'(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ te je $g'(x) < 0$ za $x \in \langle -1, 0 \rangle \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$. S druge strane, za $b_1 < 0$ je $g'(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ te je $g'(x) > 0$ za $x \in \langle -1, 0 \rangle \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Dakle, za $b_1 > 0$ funkcija g je rastuća na intervalima $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$ te padajuća na intervalima $\left\langle -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ (Slika 8.). Za $b_1 < 0$ funkcija g je padajuća na intervalima $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$ te rastuća na intervalima $\left\langle -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ (Slika 9.).



Slika 8.



Slika 9.

Druga derivacija funkcije g je

$$g''(x) = \frac{2b_1}{(2x+1)^3}.$$

Neka je $b_1 > 0$. Tada je $g''(0) > 0$ i $g''(-1) < 0$ pa funkcija g u točki $x = 0$ ima lokalni minimum, a u točki $x = -1$ lokalni maksimum.

Za $b_1 < 0$ je $g''(0) < 0$ i $g''(-1) > 0$, odnosno funkcija g u točki $x = 0$ ima lokalni maksimum, a u točki $x = -1$ lokalni minimum.

U $x = -\frac{1}{2}$ funkcija g nije definirana. Proučimo ponašanje funkcije g u okolini te točke. Za $b_1 > 0$ je

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} g(x) = +\infty.$$

Za $b_1 < 0$ je

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty.$$

Prema tome pravac $x = -\frac{1}{2}$ vertikalna je asimptota funkcije g, a način približavanja grafa funkcije g toj asimptoti ovisi o parametru b_1.

Proučimo i ponašanje funkcije g u beskonačnosti. Kako za $x \neq 0, \ -\frac{1}{2}$ možemo pisati

$$g(x) = b_1 + c_1 + \frac{b_1 x}{2 + \frac{1}{x}},$$

za $b_1 > 0$ vrijedi

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$

a za $b_1 < 0$ je

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

Sa Slika 8. i 9. naslućujemo da bi funkcija g mogla imati i kosu asimptotu. Da bi postojala kosa asimptota $y = kx + \ell$ kad $x \to +\infty$, moraju postojati limesi

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}, \qquad \ell = \lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - kx\right).$$

Računamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b_1 + c_1}{x} + \frac{b_1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{b_1}{2} = k.$$

Nadalje, imamo i

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - kx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(b_1 + c_1 - \frac{b_1}{2\left(2 + \frac{1}{x}\right)} \right) = \frac{3b_1}{4} + c_1 = \ell.$$

Dakle, funkcija g ima kosu asimptotu $y = \frac{b_1}{2} x + \frac{3b_1}{4} + c_1$ za $x \to +\infty$, a analogno se dokazuje da je to kosa asimptota za $x \to -\infty$.

Time smo utvrdili osnovna svojstva funkcije g.

Primijetimo dodatno da je graf funkcije g krivulja koja ima jednadžbu

$$b_1 x^2 - 2xy + 2\left(b_1 + c_1\right)x - y + b_1 + c_1 = 0.$$

Ovakav tip jednadžbe predstavlja krivulju drugog reda, ali s obzirom da sadrži član xy, osi simetrije krivulje nisu paralelne s nekom od koordinatnih osi. Potražit ćemo stoga koordinatni sustav u kojemu će zadana krivulja imati to svojstvo.

Dobit ćemo ga rotacijom postojećeg koordinatnog sustava za kut φ (koji ćemo naknadno odrediti) oko ishodišta.

Označimo koordinate u novom koordinatnom sustavu s (x', y'). Imamo vezu između koordinata

$$x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y',$$
$$y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'.$$

Tada jednadžba krivulje u novim koordinatama glasi

$$\left(b_1\cos^2\varphi-\sin(2\varphi)\right)(x')^2-\left(b_1\sin(2\varphi)+2\cos(2\varphi)\right)x'y'$$
$$+\left(b_1\sin^2\varphi+\sin(2\varphi)\right)(y')^2$$
$$+\left(2(b_1+c_1)\cos\varphi-\sin\varphi\right)x'+\left(-2(b_1+c_1)\sin\varphi-\cos\varphi\right)y'+b_1+c_1=0.$$

Da bismo poništili član koji sadrži $x'y'$, odaberimo rotaciju za kut φ takav da je $b_1\sin(2\varphi)+2\cos(2\varphi)=0$, odnosno $\operatorname{tg}(2\varphi)=-\frac{2}{b_1}$.
Dakle, dobivamo jednadžbu

$$m(x')^2+n(y')^2+px'+qy'+b_1+c_1=0, \tag{10}$$

gdje je

$$m=b_1\cos^2\varphi-\sin(2\varphi),\quad n=b_1\sin^2\varphi+\sin(2\varphi)$$
$$p=2(b_1+c_1)\cos\varphi-\sin\varphi,\quad q=-2(b_1+c_1)\sin\varphi-\cos\varphi.$$

Nadopunjavanjem do kvadrata iz (10) dobivamo

$$m(x'-u)^2+n(y'-v)^2=d,$$

pri čemu je

$$u=-\frac{p}{2m},\quad v=-\frac{q}{2n},\quad d=\frac{p^2}{4m}+\frac{q^2}{4n}-b_1-c_1.$$

Konačno, dobivamo jednadžbu

$$\frac{(x'-u)^2}{m_1}+\frac{(y'-v)^2}{n_1}=1, \tag{11}$$

gdje je $m_1=\frac{d}{m}$ i $n_1=\frac{d}{n}$.

Da bismo odredili o kojoj se krivulji drugog reda radi, potrebno je utvrditi odnos predznaka koeficijenata uz kvadratne članove u toj jednadžbi. Zapišimo prvo

$$m=\frac{b_1}{2}+\left[\frac{b_1}{2}\cos(2\varphi)-\sin(2\varphi)\right],$$
$$n=\frac{b_1}{2}-\left[\frac{b_1}{2}\cos(2\varphi)-\sin(2\varphi)\right].$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}mn&=\frac{b_1^2}{4}-\left[\frac{b_1}{2}\cos(2\varphi)-\sin(2\varphi)\right]^2\\&=\frac{b_1^2}{4}-\frac{b_1^2}{4}\cos^2(2\varphi)+b_1\cos(2\varphi)\sin(2\varphi)-\sin^2(2\varphi)\\&=\frac{b_1^2}{4}-\frac{b_1^2}{4}\cos^2(2\varphi)+b_1\cos^2(2\varphi)tg(2\varphi)-\sin^2(2\varphi).\end{aligned}$$

Sada koristimo formule

$$\sin^2(2\varphi) = \frac{\mathrm{tg}^2(2\varphi)}{1+\mathrm{tg}^2(2\varphi)},$$
$$\cos^2(2\varphi) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(2\varphi)}$$

i uvrštavanjem $\mathrm{tg}(2\varphi) = -\frac{2}{b_1}$ dobivamo $mn = -1$. Dakle, u jednadžbi (11) brojevi m_1 i n_1 različitih su predznaka pa u njoj prepoznajemo jednadžbu hiperbole.

Na kraju proučimo i slučaj kad je $b_1 = 0$. Tada je tjeme parabole funkcije *f* u točki $T = \left(-\frac{1}{2},\ c_1 - \frac{a_1}{4}\right)$ te se promjenom parametra a_1 tjeme giba po pravcu $x = -\frac{1}{2}$. Kako je $a_1 \neq 0$, jedina točka tog pravca u kojoj se tjeme ne može naći je točka $\left(-\frac{1}{2},\ c_1\right)$.

Sada pogledajmo kako promjena parametra b_1 utječe na položaj grafa funkcije *f*. Imamo da je $b_1 = -2a_1 x_T - a_1$, pa je

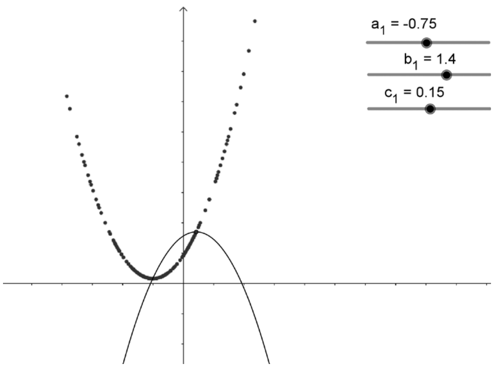
$$y_T = -a_1 x_T^{\ 2} - 2a_1 x_T - a_1 + c_1.$$

Dakle, tjeme parabole funkcije *f* giba se po paraboli s jednadžbom

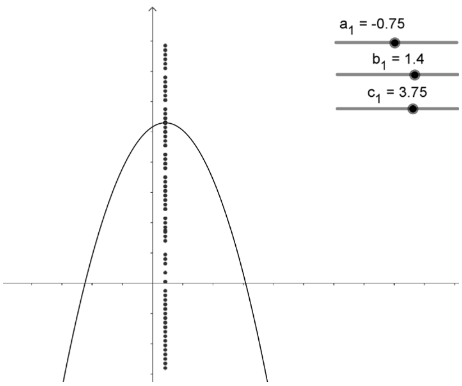
$$y = -a_1 x^2 - 2a_1 x - a_1 + c_1 = -a_1(x+1)^2 + c_1$$

i prolazi kroz sve njezine točke (Slika 10.). Ta parabola ima otvor iste širine kao i parabola funkcije *f*, ali je suprotno usmjerena. Tjeme joj se nalazi u točki $(-1, c_1)$.

Konačno, kad mijenjamo parametar c_1, tjeme parabole funkcije *f* pomiče se po pravcu $x = -\frac{1}{2} - \frac{b_1}{2a_1}$ (Slika 11.).



Slika 10.



Slika 11.

Pogledat ćemo i jednu općenitu klasu parametrizacija. Želimo napraviti parametrizaciju skupa kvadratnih funkcija oblika

$$f(x)=\alpha\left(d_{11}x^2+d_{21}x+d_{31}\right)+\beta\left(d_{12}x^2+d_{22}x+d_{32}\right)+\gamma\left(d_{13}x^2+d_{23}x+d_{33}\right), \quad (12)$$

gdje su d_{ij}, $i, j = 1,..., 3$ neki odabrani realni brojevi , a α, β i γ parametri takvi da je $d_{11}\alpha+d_{12}\beta+d_{13}\gamma\neq 0.$ Brojevi d_{ij} dobro su odabrani ako sustav

$$\begin{aligned} d_{11}\alpha+d_{12}\beta+d_{13}\gamma&=a\\ d_{21}\alpha+d_{22}\beta+d_{23}\gamma&=b\\ d_{31}\alpha+d_{32}\beta+d_{33}\gamma&=c \end{aligned}$$

ima rješenje za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Dakle, kod parametrizacije tipa (12) sve kvadratne funkcije mogu se zapisati kao linearna kombinacija prethodno odabranih triju polinoma stupnja najviše dva.

Primijetimo da prethodno spomenute parametrizacije $f(x)=ax^2+bx+c$ i $f(x)=a_1\left(x^2+x\right)+b_1\left(x+1\right)+c_1$ pripadaju klasi parametrizacija (12), dok parametrizacija $f(x)=A(x-B)^2+C$ ne pripada toj klasi.

Primjer 1.

Zadana je parametrizacija

$$f(x)=\alpha_1\left(x^2+3x+2\right)+\beta_1\left(x^2+2x+3\right)+\gamma_1\left(x^2+x+3\right),\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1\neq 0.$$

Pokažimo da su njome opisane sve kvadratne funkcije.

Rješenje.

Neka je $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0.$ Iz

$$f(x)=\alpha_1\left(x^2+3x+2\right)+\beta_1\left(x^2+2x+3\right)+\gamma_1\left(x^2+x+3\right)=ax^2+bx+c$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1&=a\\ 3\alpha_1+2\beta_1+\gamma_1&=b\\ 2\alpha_1+3\beta_1+3\gamma_1&=c. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s –3 i dodamo je drugoj te pomnožimo prvu jednadžbu s –2 i dodamo je trećoj. Dobivamo ekvivalentan sustav

$$\begin{aligned} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1&=a\\ -\beta_1-2\gamma_1&=-3a+b\\ \beta_1+\gamma_1&=-2a+c. \end{aligned}$$

Dodamo drugu jednadžbu trećoj i dobivamo ekvivalentan trokutasti sustav

$$\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1&=a\\-\beta_1-2\gamma_1&=-3a+b\\-\gamma_1&=-5a+b+c.\end{aligned}$$

Tada vidimo da je $\gamma_1=5a-b-c$. Iz druge jednadžbe dobivamo $\beta_1=-7a+b+2c$, a iz prve jednadžbe onda imamo $\alpha_1=3a-c$. S obzirom da smo dobili rješenje sustava za sve moguće parametre a, b, c, parametrizacija je dobro postavljena.

Primjer 2.

Sada ispitujemo je li dobro zadana parametrizacija

$$f(x)=\alpha_2\left(x^2+3x+2\right)+\beta_2\left(x^2+2x+3\right)+\gamma_2\left(x^2+x+4\right),\ \ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2\neq 0.$$

Rješenje.

Zadatak rješavamo analogno prethodnom. Ovaj put pripadni sustav izgleda

$$\begin{aligned}\alpha_2+\beta_2+\gamma_2&=a\\3\alpha_2+2\beta_2+\gamma_2&=b\\2\alpha_2+3\beta_2+4\gamma_2&=c.\end{aligned}$$

Analogno prethodnom primjeru prvo svodimo sustav na

$$\begin{aligned}\alpha_2+\beta_2+\gamma_2&=a\\-\beta_2-2\gamma_2&=-3a+b\\\beta_2+2\gamma_2&=-2a+c,\end{aligned}$$

a zatim na

$$\begin{aligned}\alpha_2+\beta_2+\gamma_2&=a\\-\beta_2-2\gamma_2&=-3a+b\\0&=-5a+b+c.\end{aligned}$$

Da bi sustav imao rješenje, treba vrijediti $5a-b-c=0$. Dakle, pomoću zadane parametrizacije ne možemo npr. prikazati kvadratnu funkciju $f(x)=x^2+x+1$ pa parametrizacija nije dobro zadana.

Za kraj napomenimo da je pomoću determinante lako vidjeti je li parametrizacija tipa (12) ispravna. Naime, ako je determinanta sustava

$$\begin{vmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}\\d_{21}&d_{22}&d_{23}\\d_{31}&d_{32}&d_{33}\end{vmatrix}=d_{11}d_{22}d_{33}+d_{12}d_{23}d_{31}+d_{13}d_{21}d_{32}-d_{31}d_{22}d_{13}-d_{32}d_{23}d_{11}-d_{33}d_{21}d_{12}$$

različita od nule, parametrizacija je dobro zadana. U suprotnom će uvijek postojati neke kvadratne funkcije za koje ne postoje pripadni parametri. U primjeru 1 pripadna determinanta ima vrijednost 1, dok je u primjeru 2 analogna vrijednost jednaka 0.

Promotrimo i nekoliko parametrizacija skupa kvadratnih funkcija koje nisu tipa (12).

Primjer 3.

Zadane su parametrizacije

a) $f(x)=a_2x^2+a_2b_2x+a_2b_2c_2,\ a_2\neq 0;$

b) $f(x)=a_3x^2+a_3b_3x+a_3c_3,\ a_3\neq 0;$

c) $f(x)=a_4x^2+a_4{b_4}^2x+c_4,\ a_4\neq 0;$

d) $f(x)=a_5b_5x^2+a_5c_5x+b_5c_5,\ a_5,\ b_5\neq 0;$

e) $f(x)=(a_6+b_6)(x-b_6)^2+c_6,\ a_6+b_6\neq 0.$

Odredit ćemo koje parametrizacije opisuju čitav skup kvadratnih funkcija te ćemo za njih komentirati kako promjena parametara utječe na graf funkcije.

Rješenje.

a) Uzmimo kvadratnu funkciju oblika $f(x)=ax^2+bx+c$ za koju je $a\neq 0$, $b=0$ i $c\neq 0$. Ako je možemo zapisati u zadanoj parametrizaciji, tada je $a_2b_2=b=0$. Kako je $a_2=a\neq 0$, imamo $b_2=0$ pa je $c=a_2b_2c_2=0$ i dobivamo kontradikciju. Dakle, funkcije ovog oblika ne mogu se dobiti zadanom parametrizacijom pa ova parametrizacija nije korektna.

b) Neka je dana proizvoljna kvadratna funkcija oblika $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Ako ju je moguće zapisati u zadanoj parametrizaciji, onda je $a=a_3$, $b=a_3b_3$ i $c=a_3c_3$. Tada zbog $a\neq 0$ vrijedi $a_3=a$, $b_3=\frac{b}{a}$, $c_3=\frac{c}{a}$. Prema tome, zapis je uvijek moguć te imamo dobru parametrizaciju skupa kvadratnih funkcija.

Pogledajmo kako promjena parametara utječe na graf funkcije f. Iz (7) dobivamo koordinate tjemena

$$T=(x_T,\ y_T)=\left(-\frac{b_3}{2},\ \frac{4a_3c_3-a_3{b_3}^2}{4}\right).$$

Promotrimo što se događa kad mijenjamo parametar b_3. Kako je $b_3=-2x_T$, imamo $y_T=a_3c_3-a_3{x_T}^2$. Prema tome, ako mijenjamo parametar b_3, tjeme parabole pomiče se po paraboli s jednadžbom $y=-a_3x^2+a_3c_3$ koja ima otvor iste širine kao i parabola funkcije f, suprotno je usmjerena od parabole funkcije f, a tjeme joj je u točki $(0,a_3c_3)$. S druge strane, ako mijenjamo parametar c_3, tjeme parabole funkcije f giba se po pravcu $x=-\frac{b_3}{2}$. Konačno, ako mijenjamo parametar a_3 i ako je $4c_3 - b_3^2 \neq 0$, tjeme se također giba po pravcu $x = -\frac{b_3}{2}$, ali ne prolazi kroz točku $\left(-\frac{b_3}{2}, 0\right)$, dok se u slučaju $4c_3 - b_3^2 = 0$ tjeme nalazi u točki $\left(-\frac{b_3}{2}, 0\right)$. Promjenom parametra a_3 mijenjaju se i usmjerenost i širina parabole. Parabola se širi kad $|a_3|$ postaje manji i okrenuta je prema gore ako i samo ako je $a_3 > 0$.

c) Neka je zadana funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ takva da je $a > 0$ i $b < 0$. Ako je možemo zapisati u zadanoj parametrizaciji, onda je $a_4 = a$ i $a_4 b_4^2 = b$ pa zaključujemo da je $b > 0$ i dobivamo kontradikciju. Dakle, funkcije zadanog oblika nije moguće zapisati na taj način, stoga ova parametrizacija nije dobra.

d) Neka je dana funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ takva da je $abc < 0$. Pretpostavimo da je možemo zapisati u zadanoj parametrizaciji. Imamo $a = a_5 b_5$, $b = a_5 c_5$, $c = b_5 c_5$. Množenjem ovih jednakosti dobivamo $(a_5 b_5 c_5)^2 = abc < 0$, što je očito kontradikcija. Dakle, ni ova parametrizacija nije dobra.

e) Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ proizvoljna kvadratna funkcija. Ako je zapisana u zadanoj parametrizaciji, onda vrijedi $a_6 + b_6 = a$, $-2b_6(a_6 + b_6) = b$, $b_6^2(a_6 + b_6) + c_6 = c$. Tada je $b_6 = -\frac{b}{2a}$, $a_6 = a + \frac{b}{2a}$, $c_6 = c - \frac{b^2}{4a}$. Dakle, zapis je uvijek moguć pa je parametrizacija dobro zadana. Tjeme parabole funkcije f je u točki (b_6, c_6). Promjenom parametra a_6 tjeme parabole ne mijenja položaj, ali parabola mijenja širinu i/ili usmjerenost. Parabola je usmjerena prema gore ako i samo ako je $a_6 > -b_6$. Parabola se sužava ako se vrijednost $|a_6 + b_6|$ povećava. Preciznije, ako je $a_6 > -b_6$ i parametar a_6 se povećava, otvor parabole se sužava. Također, ako je $a_6 < -b_6$ i koeficijent a_6 se smanjuje, otvor parabole opet se sužava. Promjenom parametra b_6 tjeme parabole kreće se po pravcu $y = c_6$ te se pritom ne može naći jedino u točki $(-a_6, c_6)$. Ujedno se mijenja i širina i/ili usmjerenost parabole. Parabola je okrenuta prema gore ako i samo ako je $b_6 > -a_6$ i sužava se ako se vrijednost $|a_6 + b_6|$ povećava. Konkretno, ako je $b_6 > -a_6$ i parametar b_6 se povećava, otvor parabole se sužava. Također, ako je $b_6 < -a_6$ i koeficijent b_6 se smanjuje, otvor parabole se opet sužava. Promjenom parametra c_6 tjeme parabole kreće se po pravcu $x = b_6$ te taj parametar ne utječe ni na njezinu širinu ni na usmjerenost.