

# Umjetnost i matematika

SANJA SRUK<sup>1</sup>

„Matematika ne leži ukopana usred kontinenata egzaktnih znanosti; ona je na njegovim obalama, uz ocean umjetnosti” – rekao je Vladimir Devidé, naš poznati matematičar, akademik, promotor japanske književnosti i kulture, te pokretač haiku poezije u Hrvatskoj. Stoga pođimo u šetnju obalama toga oceana.

## Glazba

„Možda su matematika i muzika jedno te isto... samo što se jedno vidi, a drugo čuje... Muziku ne možeš vidjeti, matematiku ne možeš čuti... a možda su isto...” – riječi su bosansko-hercegovačkog književnika i filmskog scenarista Abdulaha Sidrana, a već citirani Vladimir Devidé pitao se: „Ne bi li se muzika mogla opisati kao matematika osjećaja, a matematika kao muzika razuma? Njihov duh je isti. Tako muzičar osjeća matematiku, a matematičar misli muziku.”

Matematiku možemo pronaći već kod samih osobina zvuka (frekvencija, zvučni valovi, rezonanca...) koje se mogu predočiti matematičkim izračunima, ali i u mjeri, ritmu i kompoziciji. U Pitagorejskoj školi glazba se proučavala zajedno s geometrijom, aritmetikom i astronomijom, a njena povezanost s matematikom proteže se do današnjih dana kada se na teoriju glazbe primjenjuje teorija grupa. Prvi je to učinio na prijelazu 19. u 20. stoljeće njemački teoretičar glazbe **Hugo Riemann** (1849. – 1919.) proučavajući odnose među tonovima i intervalima.

Poznato je da napeta žica određene debljine proizvodi ton. Što je žica kraća, to je ton viši, a ako je skratimo na pola, dobit ćemo ton za oktavu viši. Još su pitagorejci otkrili da je omjer frekvencija nekog tona i za oktavu višeg 1 : 2. Kako izgledaju omjeri frekvencija ostalih tonova, prikazano je u tablici:

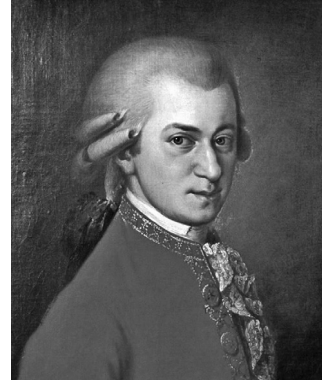
C	D	E	F	G	A	H	C1
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

U oktavi imamo pet intervala (stupnjeva) cijelih tonova (D/C, E/D, G/F, A/G i H/A) i dva polutona (F/E i C1/H), a crne tipke daju nam još pet polutona, no treba napomenuti da dva polutona ne daju cijeli ton, što je vidljivo i iz tablice. Uočljiv je geometrijski niz kod omjera frekvencija čistih tonova (C, D, E i G, A, H). O tome hoće li

<sup>1</sup>Sanja Sruck, 1. gimnazija, Zagreb

neki tonovi zajedno zvučati ugodno ili neugodno, tj. biti konsonantni ili disonantni, govori Pitagora u svome zakonu malih brojeva: dva su tona konsonantna ako su im frekvencije u omjeru malih brojeva. Što to znači? Omjer C1/G jednak je  $4/3$  ( $2:3/2$ ), za G/C iznosi  $3/2$ , za D/C  $9/8$ , dok je za H/G ili E/C taj omjer čak  $81/64$ . Što su manji brojevi u omjeru, to su tonovi konsonantniji.

Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez također se mogu uočiti u glazbi. U *Koncertu za gudače, udaraljke i čelestu Béle Bartóka* (1881. – 1945.) glavni dio započinje u 55. taktu od 89 ( $89/55=1.61818\dots$ , što je omjer zlatnog reza), a uvodni dio na ksilofonu je u ritmu Fibonaccijevih brojeva  $1 : 1 : 2 : 3 : 5 : 8 : 5 : 3 : 2 : 1 : 1$ . Zbor *Aleluja* iz *Mesije* **Georga Friedricha Händela** (1685. – 1759.) sastoji se od 94 takta, a jedan od najvažnijih elemenata u tome djelu, ulazak solo truba, jest između 57. i 58. takta (omjer je 1.6). U sonatnim oblicima **Wolfganga Amadeusa Mozarta** (1756. – 1791.) omjer ekspozicije (upoznavanje teme) i provedbe i reprize (razvoj i ponavljanje teme) često je upravo zlatni rez.



Slika 1. Wolfgang Amadeus Mozart



Slika 2. Johann Sebastian Bach

U mnogim glazbenim djelima možemo pronaći razne oblike simetrije, i to u dinamici, tempu, visini tonova, odnosno u melodiji, harmoniji i tonalitetu, te u samoj formi djela. Često je susrećemo kod **Johanna Sebastiana Bacha** (1685. – 1750.), ali i mnogih drugih. Ponavljanje teme odnosno refrene možemo promatrati kao translaciju. Rondo je primjer glazbenog oblika u kojemu se isprepliću osna simetrija i translacija.

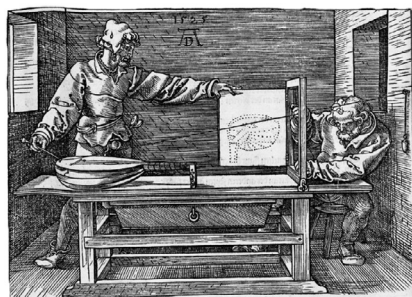
Krajem osamdesetih godina prošloga stoljeća u SAD-u se pod utjecajem **Kinga Crimsona** i **Stevea Reicha** razvio novi glazbeni smjer – *math rock*, vrsta eksperimentalnoga rocka s elementima indie rocka. Karakteriziraju ga asimetrični ritmovi, disonantni tonovi i neparne mjere ( $7/8$ ,  $11/8$  i  $13/8$ , dok je kod običnoga rocka dominantna mjera  $4/4$  s naglašenim drugim i četvrtim taktom).

I broj  $\pi$  pronašao je svoje mjesto u glazbi. **Michael John Blake** notama je pridružio brojeve pa odsvirao  $\pi$ . Kako zvuči broj  $\pi$  možete pogledati i poslušati na <https://www.youtube.com/watch?v=wK7tq7LON8E>.

## Likovna umjetnost

Matematiku je najlakše prepoznati u likovnoj umjetnosti iz vrlo jednostavnog razloga – ona se vidi. Puno se pisalo o prisutnosti matematike u slikarstvu i arhitekturi, pa ću zato samo ukratko ponoviti najosnovnije.

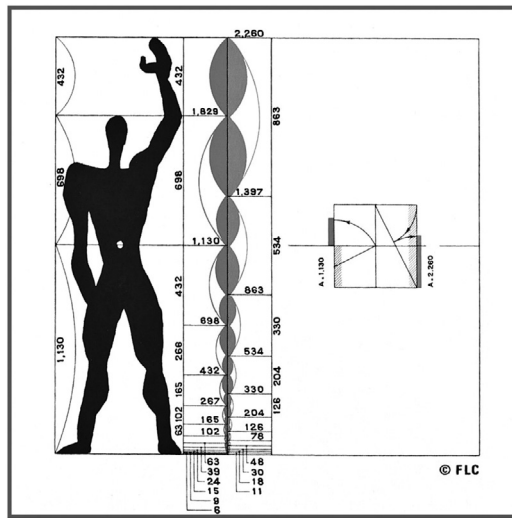
Većina slikara u svome se stvaralaštvu koristi perspektivom. Perspektiva je način prikazivanja prostora na ravnoj plohi, odnosno stvaranje iluzije o dubini prostora. Postoji više vrsta perspektive: vertikalna, obrnuta, atmosferska (zračna), kolorističk..., no najčešća je linearna perspektiva. Ona se temelji na prirodnom zakonu da se udaljavanjem od promatrača likovi smanjuju razmjerno udaljenosti i svi nestaju u jednoj točki. Još se naziva i geometrijska, pravilna, matematička i iluzionistička perspektiva, a u njoj vrlo lako prepoznamo homotetiju. Otkriće linearne perspektive pripisuje se talijanskome arhitektu i kiparu **Filippu Brunelleschiju** (1377. – 1446.). Nakon njega perspektivu su proučavali **Masaccio** (1401. – 1429.), talijanski slikar čije se *Sveto Trojstvo* smatra jednom od prvih renesansnih slika u kojima je upotrijebljena linearna perspektiva, te **Piero della Francesca** (1412. – 1492.), talijanski ranorenesansni slikar koji je svojim suvremenicima bio poznat i kao matematičar. Osim što je svoje slike matematički planirao do najsitnijeg detalja, napisao je i tri matematička traktata: *Traktat o abakusu*, *Kratka knjiga o pet pravilnih tijela* i *O perspektivi u slikarstvu*. **Albrecht Dürer** (1471. – 1528.) izučavao je perspektivu pomoću napete niti i



Slika 3. Dürerova studija perspektive

staklene ploče. Zanimala ga je i matematika, i to ne samo radi upotrebe u slikarstvu. Napisao je opsežno djelo o geometrijskoj konstrukciji epikloide, krivulje koju opisuje neka točka kružnice koja se kotrlja po nekoj drugoj nepomičnoj kružnici, bavio se geometrijskim konstrukcijama koje se mogu provesti samo upotrebom šestara s fiksnim otvorom, pronašao je dobro aproksimativno rješenje problema trisekcije kuta, a jedan magični kvadrat dimenzija  $4 \times 4$  čak je unio u svoj bakrorez *Melankolija*.

Linearnu, ali često i zračnu perspektivu (što su predmeti dalji, oni su bljeđi, mekši i gube se s daljinom u plavetnilo, dok su oni bliži oštrij i jačih boja) koristio je i veliki **Leonardo da Vinci** (1452. – 1519.), a ta je perspektiva svoj puni zamah doživjela u baroknom slikarstvu 17. i 18. stoljeća. Da Vinci je bio renesansni čovjek u punom smislu, slikar, kipar, matematičar, fizičar, inženjer, izumitelj... Proučavao je proporcije ljudskoga tijela i konstrukcije pravilnih poliedara te napisao nekoliko kraćih tekstova u kojima se izmjenjuju filozofska razmatranja i traganje za praktičnim primjenama. U tim razmatranjima ima i takvih koje bismo mogli smatrati začetkom upotrebe infinitezimalnih metoda. Koristio je i zlatni rez, čija povijest počinje u starom Egiptu, iako se pronalazačima zlatnoga reza smatraju starogrčki matematičari čija je znanja objedinio rimski arhitekt **Marcus Vitruvius Polio** iz 1. st. pr. Krista u svome djelu *Deset knjiga o arhitekturi*. Primjer da Vincijevih studija proporcija ljudskoga tijela je znameniti *Vitruvijev čovjek* (čovjek s raširenim rukama i nogama upisan u krug i kvadrat). Na temeljima te studije i zlatnoga reza nastao je *Modulor*, antropologijska skala proporcija ljudskoga tijela francuskoga arhitekta **Le Corbusiera** (1887. – 1965.). Primjenjuje se u arhitekturi (visina gazišta stepenica...), izradi namještaja (visina stolova, stolica...) i drugdje.



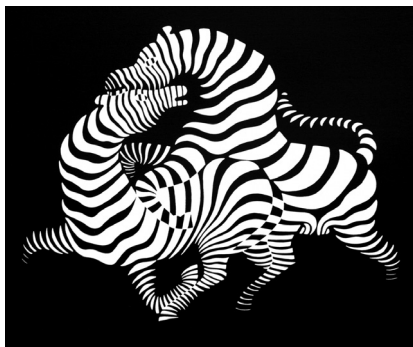
Slika 4. Le Corbusier – Modulor

Primjenu matematike u slikarstvu vidimo i u teselaciji, prekrivanju ravnine sukladnim likovima. Postoje samo tri pravilne teselacije (jednakostraničnim trokutima, kvadratima i pravilnim šesterokutima). Zanimljive su i polupravilne teselacije, one koje sadrže kombinaciju različitih pravilnih mnogokuta, a njih ima osam. Slikari su teselaciju podigli na jednu višu razinu koristeći razne likove, te translaciju, rotaciju i osnu simetriju. Različitih tipova simetrije ima točno 17, što je dokazao ruski kristalograf **E. S. Fedorov** 1891. godine. U dokazu se koriste metode iz teorije grupa pa se stoga i govori o 17 grupa simetrije. Barem 13 od tih 17 grupa simetrije možemo pronaći u djelima nizozemskog slikara **Mauritsa Cornelisa Eschera** (1898. – 1972.). Iako nije posjedovao matematičko obrazovanje, na njega su utjecali matematičari **George Pólya** i **Roger Penrose**. Osim teselacije, u njegovim radovima prepoznajemo i beskonačnost, involuciju, dualnost te euklidsku i hiperboličku geometriju. Mnogobrojne simetrije i pravilne uzorke nalazimo i u arapskoj umjetnosti. Preljepje arabske ukrašavaju džamije i druge građevine islamskoga svijeta, a njihovu ljepotu rano su uočili i počeli primjenjivati i europski umjetnici.



Slika 5. M.C Escher: Gušteri

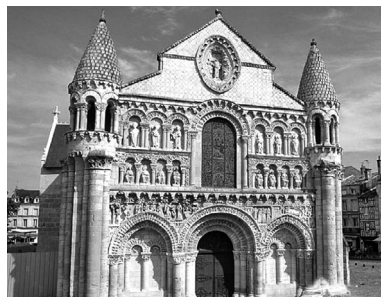
Dvadeseto stoljeće donosi velike promjene u likovnoj umjetnosti. Smatra se da je prvu apstraktnu sliku naslikao ruski slikar **Vasilij Kandinski** (1866. – 1944.) 1910. godine, iako se neki elementi apstraktnosti nalaze i kod ranijih umjetnika. Krajem pe-



Slika 6. V. Vasarely: Zebra

desetih i početkom šezdesetih godina pojavljuje se op-art, optička umjetnost u kojoj umjetnici stvaraju razne optičke iluzije primjenom optike i geometrije. Jedan od najpoznatijih op-art slikara je **Victor Vasarely** (1906. – 1997.) čija se slika *Zebra* smatra prvim djelom u tom žanru. Posjetite li Pečuh, nemojte propustiti priliku da razgledate njegov muzej. U umjetnost se uvode i računala, te umjetnici počinju koristiti razne programe za generiranje slika, pri čemu se često koristi teorija fraktala. U algoritamskoj umjetnosti slike se generiraju na temelju algoritama koji u potpunosti opisuju način njihova nastanka, te strukturu i boju slike. Neki od predstavnika algoritamske umjetnosti su **Roman Versatko**, **Jean-Pierre Hébert**, **Manfred Mohr** koji je napravio projekciju šesterodimenzijske hiperkocke, te naš informatičar i grafičar **Vlatko Čerić**.

Što reći o matematici u arhitekturi? Suvišno je govoriti o egipatskim piramidama, grčkim i rimskim amfiteatrima, Taj Mahalu, oktagonima, mostovima... Zato ću samo spomenuti jednu manje poznatu građevinu, crkvu Notre-Dame la Grande u Poitiersu u Francuskoj. Pogledajte i uvjerite se sami koliko ima matematike u ovom prekrasnom sakralnom objektu.



Slika 7. Crkva Notre-Dame la Grande u Poitiersu

## Književnost

Povezanost književnosti i matematike nije toliko očita poput, primjerice, povezanosti matematike i slikarstva, ali ona ne samo da postoji, nego možemo razlikovati nekoliko aspekata te povezanosti. S jedne strane nižu se književnici koji su po svojem obrazovanju matematičari, a s druge strane priznati matematičari koji su nam u nasljeđe ostavili i neke uspješne književne uratke. Osim toga, postoji i niz književnih djela u čijem sadržaju možemo pronaći različite elemente matematike.

Među brojnim književnicima koji su diplomirani matematičari najpoznatiji su ruski nobelovac **Aleksandar Solženjcin** (1918. – 2008.) i **Carol Lewis** (1832. – 1898.), autor poznate *Alise u zemlji čudesa*, ali oni nisu jedini. Matematičari su i neki suvremeni pisci, npr. Australac **Greg Egan**, Englez **Stephen Baxter**, Argentinac **Guillermo Martinez** te hrvatski pjesnik i prevoditelj **Mate Maras**. Srpski književnik **Vladimir Tasić** (1965.) doktorirao je matematiku i radi kao sveučilišni profesor, a kvalitetu njegova književnog stvaralaštva dokazuju brojne nagrade i priznanja, od kojih je najznačajnija NIN-ova nagrada za roman *Kiša i hartija*.



**Ruder Bošković** (1711. – 1787.) poznat je kao znanstvenik (matematičar, fizičar i astronom) i filozof, no manje je poznato da je napisao i nekoliko književnih djela. Osim djela *Pomrčina Sunca i Mjeseca*, koje je znanstveni prikaz astronomije napisan u heksameterskom stihu, svakako treba spomenuti i *Pisma, pjesme i rasprave*. I veliki **Blaise Pascal** (1623. – 1662.), francuski matematičar, fizičar i filozof, uspješno se okušao u književnosti. Njegovo djelo *Misli*, u kojemu iznosi svoja razmišljanja o kršćanstvu, objavljeno je i u Hrvatskoj. Već sam spomenula **Vladimira Devidéa** (1925. – 2010.), matematičara, japanologa i prvoga hrvatskog haiku pjesnika čije ime nosi nagrada koja se svake godine u Osaki dodjeljuje za najbolji haiku na engleskom jeziku.

I neki književnici bez formalnoga matematičkog obrazovanja ostavili su za sobom trag u matematici. **Raymond Queneau** (1903. – 1976.), autor slavnihi *Stilskih vježbi*, napisao je i nekoliko eseja o matematici, a književnik **Martin Gardner** (1914. – 2010.) više od četvrt stoljeća imao je znanstveno-popularnu kolumnu *Matematičke igre* (*Mathematical Games*) u časopisu *Scientific American*, za što je višestruko nagrađivan.

U nekim književnim djelima matematika je prisutna ili u jednome dijelu fabule ili pak prožima cjelokupno djelo. Primjerice, u drami *Gospoda Glembajevi* **Miroslava Krlež**e (1893. – 1981.) na samome početku Leone spominje matematičkoga velikana Leonharda Eulera, dok je gotovo cjelokupna zbirka dječjih pjesama **Paje Kanižaja** (1939. – 2015.) *3čave pjesme* posvećena matematici. Tu su pjesme o brojevima, o rombu koji je bio kvadrat ali se zbog radoznalosti naginjao, kao i mnoge druge. U *Gulliverovim putovanjima* **Jonathan Swift** (1667. – 1745.) uspješno primjenjuje proporcionalnost računajući koliko bi se Liliputanaca moglo nahraniti hranom koju pojede Gulliver ili odjenuti tkaninom koja je potrebna za izradu njegova odijela. U romanu **Umberta Eca** (1932. – 2016.) *Ime ruže* matematika se upravo veliča: „Matematičke spoznaje su postavke koje je naš razum izgradio tako da uvijek funkcioniraju kao istinite, bilo zato što su urođene, bilo zato što je matematika pronađena prije drugih znanosti,” dok **Filippo Tommaso Marinetti** (1876. – 1944.), začetnik futurizma i autor *Futurističkog manifesta*, u svojoj pjesmi *Bitka težina+miris* ne koristi interpunkciju, ali upotrebljava znakove +, – i = te nekoliko brojeva.

Matematika se proteže i kroz čitav roman *Stric Petros i Goldbachova slutnja* grčkoga književnika **Apostolosa Doxiadisa**. Okosnicu toga romana čini hipoteza švicarskoga matematičara iz 18. stoljeća Christiana Goldbacha da se svaki parni broj veći od dva može prikazati kao zbroj dvaju prostih brojeva. Brazilski književnik **Júlio César de Mello e Souza** (1895. – 1971.), također diplomirani matematičar, pod pseudonimom **Malba Tahan** objavio je knjigu *Čovjek koji je brojio*, koja se sastoji od 34 poglavlja u kojima se opisuju pustolovine glavnog junaka, a svaka pustolovina sadrži u sebi neki matematički problem, zanimljivost ili zagonetku koju on uspješno rješava.

Srednjevjekovnu simboliku brojeva nalazimo u djelima **Dantea Alighierija** (1265. – 1321.) i **Giovannija Boccaccia** (1313. – 1375.). Danteova *Božanstvena komedija* sastoji se od tri dijela: *Pakao*, *Čistilište* i *Raj*, a broj tri mističan je broj koji simbolizira Sveto Trojstvo. Svaki od ta tri dijela sastoji se od 33 pjevanja, što zajedno s uvodnim čini 100 pjevanja. Broj 100 ( $10 \cdot 10$ ) smatran je savršenim brojem. U Čistilištu se duše čiste od sedam grijeha, a raspoređene su u sedam pojaseva te nakon čišćenja lete prema nebu i dolaze u devet rajskih nebesa. Devet je bilo i krugova Pakla i brežuljaka Čistilišta, a 9 je  $3 \cdot 3$ . I u *Dekameronu* oca novele G. Boccaccia prisutna je simbolika brojeva. Djelo se sastoji od 100 novela nastalih u 10 dana. Pojavljuju se tri mladića i sedam djevojaka. Djevojke simboliziraju sedam vrlina, a broj sedam koji simbolizira savršenstvo susrećemo i u kršćanstvu (u sedam je dana Bog stvorio svijet, sedam je smrtnih grijeha i sedam darova Duha Svetoga) i u drugim religijama (sedam je krakova Menore, islamskih rajskih nebesa, Budinih koraka, čakri...).

Osječka književnica **Jasna Horvat** (1966.) pokazala je da je zlatni rez moguće koristiti i u književnosti. Ona je 2011. godine objavila roman *Auron*. Posebnost ovog romana u tome je što autorica svjesno upotrebljava zlatni rez i u kompoziciji i u samome sadržaju. Središnja točka priče je poglavlje *Pupak*, koja dijeli tekst na dva dijela. Prvi dio ima 21 poglavlje i pisan je u sadašnjosti, a drugi 13 i pisan je u prošlosti (21 i 13 Fibonaccijevi su brojevi i  $21:13=1.615$ ), a zlatni rez očituje se na mnogo mjesta u romanu, primjerice u omjeru muških i ženskih pripovjedača.

Vjerujem da ima još puno sličnih primjera, ali i ovi pokazuju da književnost i matematika ipak nisu tako udaljene kako se to na prvi pogled čini.

## Umjesto zaključka

Nadam se da je ovaj članak probudio ili produbio vaš interes za umjetnost. Završit ću riječima Blaisea Pascala: „Kudikamo je bolje znati o svakoj stvari ponešto, nego o jednoj sve.”

### Literatura:

1. Culek, I., *Glazba i matematika*  
<http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/CUL03.pdf>
2. Čerić, V., *Likovna umjetnost, matematika i algoritmi*  
<http://www.matematika.hr/files/8314/3317/3840/ceric1.pdf>
3. Dakić, B. *Priče iz matematike*, Element, Zagreb, 2016.
4. Damjanov, J., *Likovna umjetnost, 1.dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

5. Devidé, V., *Matematika i umjetnost*, Matematičko-fizički list, br. 4, šk. god. 1972./1973., Zagreb
6. Devidé, V., *Matematika kroz kulture i epohe*, Zagreb, Školska knjiga, 1979.
7. Ferenčević, D., *Matematika u literaturi*  
[http://www.knjiznicari.hr/UDK02/images/9/90/Matematika\\_u\\_literaturi1\\_-\\_Danila\\_Ferenčević.pdf](http://www.knjiznicari.hr/UDK02/images/9/90/Matematika_u_literaturi1_-_Danila_Ferenčević.pdf)
8. Kos-Lajtman, A., *Zlatna geometrija teksta*, <http://www.matica.hr/vijenac/463/zlatna-geometrija-teksta-70/>
9. Sruk, S., *Simetrično je lijepo*, Matematika i škola br. 10 (213-215), Zagreb, 2001.
10. Šikić, Z., *Geometrija i perspektiva*,  
[http://www.matematika.hr/files/8514/0479/6974/MATEMATIKA\\_I\\_SLIKARSTVO1.pdf](http://www.matematika.hr/files/8514/0479/6974/MATEMATIKA_I_SLIKARSTVO1.pdf)
11. Šikić, Z., *Matematika i muzika*, Zagreb, Profil, 2013.
12. <https://matematikaiglazba.wordpress.com/>
13. <http://www.croatianhistory.net/mat/izreke.html>
14. <https://sites.google.com/site/dantealighieri2016y/home>
15. [https://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page), biografski podatci o umjetnicima