Nezavisni rasporedi topova na šahovskoj ploči

Milan Živanović[1] i Šefket Arslanagić[2]

Uvod

Općeprihvaćeno je mišljenje da između matematike i šaha postoji velika bliskost. Za uspješnost u obje djelatnosti od velikog su značaja logičko-kombinatorne sposobnosti. Nekadašnji svjetski prvaci u šahu Emanuel Lasker i Max Euwe bili su profesionalni matematičari. Iznimne matematičke sposobnosti u mladosti su pokazali Mihail Talj i Anatolij Karpov. Velik broj matematičkih zadataka inspiriran je osobinama šahovske ploče, odnosno postavljanjem i kretanjem šahovskih figura. Ti zadatci zastupljeni su u gotovo svim zbirkama namijenjenima za pripremu učenika za natjecanja, a u njihovom rješavanju potrebno je koristiti različite matematičke discipline.

U mnoštvu raznovrsnih problema po svom povijesnom, ali i teorijskom značaju istaknuli su se tzv. *Problemi nezavisnosti šahovskih figura*. U njima je potrebno odrediti maksimalan broj konkretnih figura koje je moguće postaviti na šahovsku ploču a da se međusobno ne napadaju. Dodatno je potrebno naći i broj svih takvih različitih rasporeda. Svakako da je najpoznatiji problem tog tipa *Zadatak o osam dama*, čijim se rješavanjem bavio i Friedrich Gauss. Zadatci su najprije zadani za standardnu šahovsku ploču, ali su kasnije poopćeni za ploču dimenzija $n \times n$. Ovdje ćemo razmotriti problem nezavisnosti topova.

Nezavisnost topova

Zadatak: *Koliki je maksimalan broj topova koje možemo postaviti na šahovsku ploču $n \times n$ da se međusobno ne napadaju i koliko ima takvih različitih rasporeda?*

Promotrimo najprije standardnu šahovsku ploču. Odredimo koliki je maksimalan broj topova koje je moguće postaviti na nju, a da se ne napadaju. Primjenom Dirichletovog principa zaključujemo da je taj broj manji od 9 jer za 9 topova vrijedi da će bar dva biti u istom od osam redova pa će se napadati. Ako osam topova postavimo po dijagonali ploče, nijedan od njih neće biti na udaru ostalih. Zaključujemo da je maksimalan broj nezavisnih topova na standardnoj ploči jednak 8.

[1]Milan Živanović, Bajina Bašta, Srbija
[2]Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Na koliko ih različitih načina možemo rasporediti?

Prvi top u prvom stupcu možemo postaviti na 8 načina, drugi u drugom na 7 načina jer je jedno polje u tom stupcu napadnuto prvim topom. U svakom sljedećem stupcu broj slobodnih polja za postavljanje topa smanjuje se za 1 jer svaki novi top napada po još jedno polje u odnosu na prethodni razmještaj. Dakle,

$$T_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320 \tag{1}$$

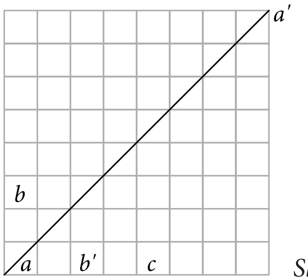
broj je različitih nezavisnih rasporeda 8 topova na šahovskoj ploči. Nije teško zaključiti da je na ploči $n \times n$ nezavisno n topova, a da je broj svih njihovih rasporeda jednak

$$T_n = n! \tag{2}$$

Problem se otežava ako se postavi uvjet da nijedan top ne stoji na crnoj glavnoj dijagonali (na standardnoj ploči spaja polja A1 i H8). Najveći matematičar XVIII. stoljeća, Leonhard Euler, došao je do rekurzivne formule

$$t_n = (n-1)\left(t_{n-1} + t_{n-2}\right) \tag{3}$$

za broj t_n različitih rasporeda nezavisnih n topova na šahovskoj ploči $n \times n$, a da nijedan nije na glavnoj crnoj dijagonali. Euler nije uspio pronaći eksplicitnu formulu za t_n, ali se na osnovi rekurzivne veze mogao izračunati broj nezavisnih rasporeda za konkretan n. Izvedimo Eulerovu formulu (3).



Slika 1.

Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da se top u prvom stupcu nalazi na polju b (Slika 1.). Općenito, ovaj broj položaja moguće je izabrati na n – 1 načina jer se kutno polje A1 nalazi na glavnoj crnoj dijagonali. Možemo promatrati dva komplementarna slučaja:

1. Drugi top postavljamo u prvi red na polje b' simetrično polju b u odnosu na glavnu dijagonalu aa'. Izbacivanjem reda i stupca za b i b', te prvog reda i prvog stupca dobiva se šahovska ploča $(n-2)\times(n-2)$ na koju pod već postavljenim uvjetima treba rasporediti preostalih n – 2 topova. Zaključujemo da ovakvih rasporeda ima $(n-1)t_{n-2}$.

2. U prvi red postavljamo topa na polje c nesimetrično u odnosu na glavnu dijagonalu s poljem b. Zamijenimo međusobno položaj stupaca b i c. Tada polje c

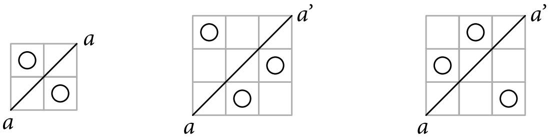
dolazi u položaj polja *a*, a polje *b* na neko polje koje nije na glavnoj dijagonali. Ako sada izostavimo prvi red i prvi stupac, dobivamo ploču $(n-1)\times(n-1)$ na kojoj je moguće na t_{n-1} načina rasporediti $n-1$ topova. Znači, rasporeda ovakvog tipa bit će $(n-1)t_{n-1}$.

Na taj su način iscrpljeni svi mogući rasporedi uz zadani uvjet, pa je njihov broj jednak

$$t_{n-1}=(n-1)t_{n-1}+(n-1)t_{n-2}.$$

Primjenom distributivnosti dobivamo Eulerovu jednakost (3).

Sada ćemo izvesti eksplicitnu formulu za t_n. Neposredno možemo zaključiti da je $t_2=1$ i $t_3=2$ (Slika 2.).



Slika 2.

Lako se provjerava i da vrijedi jednakost $t_3=3t_2+(-1)^3$. Dokažimo da u općem slučaju vrijedi

$$t_n=nt_{n-1}+(-1)^n. \tag{4}$$

Pretpostavimo da za svako $k\le n-1$ vrijedi

$$t_k=kt_{k-1}+(-1)^k. \tag{5}$$

Tada iz

$$t_{n-1}=(n-1)t_{n-2}+(-1)^{n-1}$$

slijedi

$$(n-1)t_{n-2}=t_{n-1}-(-1)^{n-1}=t_{n-1}+(-1)^n.$$

Uvrštavanjem posljednjeg izraza u Eulerovu jednakost dobiva se

$$t_n=(n-1)(t_{n-1}+t_{n-2})=(n-1)t_{n-1}+(n-1)t_{n-2}=(n-1)t_{n-1}+t_{n-1}+(-1)^n$$

ili na kraju

$$t_n=nt_{n-1}+(-1)^n,$$

što je i trebalo dokazati.

Podijelimo sada posljednju jednakost s $n!$. Dobiva se

$$\frac{t_n}{n!}=\frac{nt_{n-1}}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}$$

što, nakon skraćivanja, daje

$$\frac{t_n}{n!}=\frac{t_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Za razne vrijednosti n dobivamo niz jednakosti:

$$\frac{t_n}{n!}=\frac{t_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{t_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{t_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{t_{n-2}}{(n-2)!}=\frac{t_{n-3}}{(n-3)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{t_3}{3!}=\frac{t_2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}\,.$$

Kad zbrojimo sve ove jednakosti i poništimo jednake izraze, dobiva se jednakost

$$\frac{t_n}{n!}=\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{t_2}{2!}\,.$$

Množenjem ove jednakosti s $n!$ i zamjenom t_2 s 1 na kraju se dobiva

$$t_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right). \tag{6}$$

Uvrštavanjem $n = 8$ u formulu (6) dobivamo broj nezavisnih rasporeda topova na standardnoj šahovskoj ploči takvih da nijedan top nije na glavnoj crnoj dijagonali:

$$t_8=8!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=14833\,.$$

Primjenom dosad izloženog moguće je riješiti sljedeće zadatke.

1. Koliko ima nezavisnih rasporeda topova na standardnoj ploči u kojima se jedan top nalazi na unaprijed fiksiranom polju? Koliko je takvih rasporeda na ploči $n \times n$?
2. Na koliko je načina 4 bijela i 4 crna topa moguće rasporediti na šahovskoj ploči a da se ne napadaju?
3. Koliko ima nezavisnih rasporeda topova na šahovskoj ploči u kojima su točno 2 topa na glavnoj crnoj dijagonali?
4. Koliko ima nezavisnih rasporeda topova na standardnoj šahovskoj ploči u kojima je najviše 6 topova na glavnoj dijagonali?

Literatura

1. Gardner M., *Mathematics, Magic and Mistery*, Dover Publications Inc, New York, 1956.
2. Гик И. J., Шахматы и математика, Наука, Москва, 1983.
3. Окунев Л. Я., Комбинаторные задачи на шахматной доске. - М.-Л., ОНТИ, 1935.