

IZ NASTAVNE PRAKSE

Esej iz matematike¹

AZRA STAŠČIK², AMANDA GLAVAŠ³

Ključne riječi: eksplicitni zadatci, vrednovanje konceptualnog znanja, esej

Sažetak: U današnje se vrijeme pokušava odmaknuti od tradicionalnog pristupa nastavi te se uvode promjene u metodama, ishodima i sadržajima učenja te oblicima rada. No, kada je riječ o vrednovanju znanja, nema značajnijeg napretka. Iako se od učenika očekuje kritičko vrednovanje, analiziranje, procjena, problemsko rješavanje i kreativnost, u pisanim je provjerama i dalje naglasak na zadatcima zatvorenog tipa, brzom, točnom i preciznom rješavanju shematskih zadataka, odnosno samo na jednoj vrsti znanja, proceduralnoj (Dijanić, Debelec, 2015.). Mora se postaviti pitanje koliko je to znanje kvalitetno. Kvalitetno se znanje prvenstveno postiže poučavajući u jednakoj mjeri i proceduralno i konceptualno znanje (NCTM, 2000.), a potom i vrednovanjem obiju vrsta znanja. Poznato je da učenici uče ono što ih se ispituje, a ako ih se ispituje samo proceduralno znanje, neovisno o razini znanja, ono nije posve kvalitetno ni dugotrajno.

Važnost povezivanja proceduralnog i konceptualnog znanja te ravnomjernog poučavanja i vrednovanja temelji se na nekoliko razloga. Ponajprije jer konceptualno znanje omogućava razumijevanje pojmova, ideja i koncepata koji određuju neko područje te odnosa među njima, dok proceduralno znanje, koje uključuje vještine, algoritme i strategije, omogućava brzo i efikasno rješavanje problema (Dijanić, Debelec, 2015.). Dakako, ne smije se isključiti važnost činjenice da su neki učenici uspješniji pri usmenom provjeravanju znanja, a neki pri pisanom izražavanju, odnosno da na mjerenje, tj. vrednovanje znanja učenika utječe mnogo komponenata, od kojih je jedna i tip zadatka. Stoga, ako se znanje iz različitih područja matematike i na različitim kognitivnim razinama znanja ispituje odnosno vrednuje na jedan način (shematski zadatci, proceduralno znanje), pogoduje se samo određenom broju učenika. Brojni autori predlažu različite metode i tipove zadataka za provjeru konceptualnog znanja, među kojima su najčešće usmena provjera i zadavanje nestandardnih zadataka. Rittle-Johnson i Schneider (2013.) dijele zadatke (s obzirom na provjeru konceptualnog znanja) na eksplicitne i implicitne. Implicitni zadatci većinom su zadatci procjene, usporedbe i kategorizacije, a eksplicitni su oni koji zahtijevaju obrazlaganje tvrdnje,

¹Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu

²Azra Stašćik, Osnovna škola August Šenoa, Osijek

³Amanda Glavaš, Strojarska tehnička škola u Osijeku

postupka, formuliranje koncepta, izrada umne mape i sl. No, rijetko možemo naći esejski tip zadatka koji bismo mogli ubrojiti u eksplicitne zadatke.

Esej je književno-znanstvena vrsta u kojoj se obrađuje određena tema ili problem te je kao takva pogodna za provjeravanje cjelovitosti poznavanja i shvaćanja teme. U matematici su eseji pogodni za provjeravanje teorije, primjenu znanja te područja geometrije. Na uspješnost pisanja eseja iz matematike objektivno utječu vrste i znanja učenika, dane upute i smjernice te poznavanje kriterija ocjenjivanja, a subjektivno vještine jezičnog i pisanog izražavanja učenika te subjektivnost ocjenjivača. Unaprijed je potrebno odrediti što se očekuje u uvodu eseja (predstavljanje teme, definiranje osnovnih pojmova), što u razradi (opisivanje odnosa, navođenje svojstava, izvođenje dokaza, povezivanje sa stvarnim životom, primjena i primjeri zadataka, modeliranje, korelacije s drugim predmetima, ključni pojmovi koji moraju biti obuhvaćeni), a što u zaključku (stav o temi, tj. korisnost i važnost poznavanja teme). Nadalje, veliku ulogu u uspješnom sastavljanju eseja imaju kriteriji za ocjenjivanje (matematičko izražavanje, obuhvaćenost sadržaja ovisno o kognitivnoj razini, smislenost i povezanost teksta). Time se izbjegava pisanje činjeničnog znanja i samo navođenje definicija. Prednosti korištenja esejskih zadataka je procjena sposobnosti sagledanja složenijih problema, cjelovitost shvaćanja teme, kreativnost, samostalnost u odabiru sadržaja i razine na kojoj se obrađuje, provjera svih kognitivnih razina znanja – od činjeničnog i razumijevanja do analize, sinteze i evaluacije. Ono što bi bili nedostaci su subjektivnost ocjenjivanja, dugotrajno ispravljanje, utjecaj sposobnosti jezičnog i pisanog izražavanja te nemogućnost obuhvaćanja šireg gradiva.

U radu je dan popis nekoliko tema pogodnih za pisanje eseja s razrađenim smjernicama, kriterijima za ocjenjivanje i primjerom jednog uspješno napisanog eseja. Također, predstavljena je analiza učeničkih eseja 2. razreda Strojarske tehničke škole u Osijeku na temu stereometrije.

Konceptualno znanje

Prema taksonomiji Anderson i Krathwolh (2001.) postoje četiri dimenzije znanja: činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno. Rezultati istraživanja (Trupčević i Glasnović Gracin, 2014.) pokazuju kako u suvremenoj nastavi matematike dominira poučavanje i vrednovanje zadataka zatvorenog tipa, poznavanje postupaka i algoritama kako nešto učiniti, tj. proceduralnog znanja. Rittle-Johnson, Siegler i Alibali (2001.) utvrdili su postojanje pozitivne korelacije između konceptualnog i proceduralnog znanja te da je stjecanje jedne dimenzije znanja preduvjet za stjecanje one druge, pri čemu redoslijed stjecanja ovisi o području. Također, National Council of Teachers of Mathematics u „Principima i standardima za nastavu matematike” kao temelj kvalitetne nastave matematike ističe ravnotežu konceptualnog i proceduralnog znanja.

Konceptualno je znanje složeni oblik znanja, a odnosi se na sposobnost uspostavljanja relacija između osnovnih elemenata unutar određene veće strukture, što

im omogućuje zajedničko funkcioniranje (Rittle-Johnson i Schneider, 2013.). Konceptualno znanje omogućava provođenje kognitivnih procesa na višim razinama znanja kao što su klasifikacija, kategorizacija, specijalizacija, generalizacija, indukcija, dedukcija, analiza, sinteza, apstrakcija i analogija. Poznato je da učenici uče ono što ih se ispituje, stoga je, osim poučavanja, vrlo važno i vrednovati konceptualno znanje. Kako bi učitelji mogli kvalitetno i precizno vrednovati konceptualno znanje vrlo je bitno razlikovati dimenzije činjeničnog i konceptualnog znanja. Činjenično znanje podrazumijeva poznavanje i reproduciranje „izoliranih informacija” dok konceptualno podrazumijeva sposobnost objašnjavanja, povezivanja, organiziranja i primjene tih informacija, koje ih čini funkcionalnom strukturom.

Zadaci koji vrednuju konceptualno znanje

Više autora navodi različite načine i tipove zadataka vrednovanja konceptualnog znanja. Prema načinu, ispitivanje konceptualnog znanja dijelimo na usmeno i pismeno. Usmeno ispitivanje karakterističan je način ispitivanja znanja sadržaja društvenih i humanističkih znanosti te nije čest način ispitivanja znanja iz predmeta matematika. Vizek Vidović i Vlahović-Štetić (2003.) navode niz prednosti usmenog ispitivanja kao što su: „učenici češće uče s razumijevanjem ukoliko očekuju usmeno ispitivanje, usmenim ispitivanjem moguće je bolje provjeriti razumijevanje i uporabu znanja nego pismenim ispitom, učitelj može prilikom ispitivanja voditi računa o kvalitativnim razlikama u učeničkom znanju što pismeni ispit teže mjeri, tijekom ispitivanja učitelj može uočiti i reagirati na odgovore koji su približno točni ili na one koji su potpuno apsurdni pa ukazuju na antiznanje”. Iako je usmeno ispitivanje pogodno za vrednovanje konceptualnog znanja na različitim razinama, ono onemogućuje ispitivanje sadržaja većeg opsega. Nadalje, vrlo je vremenski neekonomično jer se u jednom nastavnom satu, prema preporuci Bujas i Grgin (1961.), može ispitati sedam učenika. Osim toga, vrednovanje znanja na temelju usmenog načina ispitivanja nerijetko je subjektivno samim time što ne odgovaraju svi učenici na ista pitanja te zbog mogućih pogrešaka učitelja kao mjernog instrumenta.

Pismenim načinom ispitivanja taj se čimbenik može neutralizirati ovisno o vrsti pismenog ispitivanja. Također, pri pismenom ispitivanju svi učenici odgovaraju na ista pitanja odnosno rješavaju iste zadatke te je moguće obuhvatiti više nastavnih sadržaja i kreirati objektivnije kriterije u odnosu na one pri usmenom ispitivanju. Bitno je osvijestiti da će pismeni ispit ispitivati konceptualno znanje učenika samo ako su pitanja ili zadaci kreirani tako da ne traže samu reprodukciju činjenica već njihovo razumijevanje i uporabu. To je moguće ostvariti zadajući različite tipove i konstrukcije zadataka.

Govoreći o tipovima zadataka, Gronlund (1985.) klasificira zadatke na one objektivnog tipa i višestrukog izbora te na interpretativne i zadatke esejskog tipa. Good i Brophy (1995.) razlikuju zadatke esejskog i objektivnog tipa, dok Slavin (1997.) uz zadatke esejskog i objektivnog tipa spominje i problemske zadatke. Rittle-Johnson

i Schneider (2015.) uvode novu sistematizaciju tipova zadataka, implicitne i eksplicitne zadatke. Implicitni zadatci zahtijevaju od učenika procjenu valjanosti tvrdnje ili učinkovitost određene procedure, kategorički izbor, mogućnost različitog prikaza podataka te uspoređivanje veličina. Eksplicitni zadatci, s druge strane, uvjetuju poznavanje i objašnjenje definicija, obrazlaganje izbora postupaka, formuliranje koncepta te izradu umnih mapa i sl.

Primjeri eksplicitnih zadataka su:

- Objasni tvrdnju: „Svi kvadrati su pravokutnici, a svi pravokutnici nisu kvadrati.”
- Definiraj kvadrat pomoću romba.
- Obrazloži zašto vrijedi jednakost $2^{\log_2 x} = x$.
- Izradi konceptualnu mapu koja prikazuje osnovne koncepte o skupovima brojeve te vezama između njih.

Vrlo je bitna značajka eksplicitnih zadataka da su učenicima relativno nepoznati te se oni oslanjaju na svoje konceptualno znanje (poznavanje definicija i razumijevanje odnosa), a ne na proceduralno (dobro naučeni algoritam) kako bi riješili zadatak.

Školski esej

S esejskim tipom zadataka učenici su dobro poznati u nastavi jezika te se redovno vrednuje njihov napredak u njegovu pisanju. Tijekom obrazovnog procesa učenici upoznaju različite vrste eseja, njihove koncepte, forme i glavne sastavnice te najvažnije značajke. Pisanju eseja daje se na značaju kao tipu ispitivanja znanja u hrvatskom obrazovnom sustavu, što možemo zaključiti i po tome što se pisanje eseja nalazi kao sastavni dio ispita državne mature. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje uvrstilo je pisanje eseja u čak dva od tri obvezna predmeta državne mature. Navedenim ispitima provjerava se cjelokupni sadržaj određenog predmeta te je iz toga očito zašto se na njima traži upravo pisanje eseja. Tu tvrdnju podupire i hrvatska enciklopedija u kojoj je esej definiran kao književno-znanstvena vrsta u kojoj se obrađuje određena tema ili problem te je kao takva pogodna za provjeravanje cjelovitosti poznavanja i shvaćanja teme (Brozović i Kovačec 1999.). Esejski zadatak sastoji se od teme popraćene s nekoliko smjernica za pisanje prema kojima će učenik oblikovati svoj esej. Smjernice moraju biti povezane sa sadržajem te upućivati na strukturu i kontekst zadanog ispitnog djela. Učenik svojim esejom treba obuhvatiti sve zadane smjernice, ali redosljed smjernica ne obvezuje ga u oblikovanju eseja.

Postoje tri vrste školskih eseja: interpretativni, usporedno-raščlambeni i raspravljajući (Piskač 2011.). Neovisno o vrsti eseja, svaki esej sadržava tri koherentna dijela: uvod, razradu i zaključak.

Uvodni odlomak postavlja temu eseja te daje uvid u kontekst problema. Razradbeni odlomci glavni su dio eseja u kojemu su istaknuti argumenti te su tim dijelom

obuhvaćene sve smjernice zadane esejskim zadatkom. Ulomak zaključka sažima sve stavove učenika o tome proizašle na temelju predstavljenih argumenata.

Važnost, prednosti i nedostaci eseja

Esej se zadaje kako bi se ispitalo poznavanje i razumijevanje definicija te stvaranje relacija među pojmovima i njihova usporedba (Vizek Vidović, Vlahović-Štetić 2003.). Pisanjem eseja do izražaja dolazi učenikova sposobnost analiziranja i sintetiziranja podataka i činjenica, kombiniranje znanja različitih područja te mogućnost ispravnog prosuđivanja postupaka, tvrdnji ili događaja. Iz toga se da zaključiti kako učenik mora biti izrazito informiran o temi eseja. Kako bi se napisao kvalitetan esej nije dovoljno poznavati sadržaj samo na razini pojmova i definicija, već je potrebno i dublje i šire znanje kako bi se samostalno napisao dulji, smisleni tekst. Upravo je to ono što razlikuje esej od ostalih tipova pismenog ispitivanja znanja jer se oni najčešće sastoje od zadataka koji traže samo poznavanje činjenica bez razumijevanja ili primjene naučenoga. Nadalje, pisanje eseja omogućuje učeniku kreativan način pokazivanja znanja za razliku od ostalih načina i tipova ispitivanja znanja.

Iz svega navedenog možemo zaključiti kako vrednovanje znanja esejom ima određene prednosti, ali i nedostatke. Poticanje učenika na razumijevanje sadržaja i učenje te povezivanje smislenih cjelina, dakako, jedna je od velikih prednosti. No, osim što nastavnik može vrednovati u kojoj je mjeri učenik svladao sadržaje, esej mu također omogućuje uvid u učenikove sposobnosti razumijevanja i promišljanja o problemu. Nadalje, nastavnik može procijeniti originalnost načina na koji učenik razmišlja o problemu, njegovu vještinu pisanja i organizaciju ideja. Prilikom odgovaranja na esejski tip zadatka izbjegnuto je pogađanje učenika. Prednost je očita i u ekonomičnosti vremena pri pripremi ispita zbog relativno malog broja zadataka odnosno smjernica. Naravno, esejski tipovi zadataka imaju i određene nedostatke. Smatra se kako nisu sve nastavne teme jednako pogodne za pisanje eseja. Esejom nije moguće obuhvatiti godišnji ili sav sadržaj jednog predmeta na višoj razini znanja pa on nije pogodan za inicijalne, polugodišnje ili godišnje provjere. Iako je priprema takve vrste ispita brza, ispravljanje je obično dugotrajno i ima loše metrijske karakteristike. Rezultat često može ovisiti o vještini pisanog jezičnog izražavanja i rukopisu učenika te subjektivnoj procjeni ocjenjivača. Naravno, postavlja se i pitanje na koji način reagirati na pravopisne i gramatičke pogreške.

Interpretativni esej iz matematike. Zašto esej u matematici. Kako zadati i ocijeniti esej. Kriteriji.

U praksi, kao i u dostupnoj literaturi, rijetko možemo uočiti pisanje eseja kao sastavnog dijela nastave matematike. Promišljajući o dimenzijama znanja odnosno o važnosti vrednovanja proceduralnog i konceptualnog znanja u nastavi matematike te poznajući koje je i kakvo znanje potrebno za stvaranje kvalitetnog školskog eseja,

nameće se mišljenje kako pisanje eseja u nastavi matematike ne bi trebala biti rijetka niti neuobičajena pojava.

Konceptualno se znanje u matematici definira kao složeno, deduktivno znanje (Schoenfeld 1986.) koje karakterizira uspostavljanje veza među konceptima (Shimizu 1996.) te povezivanje tih koncepata u mreže (Hiebert & Carpenter 1992.). Esej kao eksplicitan tip zadatka učenicima je relativno stran te oni nemaju izbora nego pouzdati se u svoje konceptualno znanje. Kako bi uspješno riješili takav zadatak, učenici moraju povezivati znanje koje posjeduju te ga povezati sa situacijama iz svakodnevnog života (primjerima, elaboriranjem, objašnjavanjem, skiciranjem, matematičkim modeliranjem te prikazivanjem podataka na različite načine), izražavati se o matematičkim temama matematičkim jezikom i pojmovima te formirati dulji tekst. Konceptualno znanje u nastavi matematike, kako ga znanstvenici danas razumiju i objašnjavaju, implicira njegovo vrednovanje eksplicitnim zadacima poput onoga esejskog tipa.

Iako raščlamba eseja nudi različite vrste, mi ćemo se usmjeriti na interpretativni školski esej u nastavi matematike. Interpretativni esej najzastupljeniji je u provjeri znanja te se smatra najjednostavnijom vrstom eseja (Pucar 2017.). Interpretativni esej donosi pregled koncepata, pojma ili problema zadanog smjernicama i uputama zadatka. Zadani objekt raščlanjuje se na sastavnice, kritički analizira, ali i smješta u kontekst područja te mora ponuditi određene generalizacije. Interpretativni esej također možemo naći u nastavi jezika, umjetnosti te društvenih i humanističkih znanosti, no interpretativni esej iz matematike razlikovat će se od ostalih po svojoj formi. Za razliku od ostalih eseja, u eseju iz matematike učenicima je dopušteno skicirati, crtati, računati, konstruirati, dokazivati i sl., štoviše, učenike se na to potiče.

Priprema učenika za pisanje matematičkog eseja

Iako učenici imaju iskustva s pisanjem eseja iz drugih nastavnih predmeta, pisanje eseja iz matematike često smatraju potpuno novim i nepoznatim te niti na intuitivnoj razini nisu sigurni kako formirati dulji matematički tekst. S obzirom da učenici pojam matematičkog eseja smatraju zbunjujućim, vrlo bitna pretpostavka za kvalitetno napisan matematički esej je priprema učenika. Važno je naglasiti kako priprema učenika za pisanje eseja iz određenog gradiva počinje već pri poučavanju istog. Nekoliko puta već je naglašeno da učenici uče što i kako ih se ispituje, stoga ako se neko gradivo želi ispitivati pomoću esejskog tipa zadatka, mora ga se tako i poučavati. Osim toga, učenicima je bitno prije početka poučavanja najaviti da će se određeno gradivo ispitivati pisanjem eseja, objasniti kako izgleda matematički esej, dati upute za pisanje, ali i kriterije vrednovanja kako bi se i sami pripremili. Učenicima se za prvi put preporuča dati primjer kvalitetno napisanog eseja, no iz nekog drugog, ranije obrađenog matematičkog gradiva.

Ukoliko nastavnik pri obradi gradiva učenicima zadaje samo zadatke zatvorenog tipa (proceduralne) te izostavlja definiranje koncepata, svojstava i odnosa među nji-

ma, nerealno je očekivati da će takvi učenici moći napisati matematički esej u kojem se traži upravo to. Stoga nastavnik na umu treba imati potencijalne smjernice (ishode koje želi postići) i ono što od učenika očekuje da napišu u eseju. Drugim riječima, ukoliko se u eseju očekuje da učenik uspostavi odnos između elipse i kružnice, učenika se mora upoznati i s konceptom numeričkog ekscentriciteta i što on predstavlja. Osim formule za njegovo izračunavanje potrebno je diskutirati kakva je elipsa kada se vrijednost numeričkog ekscentriciteta približava nuli, a kakva kada se približava jedan i sl. Nadalje, ukoliko se od učenika očekuje da navede primjer primjene u stvarnom svijetu, on ga neće moći ni reproducirati ni osmisliti novi, vlastiti primjer, ako i sam nije vidio barem jedan primjer. Konkretno, rijetki će učenici moći navesti primjer mimoilaznih pravaca iz stvarnog života ukoliko nijedan primjer ranije nisu čuli. Učenicima je potrebno naglašavati i postavljati pitanja koja bi mogla biti smjernice eseja, ali i zadavati zadatke za istraživanje te upućivati na korištenje literature.

Osim toga, neposredno prije pisanja eseja potrebno je naglasiti detaljne formalne (strukturalne) i sadržajne upute. Strukturalne su upute za matematički esej jednake kao i za svaku drugu vrstu eseja. Esej se oblikuje kao zaokružena cjelina sa sadržajno i vizualno odvojenim ulomcima; uvod, razrada i zaključak. Potrebno je ograničiti broj riječi, ali i prilagoditi ga dobnoj skupini učenika te njihovom razvoju. Učenicima je potrebno reći da esej trebaju napisati gramatički i pravopisno točno. Rečenice u eseju trebaju biti jasne i precizne te napisane u trećem licu jednine.

ULOMAK	SADRŽAJ
UVOD	predstavljanje teme
	iskazivanje definicije osnovnih i ključnih pojmova
	navođenje matematičkog područja
	prethodno usvojena znanja o danoj temi
RAZRADA	navođenje svojstava
	objašnjavanje i opisivanje
	kategoriziranje i klasificiranje
	primjeri i primjena
	diskutiranje i dokazivanje
	analiza i sinteza
	iznošenje teorija, modela i struktura
	korelacija s drugim predmetima
	demonstracija zadataka
usporedba i povezivanje	
ZAKLJUČAK	iznošenje stava o korisnosti
	iznošenje stava o važnosti

Tablica 1. Sadržaji obuhvaćeni pojedinim ulomkom eseja

Sadržajne upute govore što koji strukturalni dio treba sadržavati, odnosno što se u kojem ulomku od učenika traži. U uvodu se treba predstaviti tema, definirati osnovne i ključne pojmove, navesti matematičko područje kojemu tema pripada te jesu li se učenici s tom temom (konceptima) već ranije susretali (na kojoj razini, u kojem kontekstu). U razradi se, ovisno o temi, zadanim smjernicama i razini znanja učenika, navode svojstva pojmova te ih se detaljnije opisuje, klasificira, kategorizira i objašnjavaju se odnosi među njima, uspoređuju se i povezuju kao i njihove uzročno-posljedične veze, navode se primjene i primjeri u novim situacijama, demonstriraju se zadatci, predstavljaju odgovarajuće metode i tehnike za njihovo rješavanje te diskutira odabir određene tehnike, uspostavljaju se korelacije s drugim predmetima, analizira i sistematizira, organizira znanje, diskutira i dokazuje, iznose teorije, modeli i strukture. Zaključak je namijenjen za iznošenje stava o danoj temi, točnije o važnosti i korisnosti učenja tih pojmova i koncepata.

Vrednovanje matematičkog eseja

U svakom se eseju vrednuju sadržajno oblikovanje, povezanost teksta i kognitivne razine znanja. U tablici je prikazano što svaka od navedenih sastavnica podrazumijeva te njihov postotni udio. Tablica podrazumijeva vrednovanje kada su sve smjernice u eseju obuhvaćene. Dakako, vrednovanje eseja ovisi o uključenosti zadanih smjernica, tj. ukoliko učenik u eseju uvrsti 3 od 5 zadanih smjernica, bez obzira na razinu znanja na kojoj je o njima pisao, ne može dobiti ocjenu odličan ili vrlo dobar. Isto tako, ukoliko učenik u svome eseju obuhvati sve smjernice, to nije jamstvo da će zavrijediti ocjenu odličan u slučaju da se u eseju nalazi nekoliko materijalnih pogrešaka ili su smjernice opisane na vrlo niskim razinama znanja.

SASTAVNICE VREDNOVANJA	KRITERIJI		POSTOTNI UDIO OCJENE	
SADRŽAJNO OBLIKOVANJE	Obuhvaćenost sadržaja		20 %	
	Uporaba matematičkog jezika i prikladan stil			
POVEZANOST TEKSTA	Vizualno oblikovanje		10 %	
	Smislenost			
	Logički slijed			
RAZINA ZNANJA	Činjenično	<ul style="list-style-type: none"> • Pravilna uporaba terminologije • Pravilno definiranje ključnih pojmova i definicija 	20 %	70 %

RAZINA ZNANJA	Razumijevanje	<ul style="list-style-type: none"> • Objašnjavanje i opisivanje odnosa • Navođenje primjera • Procjenjivanje • Odabiranje određene tehnike rješavanja 	20 %
	Primjena	<ul style="list-style-type: none"> • Iznošenje teorije, modela i struktura • Demonstriranje zadataka • Navođenje primjera u novim situacijama • Dokazivanje • Uspostavljanje korelacija s drugim predmetima 	20 %
	Analiza	<ul style="list-style-type: none"> • Uspoređivanje • Analiziranje • Klasificiranje i kategoriziranje • Uspostavljanje uzročno-posljedičnih veza 	15 %
			15 %
	Sinteza	<ul style="list-style-type: none"> • Povezivanje • Sistematiziranje • Organiziranje znanja 	
	Evaluacija	<ul style="list-style-type: none"> • Diskutiranje o odabiru određene tehnike • Iznošenje zaključaka o važnosti i korisnosti 	10 %
UPORABA HRVATSKOG STANDARDNOG JEZIKA*	Pravopisna točnost		100 %
	Gramatička točnost		

Tablica 2. Predložak kriterija vrednovanja školskog interpretativnog eseja iz matematike

Sastavnica vrednovanja *Uporaba hrvatskog standardnog jezika* je proizvoljna. Nastavnik matematike u suradnji s nastavnikom hrvatskog jezika u okviru međupredmetne nastave može dogovoriti da se učeniku vrednuje i posebnom ocjenom ocijeni uporaba hrvatskog standardnog jezika, pri čemu bi tu ocjenu dobivali iz predmeta Hrvatski jezik.

Teme i smjernice za pisanje eseja iz matematike

Nisu sve teme odnosno nastavne jedinice ili cjeline pogodne za vrednovanje znanja esejom. Ukoliko učenike s određenom temom upoznajemo samo s dimenzijama činjeničnog ili proceduralnog znanja, ona neće biti pogodna tema za pisanje eseja. Kao što je već prije naglašeno, učenici moraju biti s temom dobro upoznati. Dobro razrađene smjernice koje će učenike jasno voditi kroz oblikovanje teksta također su

vrlo bitne jer se učenici, suočeni sa zadatkom formiranja duljeg matematičkog teksta, mogu osjećati zbunjeno i frustrirano. Pri zadavanju smjernica nastavnik mora imati na umu ishode koje učenici trebaju ostvariti te jasnu percepciju o tome kako zadani esej treba izgledati i što treba sadržavati. Naravno, vrlo je bitno i da je nastavnik siguran da njegovi učenici imaju dovoljno znanja o pojedinim smjernicama kako bi tekst mogli sastaviti u zadanim okvirima. Moguće je esej pisati o jednoj nastavnoj jedinici, više njih ili o jednoj cjelini odnosno području. Sukladno tome i zadani će se okvir mijenjati, tj. broj zadanih riječi te smjernica.

Primjer 1. Smjernice za pisanje eseja na temu *Vektori* u 1. razredu srednje škole.

- Definicija i osnovna svojstva
- Zbrajanje i oduzimanje vektora
- Množenje vektora realnim brojem
- Linearna zavisnost
- Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

Primjer 2. Smjernice za pisanje eseja na temu *Elipsa* za treći razred srednje škole, matematičke gimnazije.

- Definicija elipse
- Konstrukcija elipse
- Jednadžba elipse
- Jednadžba translirane elipse
- Presjek pravca i elipse
- Tangenta na elipsu
- Polarna jednadžba elipse

Primjer 3. Smjernice za pisanje eseja na temu *Četverokuti* u 6. razredu osnovne škole.

- Pojam četverokuta
- Kutovi četverokuta
- Paralelogram. Svojstva i konstrukcije.
- Vrste paralelograma
- Trapez
- Površina četverokuta

Primjer 4. Smjernice za pisanje eseja na temu *Kompleksni brojevi* u 2. razredu srednje škole.

- Kompleksni broj
- Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva
- Dijeljenje kompleksnih brojeva
- Modul kompleksnog broja
- Kompleksna ravnina

SMJERNICE	OČEKIVANI SADRŽAJ	OČEKIVANI ISHODI
Kompleksni broj	Proširenje skupa realnih brojeva. Imaginarna jedinica. Imaginarni brojevi. Skup kompleksnih brojeva. Jednakost kompleksnih brojeva.	Objasniti zašto se uvode kompleksni brojevi. Navesti svojstva imaginarne jedinice. Iskazati definiciju za imaginarne brojeve. Iskazati definiciju skupa kompleksnih brojeva. Uspostaviti relaciju skupa realnih i kompleksnih brojeva. Uspoređivati kompleksne brojeve. Opisati jednakost kompleksnih brojeva. Razlikovati posebne oblike kompleksnih brojeva.
Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva	Zbrajanje i množenje u skupu kompleksnih brojeva i njihova svojstva. Potenciranje imaginarne jedinice.	Opisati postupak zbrajanja i oduzimanja kompleksnih brojeva. Navesti i izvesti formule za zbrajanje ili množenje kompleksnih brojeva. Navesti i dokazati svojstva kompleksnih brojeva. Računati vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice te generalizirati. Diskutirati što je umnožak, a što zbroj dvaju kompleksnih brojeva. Primijeniti potencije imaginarne jedinice na rješavanje jednadžbi u skupu kompleksnih brojeva.
Dijeljenje kompleksnih brojeva	Konjugirano kompleksni brojevi i njihova svojstva. Dijeljenje kompleksnih brojeva.	Iskazati definiciju kompleksno konjugiranih brojeva. Zaključiti što je umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva. Navesti i dokazati svojstva kompleksno konjugiranih brojeva. Opisati postupak dijeljenja kompleksnih brojeva. Demonstrirati primjer zadatka dijeljenja kompleksnih brojeva.
Modul kompleksnog broja	Modul i svojstva kompleksnog broja.	Iskazati definiciju modula kompleksnog broja. Povezati posebne oblike kompleksnih brojeva s njihovim modulima. Nabrojiti svojstva modula. Dokazati svojstva modula. Analogijom povezati modul s apsolutnom vrijednosti broja.
Kompleksna ravnina	Gaussova kompleksna ravnina. Udaljenost točaka u ravnini.	Opisati kompleksnu ravninu, skicirati i imenovati njezine dijelove. Grafički interpretirati kompleksni broj. Grafički interpretirati modul kompleksnog broja. Primijeniti modul kompleksnog broja za rješavanje jednadžbi i nejednadžbi u skupu kompleksnih brojeva. Objasniti primjenu kompleksnih brojeva na fraktale ili navesti nove primjere primjene. Uspostaviti korelaciju s povijesti matematike i navesti značaj Gausssa za kompleksnu ravninu.

Tablica 3. Prijedlog smjernica, očekivanih sadržaja i ishoda obuhvaćenih esejom na temu *Kompleksni brojevi za 2. srednje škole.*

Analiza učeničkih eseja

Učenici 2. razreda Strojarske tehničke škole u Osijeku, četverogodišnji program, pisali su eseje iz područja *Stereometrije*, a zadani broj riječi bio je od 400 do 500. S obzirom na opsežnost te nastavne cjeline učenici su mogli birati grupe smjernica na temelju kojih su pisali esej. Prva grupa sadržavala je smjernice: točke, pravci i ravnine, paralelnost i okomitost, ortogonalna projekcija i udaljenost točke do ravnine, dok je druga grupa sadržavala smjernice: točke, pravci i ravnine, paralelnost i okomitost, konveksnost i poliedri.

Cjelovitom analizom učeničkih eseja uočeno je da su učenici, koji su inače odlični i vrlo dobri u ostvarivanju matematičkih postignuća, bili uspješniji u organiziranju i povezivanju smislenih dijelova eseja. U tim esejima s lakoćom se prati logički slijed misli jer njihove tvrdnje proizlaze jedne iz drugih i nadograđuju se. Konkretno, učenik (B.Š.) nakon što je u svom eseju obradio pojam okomitosti nadovezao se na ortogonalnu projekciju na sljedeći način: *„Pojam okomitosti omogućuje nam da definiramo jedno važno preslikavanje točaka u prostoru zvano ortogonalna projekcija.”* Nasuprot tome, učenici manje uspješni u matematici pokazali su svoje znanje o svim navedenim smjernicama na njima dostižnim razinama, bez postizanja logičkog slijeda i povezivanja smjernica. Ulomak razrade sadržajno je podijeljen u nekoliko manjih cjelina u kojima su učenici iznosili svoja znanja o temi, ali zajedno ne predstavljaju koherentnu cjelinu, odnosno tvrdnje ne proizlaze jedne iz drugih već se čini da su nasumično poredane.

Također, učenici (npr. M.P.) koji su uspješniji u matematici nisu imali problema s terminologijom te uporabom matematičkog jezika i simbola: *„Ako je pravac a paralelan s pravcem b ($a \parallel b$), a pravac b paralelan s pravcem c ($b \parallel c$), tada je i pravac a paralelan s pravcem c ($a \parallel c$). To znači da je paralelnost tranzitivna relacija. $(a \parallel b) \wedge (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$.”* dok inače slabiji učenici iz matematike nisu koristili matematičke simbole i jezik nego su se koristili opisivanjem. Primjer (K.Š.): *„Za dva pravca koji imaju samo jednu zajedničku točku kažemo da se sijeku, a ta zajednička točka naziva se presječna točka S .”*

Učenici koji su i inače uspješniji u matematici pokazali su više kognitivne razine znanja izvodeći i navodeći dokaze: *„Ravnina može biti zadana dvama paralelnim pravcima koji se ne podudaraju, a dokaz slijedi iz definicije paralelnosti dvaju pravaca.”*, te diskutirajući i analizirajući dovoljne i nužne uvjete teorema, kao i navodeći postulate: *„Pravac (p) okomit je na ravninu ako je okomit na svaki od pravaca koji leže u toj ravnini i prolaze točkom probodišta. Postavlja se pitanje zašto nije dovoljno da bude okomit samo na jedan pravac. Odgovor je: jer je svaki pravac koji probada ravninu okomit na neki pravac iz te ravnine koji prolazi probodištem. Da bi pravac bio okomit na ravninu, dovoljno je pokazati da je okomit na dva pravca te ravnine koji prolaze probodištem.”* Učenici koji su naklonjeniji matematici u svojim su esejima naglasak stavljali na matematičke koncepte i njihove odnose, a njihovi eseji po formi su slični matematičkim udžbenicima. Esej je književno-znanstvena vrsta, a ovi učenici prednost su dali znanstvenim obiljež-

jima eseja dok je književni stil pisanja teže uočljiv. S druge strane, eseji učenika koji su inače postizali dovoljan ili dobar uspjeh iz matematike ili ne pokazuju zainteresiranost za matematiku, prožeti su više književnim nego znanstvenim stilom. Oni su u svoje eseje, za zaključak u kojem se trebala iskazati važnost i korisnost učenja stereometrije, istražili i uključili razne citate: *„Lakše je naučiti matematiku nego raditi bez nje. H. Bo-uasse”* (F.P.) i vlastita iskustva (M.R.): *„U sklopu nastave imali smo zadatak za domaću zadaću napraviti 3D prikaz jednog od pet poliedara. Odabrao sam dodekaedar i pri tome se upoznao s njegovim sastavnicama. Shvatio sam da se svaki dan susrećemo s takvim tijelima i prostornim problemima, od najjednostavniji do najkompliciranijih.”*

Učenici koji nisu skloniji matematici za eseje su se potrudili pronaći mnogo-brojne primjere primjene i primjere iz stvarnoga života, koristeći različite izvore. Na primjer (A.B.): *„Najduži pravac u avionskom prometu ima aviolinija New Delhi – San Francisco, koja ima pravac kretanja od Atlantika preko Pacifika i iznosi 15 300 kilometara”, „Jedan od poliedara je dijamant Graff Pink vrijednosti 45,75 milijuna dolara, nazvan kralj dijamanta.”* (M.K.)

Ono što je izostalo u svim esejima su skice i konstrukcije, vjerojatno iz razloga što je učenicima nepojmljivo da se u eseju, bez obzira što je to matematički esej, može skicirati ili nešto grafički prikazati. Primijećeno je i da su učenici kojima slabije ide jezično i pisano izražavanje bili manje uspješni u preciznosti iskazivanja definicija ili tvrdnji. Ipak, to ne mora nužno biti uzročno-posljedična veza jer postoji mogućnost da oni te koncepte, definicije i ostalo nisu u potpunosti usvojili.

Umjesto zaključka...

Iz suvremene literature metodike matematike nameće se nužnost i važnost poučavanja konceptualne dimenzije znanja u matematici. Isto tako literatura vrednovanja konceptualne dimenzije znanja kao mogući i kvalitetan način vrednovanja nameće eksplicitne vrste zadataka, kao npr. školski interpretativni esej. Proučavajući znanstveni i stručni opus ovoga područja evidentno je kako esej iz matematike nije uključivan u nastavu matematike niti je istraživani i analiziran u stručnim i znanstvenim radovima. Pojam eseja iz matematike ne nalazimo ni u domaćoj ni svjetskoj literaturi. S obzirom na manjak podataka i relevantne literature, umjesto zaključka donosimo prijedloge za daljnje istraživanje ovoga načina vrednovanja konceptualnoga znanja. Ono što bismo htjeli istražiti je: ima li razlike u stavovima učenika koji pokazuju zainteresiranost ili naklonjenost prema matematici u odnosu na one koji tu razinu naklonjenosti ne pokazuju prema ovom načinu vrednovanja njihova znanja; utječe li pisanje eseja na motiviranost učenika za nastavno područje ili predmet; koje su ili kakve metode i tehnike poučavanja najučinkovitije i primjerene pri pripremi učenika za pisanje eseja; koje su vrste uputa i smjernica optimalne za stvaranje kvalitetnog školskog eseja; kako utvrditi metrijske karakteristike kvalitetnog školskog eseja da bi se izbjegla subjektivnost pri vrednovanju eseja; kako premostiti poteškoće koje pojedini učenici imaju pri jezičnom izražavanju kako ih to ne bi onemogućilo da pokažu svoje znanje iz zadanog

područja; analizirati utječe li ova vrsta vrednovanja znanja pozitivno na konceptualno znanje učenika; utvrditi faktore koji utječu na stvaranje kvalitetnog eseja iz matematike; istražiti koje dobne skupine učenika posjeduju znanja, vještine i sposobnosti za izvršenje zadatka poput pisanja eseja iz matematike i na kojoj razini itd.

Literatura

1. Anderson Lorin, W. & Krathwohl, D. (2001.). A Taxonomy for Learning Teaching and Assessing; A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objec.
2. Borić, E., Škugor, A. i Borić, I. (2015.). Analiza dimenzija kognitivnih procesa i dimenzija znanja u udžbenicima i radnim bilježnicama Prirode i društva. *Napredak*, 156 (3), 283 – 296. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/166184>
3. Brozović, D. i Kovačec, A., gl. ur. (1999.). *Hrvatska enciklopedija*, 1. sv. : A – Bd, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, Zagreb.
4. Dijanić, Ž. i Debelec, T. (2017.). Proceduralno i konceptualno znanje. *Matematika i škola*, 82 (2), 51 – 60. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/23/broj/82/clanak/1141/proceduralno-i-konceptualno-znanje>
5. Good, Thomas L & Brophy, Jere E & Good, Thomas L., 1943-. Educational psychology. 4th ed (1995.). *Contemporary educational psychology* (5th ed). Longman, White Plains, N.Y
6. Gronlund, N. (1985.). Measurement and Evaluation in Teaching. MacMillan, New York.
7. Hiebert, J. & Carpenter, T. 1992. Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: Macmillan.
8. Matešić, I. (2012). Esej iz matematike. *Matematika i škola*, 56 (6), 18 – 21. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/17/broj/56/clanak/792/esej-iz-matematike>
9. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2000.). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: NCTM.
10. Piskač, D. (2011.). Kako napisati esej na državnoj maturi. Zagreb: Alfa.
11. Pucar, M. (2017.) Esej u nastavi jezičnog izražavanja. Preuzeto s <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:142:563183>
12. Rittle-Johnson, B. & Schneider M. (2013.). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. U: R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.) *The oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.
13. Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001.). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
14. Schoenfeld, A. 1986. On Having and Using Geometric Knowledge. In J. Hiebert (ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Erlbaum.
15. Shimizu, Y. 1996. „High Achievement” versus Rigidity: Japanese Students' Thinking on Division of Fractions. In D. Zhang, T. Sawada & J. Becker (eds.) *Proceedings of the China-Japan-U. S. Seminar on Mathematical Education*. Southern Illinois University.
16. Slavin, R. E. (1997.). *Educational psychology: Theory and practice*. Boston: Allyn and Bacon.
17. Star, J.R. (2000.). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. U: B. Fishman, S. O' Conner – Divelbiss (eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (80 – 86), Mahwah, NJ: Erlbaum.
18. Trupčević, G. i Glasnović Gracin D. (2014.). Što bi bilo kad bi...? *Matematika i miš* 74 (2), 147 – 154. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/21/broj/74/clanak/1031/sto-bi-bilo-kad-bi...>
19. Vizek-Vidović, V., Rijavec, M., Vlahović-Štetić, V., Miljković, D. (2003.). Psihologija obrazovanja, Zagreb, IEP, d.o.o. i VERN, d.o.o.