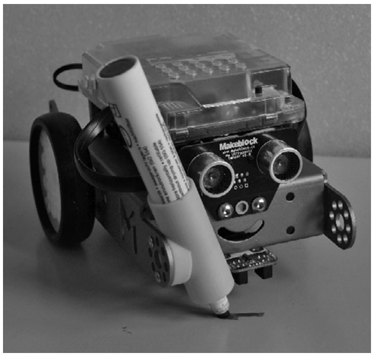
Dvomotorne ravninske krivulje (Matko želi biti slikar)[1]

Goran Igaly[2] i Goranka Nogo[3]

Ključni pojmovi: edukacijski robot, beskonačna petlja, model kretanja robota, stanje sustava, funkcija prijelaza, parametarski zadane krivulje, programiranje fizičkih objekata

Sažetak. U prvom dijelu rada objašnjavaju se osnovni principi i pojmovi vezani uz programiranje kretanja robota koji se kreće pomoću dva neovisna motora. Uvode se osnovne naredbe za upravljanje te objašnjava uloga beskonačne petlje koja je prisutna u svakom ugrađenom sustavu. Opisuje se i demonstrira kretanje robota i crtaju se kružnice različitih promjera kao elementarni segmenti ovakvog kretanja.

Usporedno s razradom idealiziranog matematičkog modela ukazuje se na probleme koji nastaju zbog nejednolikog rada motora, te činjenice da se brzina motora ne mijenja trenutačno, nego je potrebno neko vrijeme za promjenu.



U drugom dijelu rada se, uz pretpostavku trenutačne promjene brzine, matematički modelira kretanje ovakvog robota sastavljeno od niza kružnih lukova. Parametarski se opisuje trenutačno stanje sustava na početku i kraju svakog vremenskog intervala i definira se funkcija prijelaza koja mijenja ovo stanje. Vremenski interval djelovanja funkcije prijelaza određen je minimalnim vremenom nepromjenjivosti brzina lijevog i desnog kotača odnosno motora. Korišteni matematički aparat povezuje se s nastavnim cjelinama u nastavi matematike.

Kao fizički model koristi se edukacijski robot mBot nazvan Matko, nabavljen za potrebe nastave iz kolegija Metodika nastave informatike 1 i 2 na Matematičkom odsjeku PMF-a 2017. godine koji je, u svrhu zornijeg prikaza putanje kretanja, proširen držačem olovke vlastite izrade 2018. godine.

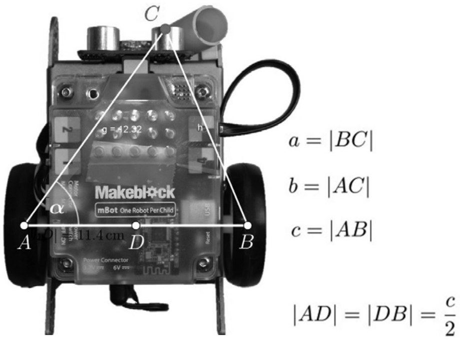
[1]Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu

[2]Goran Igaly, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

[3]Goranka Nogo, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Model robota za crtanje opisan pomoću tri točke

Edukacijski robot mBot kreće se po ravnini pomoću dva neovisno pogonjena kotača. Kotače pokreću motori čije je brzine moguće kontrolirati.



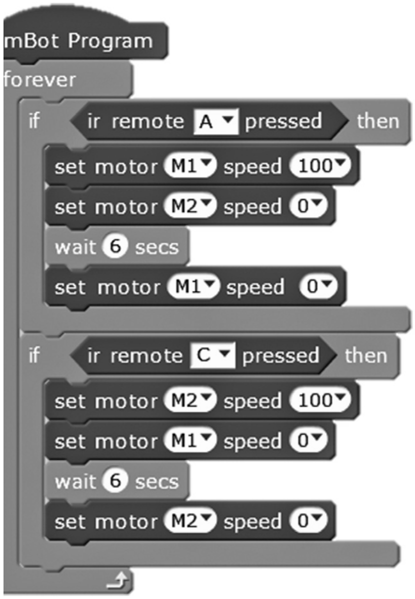
Robotu smo dodali držač flomastera na prednjoj strani. Na taj način robot ostavlja trag na površini po kojoj se kreće pa na osnovi tog traga možemo proučavati način njegova gibanja.

Osovine kotača nalaze se na istom pravcu i među kotačima je fiksni razmak *c*. Točku dodira lijevog kotača s podlogom označimo s *A*, a točku dodira desnog kotača s podlogom označimo s *B*. Točku dodira flomastera s podlogom označimo s *C*. Točka *D* polovište je dužine $\overline{AB}$.

Određivanje parametara robota

Ako robot pokrećemo na način da lijevi motor pokrećemo dok desni motor miruje, dobit ćemo kružnicu sa središtem u točki *B* i polumjerom *c*. Ponovimo li to isto, ali s pokretanjem desnog motora dok lijevi motor miruje, desni će kotač opisati kružnicu polumjera *c* čije je središte u točki *A*.

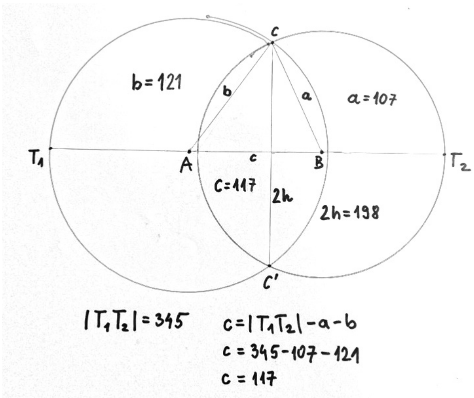
Program za pokretanje robota na ovaj način pisan u blokovskom jeziku mBlock izgleda ovako:



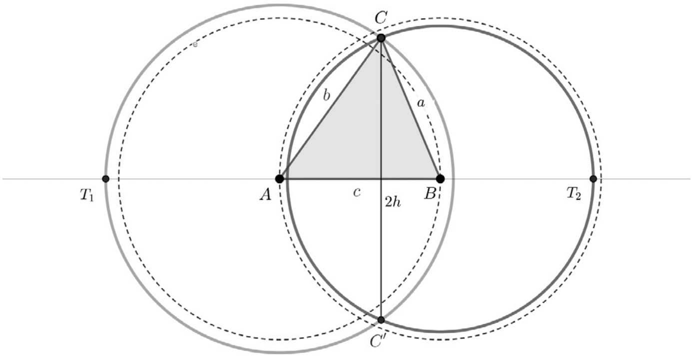
Višestruko ponavljanje naredbi omogućava nam beskonačna petlja `forever`. U klasičnom programiranju tzv. beskonačnu petlju spominjemo, nakon što uvedemo pojam petlje, više kao izuzetak, odnosno kao primjer pogreške. Prilikom programiranja mBota, beskonačna petlja gotovo se uvijek koristi budući da robot obično treba odgovarati na vanjske podražaje tijekom duljeg razdoblja.

Kretanje robota upravljanog ovim programom može se vidjeti na video snimci: https://www.youtube.com/watch?v=0PD7yA2v9xY.

Na slici je prikazan crtež napravljen ovim programom. Izmjerene su duljine stranica a i b, te izračunata duljina stranice c.



Na crtežu napravljenom pomoću robota vidi se nepreciznost pri crtanju lijeve kružnice. Matematički model ovog gibanja, uz pretpostavku potpune preciznosti, izgleda ovako:



Presjeke ovih dviju kružnica označimo s C i C'. Povucimo simetralu dužine $\overline{CC'}$. Pomoću sjecišta ovog pravca i kružnica odredimo promjere ovih kružnica. Polumjeri kružnica odgovaraju duljinama stranica a i b (udaljenost vrha flomastera od točaka dodira lijevog i desnog kotača s podlogom). Duljinu stranice c (razmak između kotača) dobijemo oduzimanjem zbroja duljina ovih stranica od udaljenosti točaka T_1 i T_2.

Na ovaj smo način odredili parametre potrebne za kasnije izračune:

$c = 117$ mm $a = 107$ mm
$b = 121$ mm.

Izračunajmo još i kut α jer se ovaj kut može koristiti kod simulacije kretanja robota na ekranu računala. Kut α računamo pomoću kosinusovog poučka:

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

Provedimo račun pomoću programa *Maxima*:

```
kill(cosa)$
a:107$b:121$ c:117$
rj:solve(a^2=b^2+c^2-2*b*c*cosa,cosa)$
kosinus_alfa:subst(rj[1],cosa);
alfa:acos(kosinus_alfa)$
alfa_u_stupnjevima:float(alfa*180/%pi);
```

(kosinus_alfa) $\frac{5627}{9438}$

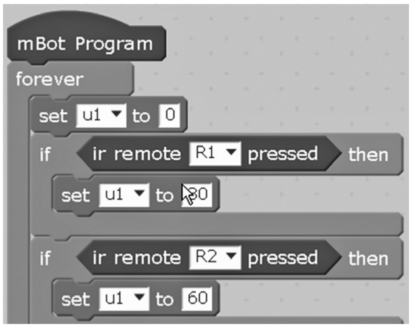
(alfa_u_stupnjevima) 53.40128829449036

Dakle, $\alpha = 53.40°$ i $\cos(\alpha) = \dfrac{5627}{9438}$.

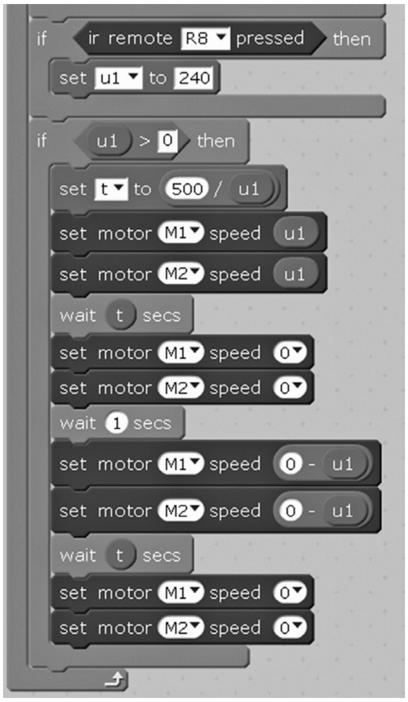
Pravocrtno gibanje robota

Sljedeće fizičko svojstvo robota koje želimo izmjeriti je stvarna brzina pravocrtnog gibanja robota (označimo je s v) u ovisnosti o ulaznoj brzini motora (označimo je s u).

Pripadni programski kod:

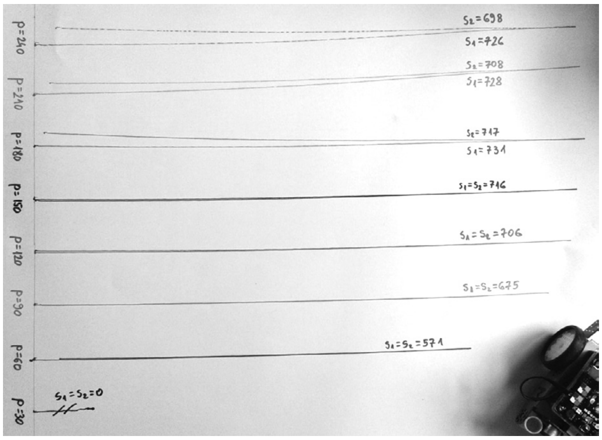


ispušten je dio u kojemu se,
za pritisnute tipke 3,4,5,6 i 7, brzine motora
postavljaju na 90,120,150,180 i 210.



Rad robota pokretanog ovim programom prikazan je na video zapisu dostupnom na internetskoj adresi: https://youtu.be/G7xRzSRxV18.

Na sljedećoj slici prikazan je ispis na papiru dobiven radom ovog programa:



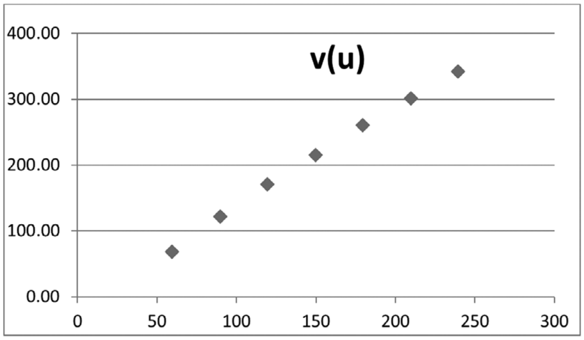
Na slici možemo vidjeti da se pri manjim brzinama (150, 120, 90 i 60) robot vratio u početnu točku, dok se pri većim brzinama točka povratka značajnije razlikovala od početne točke.

Prikažimo tablicom vrijeme, prevaljeni put i prosječnu brzinu na tom putu. Vrijeme rada motora definirano je formulom $t = \frac{500}{p}$ kako bi pri svim brzinama robot prešao približno isti put. Za svaku ulaznu brzinu *u* robot se je gibao tom brzinom prema naprijed i istom tom brzinom prema natrag.

u	t=500/p	s1	v1=s1/t	s2	v2=s2/t	s1+s2	v=(s1+s2)/(2t)
240	2.08	726	348.48	698	335.04	1424	341.76
210	2.38	728	305.76	708	297.36	1436	301.56
180	2.78	731	263.16	717	258.12	1448	260.64
150	3.33	716	214.80	716	214.80	1432	214.80
120	4.17	706	169.44	706	169.44	1412	169.44
90	5.56	675	121.50	675	121.50	1350	121.50
60	8.33	571	68.52	571	68.52	1142	68.52

u	**v(u)**
240	**341.76**
210	**301.56**
180	**260.64**
150	**214.80**
120	**169.44**
90	**121.50**
60	**68.52**

Grafički prikaz ovisnosti brzine pravocrtnog gibanja robota u ovisnosti o ulaznim brzinama pogonskih motora:



Promatranjem ovoga grafa možemo uočiti da točke grafa leže približno na pravcu, odnosno da su ulazna brzina motora i brzina kretanja robota povezane linearnom funkcijom.

Gibanje robota po kružnici

Nakon što smo izmjerili brzinu pravocrtnog gibanja robota u ovisnosti o brzini motora, pogledajmo slučaj kada se motori pokreću različitim ulaznim brzinama, tj. promotrimo slučaj kada je $u_1 \neq u_2$. Pri modeliranju ovakvog gibanja može nam pomoći usporedba s načinom rada šestara. Ako bismo šestaru dodali još jednu olovku, pomoću takvog modificiranog šestara možemo jednim potezom crtati dvije koncentrične kružnice. U jednom punom krugu obje olovke opišu puni kut, s time da su nacrtane kružnice različitih polumjera. Zbog toga je i put koji su prešle olovke različit, odnosno olovke su ostavile tragove različitih duljina. Uz pretpostavku da smo šestar rotirali jednolikom brzinom, brzina gibanja vrhova olovaka može se izračunati po formulama $v_1 = \frac{2r_1\pi}{t}$ i $v_2 = \frac{2r_2\pi}{t}$, pri čemu su r_1 i r_2 polumjeri kružnica, a t vrijeme potrebno za obilazak jednog punog kruga.

Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo jednakost omjera $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Za cijelo vrijeme gibanja olovke su jednako razmaknute, odnosno riječ je o sustavu dvije kruto povezane točke koje se tijekom vremena t gibaju različitim i stalnim brzinama.

Primjenjujući ovo razmatranje na sustav od dva kotača koji se cijelo vrijeme nalaze na jednakom razmaku i gibaju se stalnim brzinama, zaključujemo da će se robot u ovakvom slučaju gibati na način da točke A i B (točke dodira kotača s podlogom) opisuju dvije koncentrične kružnice. Pri tome flomaster također opisuje kružnicu s istim središtem. Ovu kružnicu imamo nacrtanu na papiru i na temelju nje odredit ćemo polumjere kružnica po kojima su se gibali kotači.

Označimo s v_1 brzinu lijevog kotača, a s v_2 brzinu desnog kotača i promotrimo sve moguće slučajeve za gibanje robota pokretanog na ovaj način:

$v_1 = v_2 = 0$. Robot stoji na mjestu.

$v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$. Robot se okreće oko lijevog kotača. Odnosno, točka dodira lijevog kotača (A) s podlogom se ne mijenja, dok desni kotač opisuje oko te točke kružnicu polumjera c. Ako je $v_2 > 0$, robot će se rotirati prema naprijed, a ako je $v_2 < 0$, robot će se rotirati prema natrag.

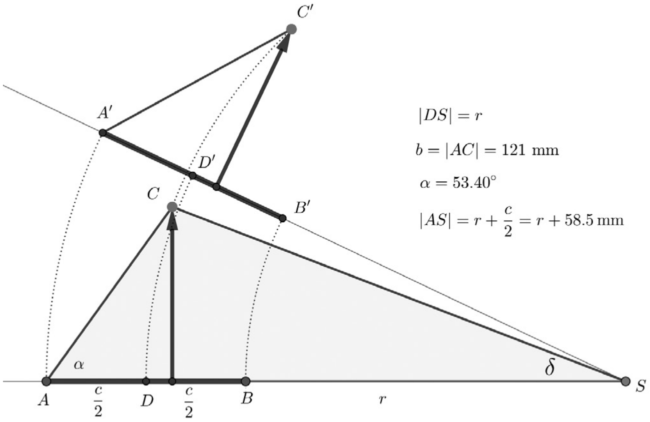
Za slučaj $v_1 \neq 0$, $v_2 = 0$ vrijedi isto razmatranje, samo sa zamijenjenom ulogom kotača.

Na temelju ova dva slučaja odredili smo razmake između kotača, te razmake između kotača i flomastera.

$v_1 = v_2 = v \neq 0$. U ovom slučaju robot će se gibati jednoliko po pravcu brzinom v. Ako je $v > 0$, robot će se gibati prema naprijed, a ako je $v < 0$, robot će se gibati prema natrag.

Ovime smo odredili brzinu gibanja robota u ovisnosti o brzini motora za slučaj kada se robot giba po pravcu.

$v_1 > v_2 > 0$. Robot će se gibati po kružnici na način da kotači opisuju koncentrične kružnice.



Omjer polumjera kružnica jednak je, prema ranijem razmatranju o šestaru s dvije olovke, omjeru brzina kotača. $\left(r-\frac{c}{2}\right)\cdot\alpha = v_2\cdot t$ i $\left(r+\frac{c}{2}\right)\cdot\alpha = v_1\cdot t$. Dijeljenjem ovih dviju jednakosti dobivamo: $\dfrac{\left(r-\frac{c}{2}\right)}{\left(r+\frac{c}{2}\right)} = \dfrac{v_2}{v_1}$.

Sređivanjem ove jednakosti dobivamo izraz za polumjer kružnice po kojoj se giba polovište dužine $\overline{AB}$, odnosno središte spojnice kotača

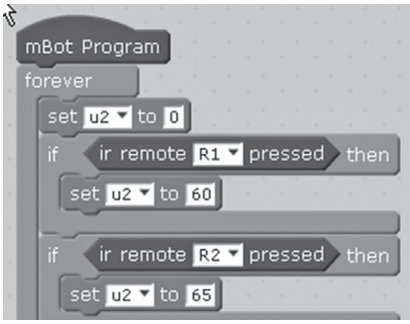
$$r = \frac{c}{2}\frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}.$$

Ovo je temeljna formula koja se koristi za opisivanje dvomotornih ravninskih krivulja.

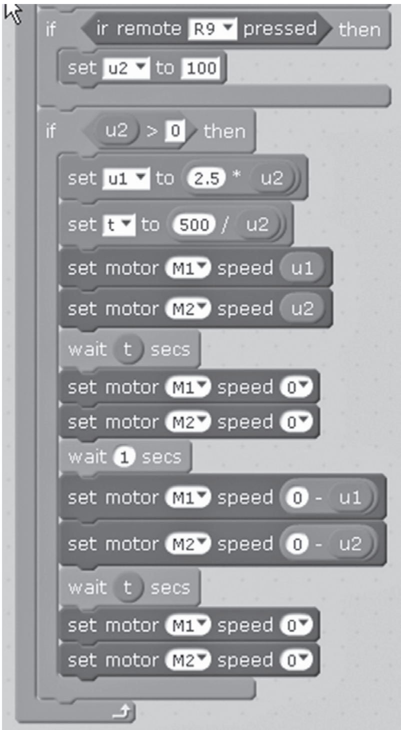
Mjerenje brzine gibanja kotača po kružnici

Kao primjer gibanja robota uz pokretanje motora različitim brzinama uzet je slučaj kada je brzina lijevog motora dva i pol puta veća od brzine desnog motora. Uzet je stalni omjer brzina kako bi, u slučaju da se robot stvarno ponaša na način modela šestara s dvije olovke, dobivene kružnice uvijek imale približno isti polumjer.

Slijedi program za gibanje po kružnici (brzina lijevog motora dva je i pol puta veća od brzine desnog motora):

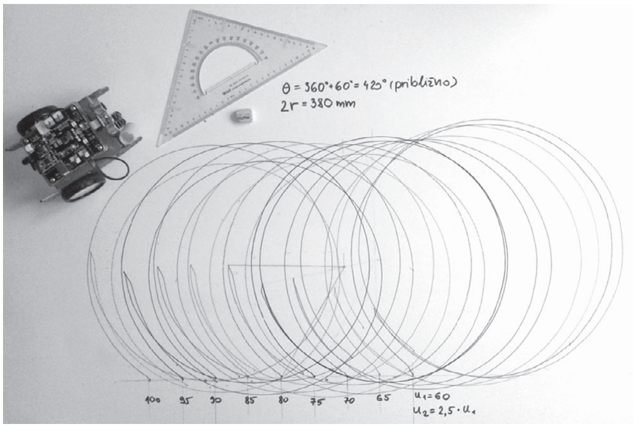


Ispušten je prikaz niza naredbi kojima se u_2 postavlja na vrijednosti od 70 do 95



Izvođenje ovog programa, odnosno crtanje kružnica s različitim brzinama motora (uvijek istog omjera 1 : 2.5) prikazano je na video snimci: https://youtu.be/KEYTvG1uZgU.

Radom ovog programa nastao je sljedeći crtež:

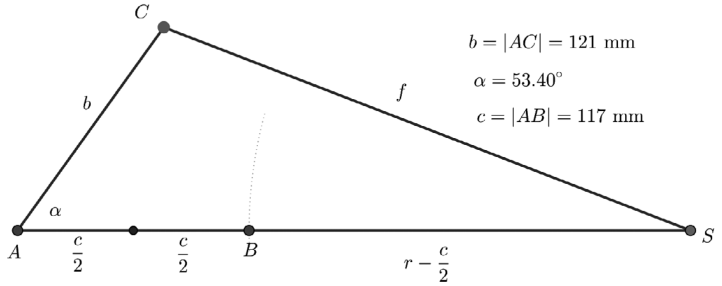


Znajući vrijeme gibanja robota za svaki par brzina te mjerenjem polumjera nastalih (približnih) kružnica i kuta koji je robot prošao, možemo izračunati brzinu gibanja pojedinih kotača po podlozi.

Vidimo da su sve kružnice približno istog polumjera i da je robot prešao približno isti put. Iako bi se robot trebao vratiti u istu točku, primijetimo da se točka povratka razlikuje od točke polaska. U ovom ćemo razmatranju tu činjenicu privremeno zanemariti, odnosno pretpostavit ćemo da se robot gibao po kružnici kako bismo za poznate ulazne brzine motora izračunali približne brzine kotača i polumjer kružnice po kojoj se kretao flomaster kojim robot crta po podlozi.

Iz polumjera kružnice po kojoj se giba flomaster možemo izračunati polumjere kružnica po kojima su se gibali kotači, a iz tih polumjera i vremena možemo izračunati brzine kotača u takvom gibanju i usporediti ih s brzinama kotača u pravocrtnom gibanju.

Duljinu dužine $\overline{AS}$ računamo prema kosinusovu poučku za trokut *ASC*



$$f^2 = \left(r + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 2\left(r + \frac{c}{2}\right) b \cdot \cos(\alpha).$$

U *Maximi*:

```
kill(all)$
a:107$b:121$c:117$
rj:solve(a^2=b^2+c^2-2*b*c*cosa,cosa)$
kosinus_alfa:subst(rj[1],cosa)$
f:190$
jed:f^2=(r+c/2)^2+b^2-2*(r+c/2)*b*kosinus_alfa$
rj:solve(jed,r)$
float(rj);
(%o9)[r =-149.6480664029291,r=176.9301176849804]
```

Prvo rješenje geometrijski nema smisla, pa zaključujemo da je $r = 177$.

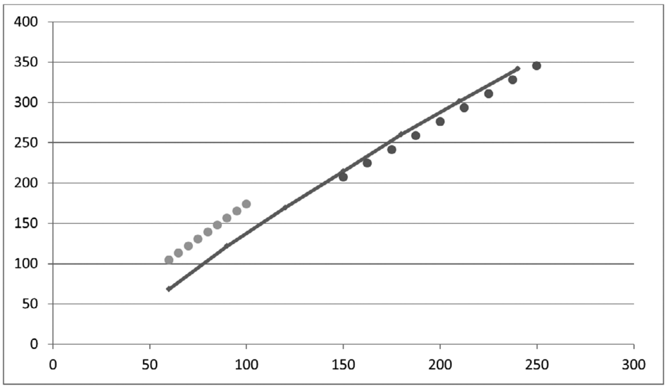
Sada možemo napraviti tablicu s izračunatim brzinama obaju kotača za ovaj slučaj.

u1	u2	t (=500/ u1)	kut u stupnje-vima (cca)	polumjer (cca)	duljina kružnog luka (cca) - C	brzina flomas-tera	r	r-c/2	r+c/2	duljina luka - A	v1	duljina luka - B	v2
150	60	8.33	420	190	1393	167	177	118.5	235.5	1726	207	869	104
162.5	65	7.69	420	190	1393	181	177	118.5	235.5	1726	224	869	113
175	70	7.14	420	190	1393	195	177	118.5	235.5	1726	242	869	122
187.5	75	6.67	420	190	1393	209	177	118.5	235.5	1726	259	869	130
200	80	6.25	420	190	1393	223	177	118.5	235.5	1726	276	869	139
212.5	85	5.88	420	190	1393	237	177	118.5	235.5	1726	293	869	148
225	90	5.56	420	190	1393	251	177	118.5	235.5	1726	311	869	156
237.5	95	5.26	420	190	1393	265	177	118.5	235.5	1726	328	869	165
250	100	5.00	420	190	1393	279	177	118.5	235.5	1726	345	869	174

Nakon ovoga možemo napraviti usporednu tablicu pravocrtne brzine i brzina gibanja po kružnici:

u	v	v1	v2
60	69		104
65			113
70			122
75			130
80			139
85			148
90	122		156
95			165
100			174
120	169		
150	215	207	
162.5		224	
175		242	
180	261		
187.5		259	
200		276	
210	302		
212.5		293	
225		311	
237.5		328	
240	342		
250		345	

Grafički prikaz ovisnosti brzine kotača u odnosu na brzine motora prikazan je na sljedećoj slici. Crtom je prikazana ovisnost tih brzina za slučaj pravocrtnog gibanja, a točkama je prikazana ovisnost brzina kotača za slučaj gibanja po kružnici.

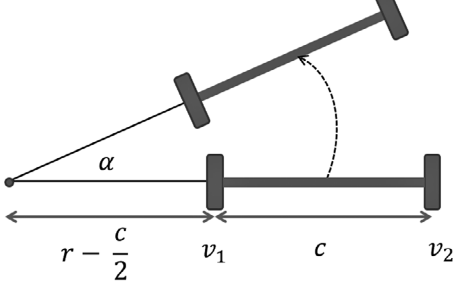


Možemo primijetiti da se, kod gibanja po kružnici, za istu ulaznu brzinu motora sporiji kotač giba nešto brže nego za istu uzlaznu brzinu motora kod pravocrtnog gibanja, dok se brži kotač giba nešto sporije nego što bi se gibao kod pravocrtnog gibanja.

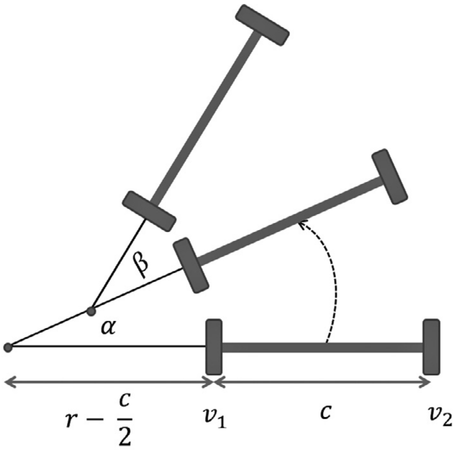
Teorijski model kretanja robota

U ovom dijelu rada opisat ćemo kretanje robota uz pretpostavku nejednolikog rada motora i trenutačne promjene brzine obaju motora. Prilikom vizualizacije kretanja uvijek ćemo crtati put koji prijeđe središnja točka spojnice kotača. Prvo ćemo promotriti diskretni slučaj.

S Δt označit ćemo vremenski interval u kojemu se brzine, nakon promjene barem jedne od njih, neće mijenjati. Stanje sustava u zadanom vremenskom intervalu opisano je uređenom trojkom $(v_1, v_2, \Delta t)$. Koristit ćemo prethodno uvedene oznake, no, za potrebe grafičkog prikaza kretanja, robot ćemo smjestiti u pravokutni koordinatni sustav na sljedeći način: sjecište pravaca na kojima leže spojnice kotača na početku i na kraju vremenskog intervala bit će ishodište pravokutnog koordinatnog sustava.



Nakon vremenskog intervala Δt dolazi do promjene barem jedne od brzina. Sjecište pravaca na kojima leže spojnice na početku i na kraju drugog vremenskog intervala bit će neka točka u ravnini, različita od ishodišta.

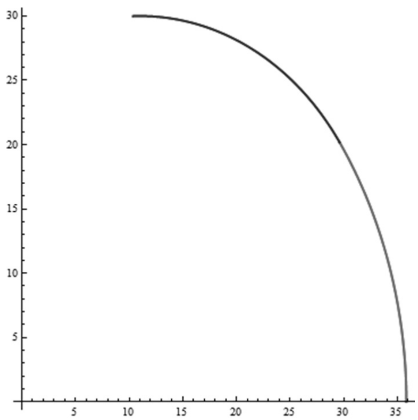


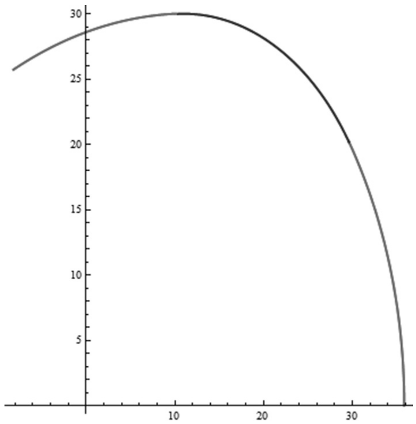
Općenito, stanje sustava kroz neko vrijeme opisano je nizom iteracija oblika

$$\left(v_1^{k+1}, v_2^{k+1}, \Delta t_{k+1}\right) = f\left(v_1^k, v_2^k, \Delta t_k\right), \quad k = 0,1,2\ldots .$$

gdje je s f označena funkcija koja mijenja brzine kotača, odnosno duljinu vremenskih intervala.

Na sljedećim slikama prikazan je put središnje točke spojnice za:
$\left(v_1^0, v_2^0, \Delta t_0\right) = \left(4, 4.6, 5\right)$, $\left(v_1^1, v_2^1, \Delta t_1\right) = \left(4, 5, 5\right)$, odnosno za $\left(v_1^2, v_2^2, \Delta t_2\right) = \left(4.5, 5, 4\right)$.
Slike koje slijede izrađene su u programskom sustavu *Mathematica*.

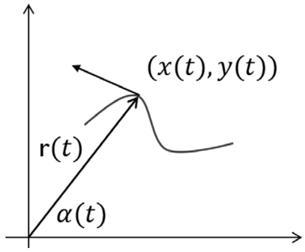




Primijetimo da, u slučaju kada je brzina jednog kotača cijelo vrijeme veća od brzine drugog, dobivamo neprekidnu „spiralu" sastavljenu od kružnih lukova kružnica, općenito različitih radijusa i središta. U vremenskim intervalima u kojima su brzine jednake, kružni će lukovi biti zamijenjeni dužinama.

Promotrimo sada neprekidni slučaj. Pretpostavimo da brzine nisu po dijelovima konstantne funkcije kao do sada nego su funkcije vremena: $v_1 = v_1\,(t)$ i $v_2 = v_2\,(t)$, odnosno da je $\Delta t_k \to 0,\ \ k=0,1,2,\dots$ Opisat ćemo dva problema.

Problem 1. Odrediti parametarsku jednadžbu krivulje $c(t)=\left(x(t),y(t)\right)$ ako su zadane funkcije $v_1\,(t)$ i $v_2\,(t)$ (na slici je s r označena funkcija udaljenosti središnje točke spojnice od ishodišta):



Stanje sustava možemo općenito prikazati diferencijalnim jednadžbama:

$$\frac{dx}{dt}=f_1\left(v_1(t),v_2(t),t\right),\quad \frac{dy}{dx}=f_2\left(v_1(t),v_2(t),t\right),\quad x\left(t_0\right)=x_0,\ y\left(t_0\right)=y_0.$$

Problem 2. Puno je zanimljiviji inverzni problem: kako „natjerati" robota da prijeđe zadani put. Drugim riječima, za zadanu jednadžbu ravninske krivulje trebamo odrediti brzine. Riječ je o problemu koji je realan.

Oba su opisana problema teška. Matematički aparat potreban za njihovo rješavanje uključuje diferencijalnu geometriju, diferencijalne jednadžbe... i zbog toga prikazi rješenja izlaze van okvira ovoga rada.

Zaključak i prijedlog za buduće projekte

Geometrijskim modelom temeljenim na šestaru s dvije olovke, uz pretpostavku gibanja kotača po kružnim lukovima brzinom izračunatom iz pravocrtnog gibanja, nije moguće točno opisati kretanje robota, stoga moramo provesti neka nova mjerenja kojima bismo dobili preciznije slike. Jedna je mogućnost produljiti vrijeme gibanja i pokušati opisati više kružnica te promotriti je li putanja flomastera stvarno približno jednaka kružnici kao što je slučaj kod gibanja kod kojega jedan kotač miruje.

Također, osim omjera 1 : 2.5 mogu se promatrati i drugi omjeri. Omjer 1 : 2.5 odabran je jer je polumjer dobivene kružnice takav da se robot cijelo vrijeme nalazi na papiru dimenzija 100 × 70cm. Za veći polumjer treba smanjiti vrijeme, a polumjer kružnice treba računati pomoću kružnog odsječka nastalog spajanjem početne i krajnje točke putanje.

Isto tako, treba ispitati postoji li razlika između slučajeva kada robot opisuje kružnicu skretanjem u lijevo i u desno, budući da je flomaster položen pod kutom i nije smješten simetrično u odnosu na robota.

Za preciznije upravljanje robotom, mogli bi se koristit *step* motori, te je u planu jedno od sljedećih istraživanja napraviti korištenjem takvih motora.

Također, planiramo rješavanje opisanih problema za neke posebne slučajeve.