

(Još jedna) formula za π s beskonačno ugniježđenim korijenom

DUBRAVKO SABOLIĆ¹, ROMAN MALARIĆ²

Sažetak

U ovom članku izvodimo (još jednu) formulu za izračunavanje vrijednosti broja π . Koristimo se predodžbom o sukcesivnom sve boljem aproksimiranju površine kružnog isječka s proizvoljnim središnjim kutom površinom odgovarajućeg upisanog poligona. Formula za aproksimaciju broja π nakon n iteracija ima oblik umnoška n -te potencije broja 2 i ugniježđenog korijena koji se ponavlja n puta, i kao takva je iterativna. U članku je dokazano da ta formula konvergira ka π kada n teži u beskonačnost. Istražene su računске osobine ovog iterativnog algoritma i njegova ograničenja s obzirom na propagaciju greške zaokruživanja. Performanse ovog postupka računanja aproksimacije broja π , kojeg ćemo nazivati „sinusnim algoritmom” uspoređene su dalje s nekoliko opće poznatih formula, a naročito s povijesno značajnim Arhimedovim algoritmom. Iako su svojstva konvergencije ovih dvaju algoritama teoretski ista, propagacija greške zaokruživanja (inherentne svakom numeričkom proračunu izvođenom računalom) čini sinusni algoritam u praktičnom smislu inferiornim u odnosu na Arhimedov. Razlog tomu je što prilikom izvođenja sinusnog algoritma dolazi do oduzimanja dvaju vrlo sličnih brojeva, koji postaju to sličniji, što je više koraka algoritma izvršeno. U uvjetima konačne točnosti to dovodi do porasta relativne greške proračuna, koja onemogućuje postizanje većeg broja točnih znamenki od nekog koji je određen strojnom točnošću. U Arhimedovom algoritmu nema operacije oduzimanja, pa time niti tog problema.

Zahvala

Autori zahvaljuju anonimnom recenzentu na detaljnoj analizi članka i primjedbama koje su značajno doprinijele poboljšanju njegovog sadržaja te jasnoći i preciznosti izlaganja.

¹Dubravko Sabolić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu.

²Roman Malarić, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu.

1. Uvod

1.1. Kratka povijest izračunavanja broja π

Postoji velik broj formula za izračunavanje približnih vrijednosti broja π , odnosno njegove točne vrijednosti, koje su pronađene kroz povijest. U [1-3] navodi se veći broj poznatih izraza, koji svakako prelazi stotinu. Važnost poznavanja što točnije aproksimacije za broj π s praktičnog je stajališta velika. Na primjer, od najstarijih vremena mnoge građevine i tehničke naprave sadrže kružne elemente. U teoretskom smislu, problem „kvadrature kruga” predstavlja jedan od velikih intelektualnih izazova antičkog i predantičkog razdoblja povijesti.

Kratki pregled povijesti izračunavanja broja π dan je npr. u [2]. Prema tom izvoru, neki egiptolozi smatraju da su Egipćani u doba Starog kraljevstva procjenjivali broj π na $22/7$, što iznosi približno 3.142857. Omjer bazne stranice Keopsove piramide i njene visine iznosi 1.570, što približno odgovara polovici broja π , i to s relativnom greškom³ od samo -0.045% . Na tom i drugim uočenim omjerima temelji se pretpostavka da su Egipćani poznavali broj π , kao i još jedan važan broj, nazvan „zlatnim rezom”, koji iznosi $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$. Međutim, postoje i objašnjenja, poput [4], da drevne egipatske građevine sadrže u sebi te omjere zbog osobina mjernog sustava u Egiptu, prema kojem se jedinica mjere, lakat odnosno *kubit*, mogla dijeliti u sedmine. Štoviše, izgleda da omjeri duljina bridova velike piramide imaju više veze s brojem Φ , nego li s π , o čemu je pisao već i starogrčki povjesničar Herodot (485. – 425. god. pr. Kr.) [5]. U svakom slučaju, zbog velikog vremenskog odmaka i vrlo malo pisanih tragova, nemoguće je sa sigurnošću zaključiti jesu li Egipćani znali da $22/7$ odgovara vrlo približno omjeru opsega i promjera kružnice, ili se broj π u omjerima dimenzija piramida pojavio slučajno, kao posljedica dizajna temeljenog na zlatnom rezu, ili čak ni na čemu posebnom. Babilonski matematičari procjenjivali su da π iznosi 3, ali su bili svjesni da se radi o aproksimaciji. Isti iznos spominje se u Bibliji.

Prvi pokušaj aproksimacije broja π matematičkim putem (dakle, ne mjerenjem, već korektnim računanjem) može se pripisati Arhimeđu (oko 287. – oko 212. pr. Kr.). On je krenuo od pravilnog šesterokuta, zapazivši da je opseg takvog lika upisanog u kružnicu manji od opsega kružnice. Također, opseg pravilnog šesterokuta opisanog istoj kružnici veći je od njenog opsega. Stoga, stvarni opseg kružnice nalazi se između opsega ovih

³Ovdje i na još nekoliko mjesta u članku navodimo *relativnu grešku u postotcima*, jer je taj podatak obično intuitivno razumljiv širokom krugu čitateljstva. Općenito, ako *relativnu grešku* procjene neke veličine x označimo sa ξ , tada će ta procjena iznositi $\tilde{x} = x(1 + \xi)$. Pritom, postotna relativna greška jednaka je $100\xi\%$. Dakle, u ovom primjeru postotna relativna greška od -0.045% odgovara relativnoj grešci iznosa $\xi = -0.00045$. *Apsolutna greška*, ε , jednaka je $x\xi$, što izravno slijedi iz: $\tilde{x} = x(1 + \xi) = x + x\xi = x + \varepsilon$.

U kontekstu teme ovog članka, preciznost različitih aproksimacija broja π također ćemo opisivati i *brojem točno izračunatih znamenki*. To je podatak koji u principu najviše zanima specijaliste koji se bave izračunavanjem broja π . Razumljivo, relativna greška je u izravnoj vezi s brojem točnih znamenki. Na primjer, ako je relativna greška neke aproksimacije tog broja jednaka $+0.000152\%$ (tj. $\xi = +1.52 \times 10^{-6}$), ta će aproksimacija iznositi 3.1415974288..., odnosno imat će šest točnih znamenaka (tj. pet točnih decimala).

dvaju pravilnih šesterokuta. Arhimed je zatim promatrao opsege pravilnih 12-erokutova, pa 24-erokutova, sve do 96-erokutova, pri čemu je svaki puta mogao izračunati duljine njihovih stranica koristeći Pitagorin teorem i poznate duljine stranica i visina trokuta iz prethodne iteracije. Nepoznato je zašto je stao na 96-erokutima. Pomoću njih izračunao je da se omjer opsega i promjera kružnice sigurno nalazi u granicama između 223/71 i 22/7. One odstupaju od stvarne vrijednosti za -0.024% , odnosno $+0.040\%$.

Najbolju starovjekovnu aproksimaciju broja π izračunao je u 5. st. nove ere kineski matematičar Zu Chongzhi (429. – 500.), postavivši granice za π između 3.1415926 i 3.1415927 [2], dakle sa sedam točnih znamenaka. S točnošću u granicama između $-1.706 \times 10^{-6}\%$ i $+1.478 \times 10^{-6}\%$ to će u sljedećih skoro tisuću godina ostati daleko najbolja procjena broja π . Kako bismo stavili tu razinu točnosti u kontekst, zamislimo da znamo točan promjer kugle približno velike poput planeta Zemlje. Koristeći ovu procjenu broja π , opseg takve kugle mogli bismo izračunati točno do na 70 cm.

Srednji vijek i novije doba donose matematičku analizu, a s njome i beskonačne redove koji konvergiraju ka broju π , ili brojevima kojima je on cjelobrojni višekratnik, pa omogućuju u *principu* njegovo proizvoljno točno izračunavanje [2]. Prva takva formula na zapadu duguje se njemačkom matematičaru Leibnitzu (1646. – 1716.) koji je iskoristio tada već i u Europi poznat razvoj funkcije arkus tangensa u beskonačni red potencija ($\arctg x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \dots$), pa je, uvrstivši $x = 1$, ustvrdio da je $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots$. Iako ova formula djeluje na prvi pogled privlačno, ona je u stvari izuzetno neučinkovita. Za izračunavanje samo deset točnih decimalnih mjesta broja π potrebno je zbrojiti približno prvih pet milijardi članova reda, a to je praktički neizmjerljivo lošije od drevnih algoritama poput Arhimedovog. Međutim, već u 14. stoljeću, stotinama godina prije europskih matematičara, Indijac Mādhava iz Sangamagrāma (oko 1340. – oko 1425.) znao je za razvoje trigonometrijskih funkcija u beskonačne redove i došao je do formule koja, premda također sadrži pribrojnik alternirajućih predznaka, konvergira mnogo brže: $\pi = \sqrt{12} \cdot (1 - 1/(3 \cdot 3) + 1/(5 \cdot 3^2) - 1/(7 \cdot 3^3) + 1/(9 \cdot 3^4) - \dots)$. Ona daje 10 točnih decimalnih mjesta nakon samo 20 uračunatih članova.

Perzijski matematičar Jamshīd al-Kāshī (oko 1380. – 1429.) izračunao je π na 17 točnih decimalnih znamenaka, a to je postigao izračunavanjem opsega pravilnog poligona s $3 \cdot 10^{28}$ stranica. Pogreška njegove procjene manja je od $6.4 \cdot 10^{-18}\%$. Uz poznavanje točnog promjera kugle veličine Zemlje, ona bi omogućila izračunavanje opsega te kugle točno do na 0.0256 tisućinki mikrometra, što iznosi tek oko 250 promjera vodikovog atoma.

Od 18. stoljeća nadalje matematičari su se gotovo natjecali u sve točnijem izračunavanju broja π . Jedan od značajnih iskoraka napravio je Slovenac Jurij Vega (1754. – 1802.) koji je 1789. izračunao 140 decimala, od čega je prvih 126 bilo točno. Engleski amater-matematičar William Shanks (1812. – 1882.) odgovoran je za najtočniju procjenu do kraja 19. stoljeća: 1873. godine izračunao je π na 707 decimala, za što

mu je trebalo oko 20 godina. Međutim, zadnja točna decimala bila je 527. I Vega i Shanks temeljili su svoj rad na izvornom obliku ili varijaciji formule koju je pomoću adicijskih teorema trigonometrije ranije bio izveo engleski astronom John Machin (oko 1686. – 1751.) : $\pi/4 = 4 \operatorname{arcctg}(5) - \operatorname{arcctg}(239)$, a koji je i sam bio izračunao prvih stotinu decimala broja π .

Početak 20. stoljeća, indijski matematičar Srinivasa Ramanujan (1887. – 1920.) pronašao je 17 redova brojeva koji vrlo rapidno konvergiraju ka $1/\pi$. Jedan primjer Ramanujanovog reda iz [2], koji daje 8 dodatnih točnih decimalnih mjesta sa svakim dodatnim uračunatim članom, obrađen je u pogl. 5.2 ovog članka.

Suvremeni japanski matematičar Takeshi Sato otkrio je nove, još efikasnije redove koji teže ka $1/\pi$. Jedan od njih donosi dodatnih 97 točnih znamenaka sa svakim novim uračunatim pribrojnikom [6]. Ramanujan-Sato klasa algoritama, primijenjenih na suvremenim računalima, omogućila je da broj π danas bude poznat na više od 22,4 trilijuna točnih i verificiranih decimala [2]. Taj trenutni svjetski rekord drži švicarski fizičar Peter Traub, a izvođenje njegovog proračuna trajalo je 105 dana. Traubov blog dostupan je na ovoj adresi: <https://pi2e.ch/blog/>.

1.2. Cilj rada na formuli za π prezentiranoj u ovom članku

Kao što je iz prethodnog odjeljka bjelodano jasno, svijet ne treba još jednu formulu za π , s obzirom da je ta matematička konstanta poznata već na tako mnogo decimalnih mjesta. Zainteresirani čitatelj može slobodno presnimiti prvih trilijun decimala s maločas navedenog Traubovog bloga.

Algoritam koji ćemo ovdje izvesti, dokazati i analizirati zapravo pripada antičkoj eri računanja broja π . Logika je donekle slična Arhimedovoj. S obzirom na postojanje mnogo bržih algoritama, poput onih iz Ramanujan-Sato klase, radi se o sporo konvergentnom redu. Stoga, izvođenje takvog algoritma ni na koji način neće unaprijediti mogućnost izračunavanja broja π na još više decimala.

Međutim, bez obzira na malu praktičnu vrijednost, uvijek je zanimljivo pokazati i dokazati još jedan izraz, ovaj put kao limes (graničnu vrijednost) niza ugniježđenih korijena (engl. *nested radical*), koji konvergira ka iznosu π .

Štoviše, ovaj rad može poslužiti kao vježba za natprosječno zainteresirane učenike srednjih škola, s obzirom da korišteni matematički aparat ne prelazi razinu elementarne matematike, osim u dva lako objašnjiva detalja. Učeniku će svakako biti korisno izvesti jednu ovakvu vježbu koja, koliko god bila elementarna, mora biti provedena na korektan način.

Ona će biti zanimljiva i utoliko što će učeniku jasno pokazati koja su *računska ograničenja* koja proizlaze iz prirode samog obrađenog algoritma, a koja onemogućuju točno izračunavanje znamenaka u većem broju od približno polovice znamenaka koje koristi računalo pri *danoj razini preciznosti* s kojom radi.

Za uvod u temu, prisjetimo se najprije izraza za kosinus polovičnog argumenta: $\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos \alpha)/2$. Sukcesivnom primjenom tog izraza za početni kut α jednak $\pi/4$, odnosno neprestanim dijeljenjem argumenta s dva u svakom sljedećem koraku, te na kraju primjenom identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, lako ćemo izvesti sljedeći izraz:

$$\sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}, \tag{1}$$

gdje se operacija korjenovanja izvodi prema napisanom obrascu ukupno n puta. S obzirom da je sinus vrlo malog argumenta približno jednak tom argumentu, možemo napisati približan izraz za aproksimaciju broja π n -tog reda:

$$\hat{\pi}(n) = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}}, \tag{2}$$

gdje se korjenovanje opet izvodi n puta. Krenemo li pak od $\alpha = \pi/3$, lako ćemo izvesti ovaj izraz:

$$\hat{\pi}(n) = \frac{3}{2} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{3}}}}. \tag{3}$$

Primijetimo da su $\hat{\pi}(n)$ i $\hat{\pi}(n)$ različiti brojevi, te da računanje ugniježđenih korijena započinje od različitih vrijednosti (2, odnosno 3) unesenih ispod prvog (najdubljeg) znaka korijena. Te početne vrijednosti možemo nazivati „sjemenkama” (engl. *seed*) jer se iz njih na kraju razvija čitav izraz koji se može iterirati u beskraj.

Kako bi način računanja ovog i kasnije izvedenih algoritama (32) i (34) čitatelju bio potpuno jasan, navest ćemo nekoliko prvih aproksimacija za π prema (2):

$$\hat{\pi}(1) = 2^1 \sqrt{2} \approx 2.82843$$

$$\hat{\pi}(2) = 2^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 2.34315$$

$$\hat{\pi}(3) = 2^3 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 3.12145$$

$$\hat{\pi}(4) = 2^4 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 3.13655$$

... ..

$$\hat{\pi}(9) = 2^9 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}} \approx 3.14158$$

$$\hat{\pi}(10) = 2^{10} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}}}} \approx 3.14159$$

... .. itd...

Kao što vidimo, prva aproksimacija broja π u ovom algoritmu jednaka je $2\sqrt{2}$, dok deseta već daje pet točnih decimala (odnosno šest točnih znamenaka).

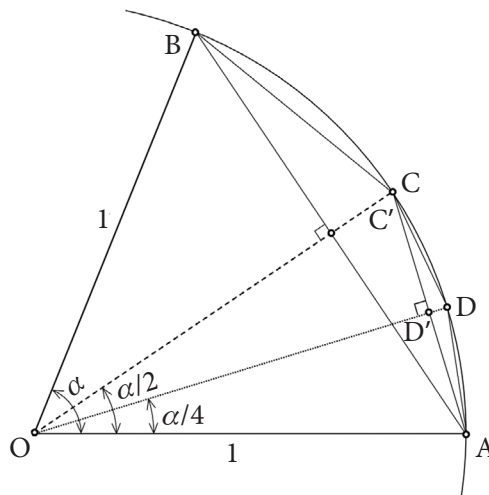
Jedna od dviju formula koje ćemo izvesti u ovom članku, a nalazi se dolje pod rednim brojem (34), zapravo je u jednom posebnom slučaju ekvivalentna izrazu (2), što ne čudi s obzirom da je izvedena repetitivnim korištenjem u osnovi istog trigonometrijskog identiteta za polovični argument. Naime, Weisstein u [1] navodi algoritam napisan u iterativnom obliku, identičan formuli (34) (jedn. (67) i (68) u [1]), pozivajući se na osobnu komunikaciju s J. Munkhamarom. Međutim, on uopće ne navodi tu referencu u popisu literature u [1], a rad J. Munkhamara u kojem bi bio opisan njegov iterativni algoritam autori ovog članka nisu uspjeli pronaći generičkim pretraživanjem interneta. Naizgled, osim u [1], on nigdje nije ni spomenut. Weisstein navodi da je Munkhamarov algoritam, kad se u njega kao početna ocjena broja π uvrsti $\sqrt{2}$, ekvivalentan formuli (2).

S obzirom da je Munkhamarov algoritam u literaturi samo taksativno naveden, u ovom ćemo ga radu izvesti u općenitijoj formi od one koja je dana u [1], krenuvši od predodžbe o aproksimativnom određivanju površine kružnog isječka s proizvoljnim središnjim kutom. Zatim ćemo ispitati svojstva brzine konvergencije izvedenog algoritma (32), kao i njegove jednostavnije inačice (34), te usporediti te algoritme s nekoliko drugih, opće poznatih. Objasniti ćemo mehanizam širenja greške zaokruživanja koji sprječava da ovaj algoritam, primijenjen na računalu koje računa s ograničenom preciznošću, proizvede više od nekog maksimalnog broja znamenaka, koji je pak u vezi s odabranom razinom preciznosti računanja.

2. Definicije

Promotrimo sliku 1. Definirajmo kružnicu polumjera $r = 1$, čije se središte nalazi u točki O . Sljedeće duljine sve iznose također 1:

$$d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = d(O, D) = 1. \quad (4)$$



Slika 1. Definicije.

Središnji kut α definira promatrani kružni isječak. U prvom krugu izvođenja proračuna on se dijeli na dva jednaka dijela. Zatim se te polovice dijele dalje na pola, i tako redom. Slika 1. prikazuje samo prve dvije podjele. Definirajmo sljedeće udaljenosti:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= d(O, C') \\ y_0 &= d(B, C') \\ x_1 &= d(O, D') \\ y_1 &= d(C, C') \\ &\vdots \\ x_n &= \text{udaljenost od } O \text{ do sekante nasuprot kuta širokog } \alpha/2^n \\ y_n &= \text{polovica duljine sekante nasuprot kuta širokog } \alpha/2^n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ovdje i nadalje, n je prirodan broj. Definirajmo zbrojeve površina svih *rubnih trokuta*, onih čija se površina svakim novim dijeljenjem središnjeg kuta dodaje ukupnoj aproksimaciji površine kružnog isječka dosegnutoj u prethodnom koraku:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= P(OAB) \\ P_1 &= P(ABC) \\ P_2 &= 2P(ACD) \\ &\vdots \\ P_n &= 2^n \times \text{površina pojedinačnog rubnog trokuta koji nastaje nakon dijeljenja } \alpha/2^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Površina poligona omeđenog dužinama \overline{OA} i \overline{OB} te svim sekantama nakon $n+1$ dijeljenja povećava se za P_n . Ukupna površina je stoga:

$$\hat{P}(n) = \sum_{i=0}^n P_i. \quad (7)$$

Nakon beskonačno mnogo dijeljenja ukupna površina je:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}(n), \text{ a to mora biti jednako } r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2}. \quad (8)$$

3. Konstrukcija algoritma

Najgrublja aproksimacija stvarne površine kružnog isječka sa slike 1. jest trokut OAB . Njegova površina iznosi $y_0 x_0$. S obzirom da očito vrijedi $y_0 = \sin(\alpha/2)$ i $x_0 = \cos(\alpha/2)$, možemo napisati:

$$P_0 = y_0 x_0 = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha. \quad (9)$$

Površina trokuta ABC iznosi $y_0(1 - x_0)$, pa vrijedi:

$$P_1 = y_0(1 - x_0) = \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha. \quad (10)$$

Zbrojene površine trokuta OAB i ABC nešto bolje aproksimiraju stvarnu površinu isječka nego li samo $P(OAB)$. Primijetimo sada rubni trokut ACD koji nastaje nakon još jednog dijeljenja središnjeg kuta. Očito vrijedi: $y_1 = \sin(\alpha/4)$ te $x_1 = \cos(\alpha/4)$. Površina toga trokuta jednaka je $y_1(1 - x_1)$. No, sada imamo dva rubna trokuta te površine. (Zbog jasnoće slike drugi nije nacrtan. On je inače smješten simetrično trokutu ACD u odnosu na dužinu OC .) Možemo napisati:

$$P_2 = 2y_1(1 - x_1) = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{4} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Ovakav postupak može se ponavljati u beskraj. Nakon što je α podijeljen n puta, na 2^n jednakih kutova, broj rubnih trokuta, onih najbližih kružnici, jednak je 2^{n-1} . Površina svakog individualnog rubnog trokuta zadnje iteracije je $y_{n-1}(1 - x_{n-1})$. Stoga vrijedi:

$$P_n = 2^{n-1} y_{n-1}(1 - x_{n-1}) = 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2^n} \right) = 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n} - 2^{n-2} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}}. \quad (12)$$

Zbrajanjem prema (7) dobivamo aproksimaciju n -tog reda površine isječka:

$$\hat{P}(n) = \sum_{i=0}^n P_i = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sin \alpha + \\ & + \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha + \\ & + 2 \sin \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{2} + \\ & + 4 \sin \frac{\alpha}{8} - 2 \sin \frac{\alpha}{4} + \\ & + \dots + \\ & + 2^{n-2} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}} - 2^{n-3} \sin \frac{\alpha}{2^{n-2}} + \\ & + 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n} - 2^{n-2} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}} = \\ & = 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Primijetimo da se u ovoj sumi svi članovi osim $2^{n-1} \sin(\alpha/2^n)$ poništavaju.

Uzevši u obzir činjenicu da sinusna funkcija vrlo malog argumenta teži upravo tom argumentu, limes ove površine kada n teži u beskonačno možemo napisati kao:

$$\hat{P}(n \rightarrow \infty) = P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{n-1} \cdot \frac{\alpha}{2^n} \right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (14)$$

Kako je taj rezultat identičan onom iz (8), koji slijedi iz elementarne geometrije, ovime smo dokazali da suma (13) konvergira kada n teži u beskonačno.

3.1. Sin($\alpha/2^n$) izražen pomoću ugniježđenog korijena

U nastavku teksta ćemo zbog jednostavnosti raditi samo s kutovima $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$. Poznata formula za sinus polovičnog argumenta glasi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right)}. \quad (15)$$

Slijedi:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right)} \right)}. \quad (16)$$

Primijetimo da u koracima raspolovljivanja kuta α koji slijede nakon (15) više nema potrebe za uzimanjem u obzir \pm predznaka ispred korijena, jer se svi kutovi oblika $\alpha/2^n$ za $n \in \mathbf{N}$ sigurno nalaze između 0 i $\pi/2$. Definirajmo pomoćnu varijablu k :

$$k = 1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (17)$$

Za izračunavanje $\sin(\alpha/2^n)$ za bilo koji n možemo nastaviti proces započet jednadžbom (16), ponavljajući operaciju korjenovanja ukupno n puta. Stoga, za $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ i $k \in \langle 0, 2 \rangle$ vrijedi:

$$\sin \frac{\alpha}{2^n} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\dots \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} k} \right)} \right)} \right)} \right)} \right)}, \quad (18)$$

gdje izraz na desnoj strani sadrži ukupno n operacija kvadratnog korjenovanja.

Definirajmo *sjemenku* s kao izraz ispod unutarnjeg (početnog) korijena:

$$s = 1 - \frac{1}{2} k. \quad (19)$$

Očigledno vrijedi:

$$s = \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (20)$$

Taj broj može imati bilo koju vrijednost iz intervala $[0,1]$. Jedinica mora biti isključena jer bi ona dovela do kolapsa algoritma (18). Kružni isječak s centralnim kutom nula nema površinu. Izraz (18) može se dakle napisati kao:

$$\sin \frac{\alpha}{2^n} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\dots (1 - \sqrt{s})} \right) \dots} \right) \right) \right)}. \quad (21)$$

3.1. Računanje aproksimacije broja π

Sada se prisjetimo izraza (13) koji definira procjenu n -tog reda površine kružnog isječka. U kombinaciji s (21) dobivamo:

$$\hat{P}(n, s) = 2^{n-1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\dots (1 - \sqrt{s})} \right) \dots} \right) \right) \right)}, \quad (22)$$

ili u skraćenom obliku:

$$\hat{P}(n, s) = 2^{n-1} R(n, s). \quad (23)$$

Simbol $R(n, s)$ označuje ugniježdeni korijen iz (22), u kojemu se operacija korjenovanja izvršava n puta. Argumenti (n, s) označuju da je R funkcija brojeva n , odnosno s . Stoga je i površina aproksimacije n -tog reda površine isječka funkcija tih varijabli.

Pretpostavimo da je kut α izražen kao dio kuta π :

$$\alpha = \frac{\pi}{t}, \quad t \in [1, \infty). \quad (24)$$

S obzirom da površina isječka jediničnog kruga s centralnim kutom α iznosi $\alpha/2$, aproksimacija n -tog reda broja π može se zapisati kao:

$$\hat{\pi}(n, \alpha) = 2t \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^n}. \quad (25)$$

Odgovarajuća sjemenka ima iznos:

$$s = \cos^2 \frac{\pi}{2t}. \quad (26)$$

Primijetimo da se u formuli (26) nalazi stvarna vrijednost π . Dobivamo:

$$\frac{t}{2} = \frac{\pi}{4 \arccos \sqrt{s}}. \quad (27)$$

Slijedi:

$$\hat{\pi}(n, s) = \frac{\pi \cdot 2^{n-1}}{\arccos \sqrt{s}} R(n, s) = \frac{\pi}{\arccos \sqrt{s}} \hat{P}(n, s). \quad (28)$$

Normalno, kako n raste i počinje težiti u beskonačno, aproksimacija postaje sve sličnija stvarnom iznosu broja π , pa vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\pi}(n, s)}{\pi} = \frac{1}{\arccos \sqrt{s}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}(n, s) = 1. \quad (29)$$

Stoga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}(n, s) = \hat{P}(\infty, s) = P = \arccos \sqrt{s}. \quad (30)$$

No, t je funkcija stvarnog π kojeg se moramo nekako riješiti. Uvedimo stoga supstituciju: $s = \sigma^2$, $\sigma \in [-1,1]$. S obzirom da je $\arcsin \sigma = \arccos \sqrt{1-\sigma^2}$, vrijedi:

$$\hat{P}(n, 1-s) = \arcsin \sqrt{s}. \tag{31}$$

Kako je $\arcsin \sqrt{s} + \arccos \sqrt{s} = \pi / 2$, aproksimacija n -tog reda jednaka je:

$$\hat{\pi}(n, s) = 2^n [R(n, s) + R(n, 1-s)] = 2 [\hat{P}(n, s) + \hat{P}(n, 1-s)]. \tag{32}$$

Stvarna vrijednost broja π jednaka je:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \{2^n [R(n, s) + R(n, 1-s)]\} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{P}(n, s) + \hat{P}(n, 1-s)]. \tag{33}$$

3.2. Daljnja razmatranja

Kombiniranjem izraza (13), (21) i (26) lako izvodimo formulu jednostavniju od (32):

$$\hat{\pi}^*(n, t) = \frac{t}{2} \cdot 2^n R\left(n, \cos^2 \frac{\pi}{2t}\right). \tag{34}$$

Znakom $*$ označeno je da ovaj broj nije jednak onom iz (32), premda se radi o aproksimacijama istog reda n . Ova formula nije tako „elegantna” kao (32) zato što nije simetrična u odnosu na s te na područje definicije te varijable. Izraz (34) možemo zvati „jednostranom” formulom jer koristi samo s , a ne i njegov komplement $1 - s$. Izračunavanje aproksimacije istog reda (34) zahtijeva dvostruko manje računanja nego (32). To, međutim, ne znači automatski da je (34) računski učinkovitiji algoritam od (32). Prije takvog zaključka trebalo bi provjeriti i koliki je broj iteracija n potrebno izvesti s jednim ili drugim algoritmom za postizanje istog stupnja točnosti procjene broja π .

Na prvi pogled može se činiti da je formula (34) beskorisna jer za izračunavanje aproksimacije broja π zahtijeva poznavanje točnog iznosa tog broja, s obzirom da se on nalazi u argumentu funkcije R . No, postoje neke „lijepje” vrijednosti t koje daju poznate „lijepje” vrijednosti kosinusa, pa tako eliminiraju π iz algoritma. Evo pregleda samo nekoliko njih:

t	1	1.5	2	3
$s = \cos^2 \frac{\pi}{2t}$	0	0.25	0.5	0.75

Primijetimo da kod dvostranog algoritma ovaj problem ne postoji, pa se može koristiti bilo koja vrijednost s . Ako se u dvostranom algoritmu upotrijebi vrijednost $s = 1/2$, on se reducira na jednostrani jer ugniježđeni korijeni za s i $1 - s$ postaju identični. Kasnije ćemo vidjeti da jednostrani algoritam uz $s = 0$ funkcionira (za razliku od slučaja sa $s = 1$), ali ima vrlo nepovoljne karakteristike pa nije praktično značajan.

4. Računski algoritam

Sada ćemo navesti jednostavnu strategiju za praktično izvođenje proračuna pomoću računala. Prisjetimo se (21), gdje je $R(n,s)$ potpuno raspisan. Definirajmo veličinu p_s koju možemo nazvati *klicom* s obzirom da klija iz sjemenke i u nastavku postupka razvija algoritam do njegovog kraja:

$$p_s = 1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{s}). \quad (35)$$

Sljedeću iteraciju te veličine dobivamo tako da upravo izračunatu vrijednost kliče, p_s , uvrstimo u istu formulu umjesto sjemenke s :

$$p_{s,i+1} = 1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{p_{s,i}}). \quad (36)$$

Ovdje je i prirodni broj veći od 1. Komplementarna klica, p_{s-1} , koja se koristi u računanju korijena $R(n, 1-s)$, koristi se na isti način kao upravo definirana.

Primijetimo da bi puko iterativno uvrštavanje prema (36) bilo računski vrlo ne-efektivno jer bi se kompletan ugniježđeni korijen svaki put računao ponovno, pri čemu bi računalni napor rastao u svakom koraku. Zbog toga ovdje navodimo jednostavnu proceduru koja u svakom koraku iteracije formule (32) izvodi jednak broj računskih operacija:

Korak 1 – Odaberi bilo koju vrijednost s iz intervala $[0,1)$. Spremi je pod imenom a . Zatim spremi vrijednost $1-s$ pod imenom b . Izračunaj kvadratne korijene iz a i b , zbroji ih i spremi pod imenom r . [Komentar: time se dobilo $R(1,s) + R(1,1-s)$.] Spremi broj 2 pod imenom m . Pomnoži $r \times m$ i spremi umnožak pod imenom $Pi1$. [Komentar: time se dobilo $\hat{\pi}(1,s)$.]

Korak 2 – Izračunaj $(1-\sqrt{a})/2$ i $(1-\sqrt{b})/2$. Spremi rezultate redom kao nove vrijednosti a , odnosno b . Izračunaj kvadratne korijene iz a i b , zbroji ih i spremi kao novu vrijednost r . [Komentar: time se dobilo $R(2,s) + R(2,1-s)$.] Pomnoži m s 2 i spremi kao novu vrijednost m . Pomnoži $r \times m$ i spremi umnožak pod imenom $Pi2$. [Komentar: time se dobilo $\hat{\pi}(2,s)$.]

Korak 3 – Izračunaj $(1-\sqrt{1-a})/2$ i $(1-\sqrt{1-b})/2$. Spremi rezultate redom kao nove vrijednosti a , odnosno b . Izračunaj kvadratne korijene iz a i b , zbroji ih i spremi kao novu vrijednost r . [Komentar: time se dobilo $R(3,s) + R(3,1-s)$.] Pomnoži m s 2 i spremi kao novu vrijednost m . Pomnoži $r \times m$ i spremi umnožak pod imenom $Pi3$. [Komentar: time se dobilo $\hat{\pi}(3,s)$.]

... itd ...

Korak n – Izračunaj $(1-\sqrt{1-a})/2$ i $(1-\sqrt{1-b})/2$. Spremi rezultate redom kao nove vrijednosti a , odnosno b . Izračunaj kvadratne korijene iz a i b , zbroji ih i spremi kao novu vrijednost r . [Komentar: time se dobilo $R(n,s) + R(n,1-s)$.] Po-

množi m s 2 i spremi kao novu vrijednost m . Pomnoži $r \times m$ i spremi umnožak pod imenom Pin . [Komentar: time se dobilo $\hat{\pi}(n, s)$.]

S obzirom da su svi koraci od trećeg nadalje identični, algoritam se vrlo lako implementira u bilo kojem programskom okruženju i može se ponoviti proizvoljno mnogo puta. Utoliko je varijable $Pi1, Pi2, \dots, Pin$ korisno ne spremati pojedinačno, već kao komponente vektora u kojem se svaka procjena $\hat{\pi}(i, s)$ sprema na mjesto čiji redni broj odgovara broju $i \in [1, n]$. Reduciranu jednostranu formulu (34) moguće je implementirati na analogan način, a raspisivanje tog algoritma ostavljamo čitatelju.

5. Numerički testovi

Upravo opisani algoritam primijenjen je u Matlabu[®], uz korištenje njegove standardne 16-znamenkaste preciznosti. Pokazalo se da algoritam ne može izračunati više od devet točnih znamenaka broja π , bez obzira na broj iteracija. Štoviše, izvođenje dodatnih iteracija nakon dosizanja devete točne znamenke kvari rezultat, te se broj točno izračunatih znamenaka smanjuje. Kako bismo demonstrirali taj efekt i zorno objasnili o čemu se radi, nismo htjeli koristiti veću preciznost računanja.

5.1 Akumulacija greške – pojednostavnjena analiza

Gomilanje greške u ovom algoritmu posljedica je njegovih dvaju ključnih svojstava: (a) korjenovanje s ograničenom preciznošću vodi nesigurnosti zadnje decimale uslijed zaokruživanja; (b) u svakom koraku algoritma dolazi do oduzimanja tipa $1 - (1 - \sqrt{\dots})/2 = 1 - \lambda$, gdje broj λ u svakom koraku ima vrijednost sve sličniju jedinici, a to, kako ćemo uskoro vidjeti, dovodi do postupnog rapidnog povećavanja relativne greške.

Uz 16-znamenkastu preciznost, korijeni brojeva iz intervala (0,1) bit će zaokruženi na 15. decimalu koja će stoga biti nesigurna (osim kod korjenovanja rijetkih „lijepih” brojeva poput 1/4, 1/16, 1/25, itd.).

Sada ćemo načiniti pojednostavnjenu analizu propagacije pogreške koja počinje zaokruživanjem korijena. Ono samo po sebi nije problematično, ali operacije oduzimanja sličnih brojeva jako povećavaju relativnu grešku koja se kao takva manifestira u nesigurnosti decimale, počevši od prve zahvaćene greškom pa nadesno. Primjerice, relativna greška od 0.001 (odnosno 0.1%) u odnosu na broj π znači da njegova treća decimale i sve iza nje imaju pogrešnu vrijednost. Operacije korjenovanja u 16-znamenkastoj preciznosti bit će *same po sebi* nesigurne do najviše:

$$\varepsilon = \pm 0,5 \cdot 10^{-16}. \quad (38)$$

Međutim, ako neka računaska operacija koja slijedi unese dodatnu relativnu pogrešku, to će uzrokovati pomicanje prve nesigurne znamenke na lijevu stranu. Istodobno, točno izračunate znamenke s napredovanjem algoritma pomiču se nadesno. Nakon određenog broja koraka iteracije, n , „epidemija kuge” greške koja se širi nali-

jevo dostići će zadnju točno izračunatu znamenku, i u tom trenutku daljnje izvođenje algoritma postaje bespredmetno te kontraproduktivno. Analizu propagacije greške zasnivamo na standardnom teoretskom okviru [7].

Pretpostavimo da smo izračunali kvadratni korijen neke vrijednosti x , koja je dodatno „zagađena“, greškom nepoznate veličine, ε , tako da vidimo iznos $x + \varepsilon$. Tu grešku možemo smatrati slučajnom varijablom⁴ koja ima neku očekivanu (prosječnu) vrijednost i funkciju razdiobe vjerojatnosti, s varijancom (kvadratom standardne devijacije) iznosa $\text{Var}(\varepsilon)$.

Ako je greška ε relativno mala u odnosu na x , vrijednost korijena od $x + \varepsilon$ moći ćemo procijeniti tako da korijenu stvarne vrijednosti x dodamo ε pomnožen s prvom derivacijom (dakle, brzinom promjene)⁵ funkcije korijena, uzetom u točki x :

$$\sqrt{x + \varepsilon} \approx \sqrt{x} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}}. \quad (39)$$

Vidimo da operacija kvadratnog korjenovanja smanjuje varijancu za faktor $4x$. Rezultirajuća relativna greška rezultata iznosi:

$$\frac{\sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \approx \frac{\varepsilon}{2x}, \quad (40)$$

a to je jednako polovici relativne greške polazne veličine. Stoga možemo zaključiti da korjenovanje čak djeluje i povoljno na iznos relativne greške, dvostruko ga smanjujući.

Druga važna operacija koju obavlja naš algoritam je repetitivno oduzimanje (vrlo) sličnih brojeva, $1 - x$, gdje je $x \approx 1$. Ako x sa sobom donosi i nepoznatu grešku ε , greška rezultata ove operacije bit će:

$$1 - (x + \varepsilon) = (1 - x) - \varepsilon, \quad (41)$$

a relativna greška rezultata bit će:

$$\frac{[(1 - x) - \varepsilon] - (1 - x)}{(1 - x)} = \frac{-\varepsilon}{(1 - x)}. \quad (42)$$

Stoga, kako napredovanjem algoritma x postaje sve sličniji jedinici, rezultatna normalizirana standardna devijacija biva povećana za faktor $1/(1 - x)$, što može biti vrlo velik iznos. Primjerice, ako je $1 - x = 0.000001$, relativna greška povećat će se za faktor milijun, a to će dovesti do pomicanja mjesta prve nesigurne znamenke za čak šest decimala ulijevo. Stoga zaključujemo da je repetitivno oduzimanje tipa $1 - x$, gdje je x sve bliži jedinici kako raste n , nepovoljna osobina algoritama (32) i (34), odnosno ugniježđenog korijena iz (22), koja dovodi do brze propagacije računске greške nalijevo.

⁴Zapravo, ona nije slučajna u pravom smislu te riječi (vidjeti [8]), ali ovdje nam je prikladno koristiti takvu predodžbu radi jednostavnosti izlaganja, pri čemu nećemo izgubiti previše na utemeljenosti zaključaka naše analize koja, kao što se vidi i iz samog naslova poglavlja 5.1, ionako nije (i ne treba biti) posve rigorozna.

⁵Radi se o razvoju funkcije u Taylorov red oko točke x i zanemarivanju svih članova reda većeg od jedan. Za one koji žele znati više o Taylorovom teoremu srednje vrijednosti i njegovoj primjeni, navodimo referencu [9]. No, ovakav razvoj je i intuitivno jasan, dokle god je odstupanje ε maleno po iznosu, zbog čega se neprekidna funkcija u bliskoj okolini točke x može smatrati približno linearnom.

Načinimo sad numerički primjer i usporedimo propagaciju relativne greške prilikom izračunavanja sukcesivnih ugniježđenih korijena definiranih formulama (22) te (2). Pritom ćemo u (22) koristiti vrijednost $s = \frac{1}{2}$.

U (22) razlika nakon prvog izvođenja algoritma iznosi $\delta_{(22),1} = 1 - (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})/2$. U svakom od daljnjih koraka imat ćemo: $\delta_{(22),n} = 1 - (1 - \sqrt{\delta_{(22),n-1}})/2$. U prvom pak koraku algoritma (2) razlika će iznositi $\delta_{(2),1} = 2 - \sqrt{2}$, a u svakom sljedećem $\delta_{(2),n} = 2 - \sqrt{\delta_{(2),n-1}}$. Tablica 1. prikazuje rezultate ovih operacija za prvih deset koraka promatranih algoritama. Očigledno, sličnost ovih dvaju algoritama raste sa n .

Algoritam (2) naizgled je „za jedan korak bolji” od (22), ali to samo ovisi od toga što u kojem algoritmu smatramo prvim korakom. Razlika u konačnom broju početnih koraka, pogotovu kad je taj broj mali, uopće nije važna. Bitna je promjena opažane pojavnosti po dodatnom koraku algoritma, i po tom kriteriju ova su dva postupka ekvivalentna. Kako bi rezultati bili prezentniji, u tabeli smo naveli i binarne logaritme varijabli δ . Iz njih se vidi da svaki dodatni korak smanjuje binarni logaritam razlike $1 - x$ za 2, što znači da se sama razlika smanjuje 4 puta. Logaritmima u tablici dodana je jedinica kako bi se kompenzirao „popravak” relativne greške za faktor 2, koji je posljedica dodatnog korjenovanja u svakom koraku algoritma.

Izvršavanje prvih deset koraka algoritma (22) dovodi do pomaka od oko 20 binarnih znamenaka nalijevo, što odgovara oko 6 decimalnih. Stoga, načelno, pri radu sa 16-znamenkastom preciznošću ne smijemo se pouzdati u više od 9 sigurnih znamenaka (tj. 8 decimala).

Tablica 1. Iznosi razlika tipa $1 - x$ koje se pojavljuju prilikom izvođenja algoritama (22) i (2).

n	$\delta_{(22),n}$	$1 + \log_2 \delta_{(22),n}$	$\delta_{(2),n}$	$1 + \log_2 \delta_{(2),n}$
1	0.1464466	-1.7715533	0.5857864	0.2284467
2	0.0380602	-3.7155718	0.1522409	-1.7155718
3	0.0096074	-5.7016443	0.0384294	-3.7016443
4	0.0024076	-7.6981666	0.0096305	-5.6981666
5	0.0006023	-9.6972974	0.0024091	-7.6972974
6	0.0001506	-11.697080	0.0006024	-9.6970802
7	0.0000376	-13.697026	0.0001506	-11.697026
8	0.0000094	-15.697012	0.0000376	-13.697012
9	0.0000024	-17.697009	0.0000094	-15.697009
10	0.0000006	-19.697008	0.0000024	-17.697008

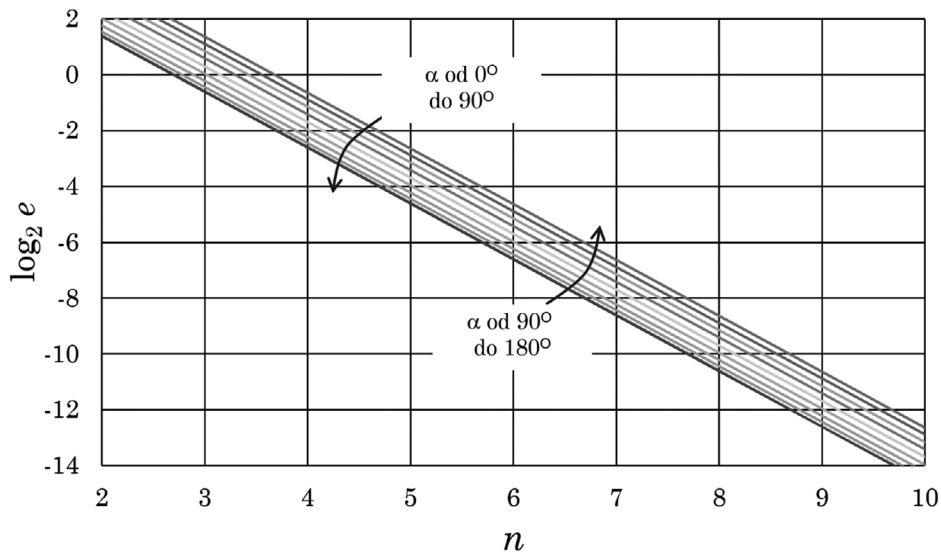
5.1. Brzina konvergencije

Sada ćemo istražiti brzinu konvergencije dvostranog (32) i jednostranog (34) algoritma za različite vrijednosti sjemenke s . Razmotrit ćemo koliko u relativnom smislu aproksimacija n -tog reda, $\hat{\pi}(n, s)$, odstupa od stvarne vrijednosti π . Definirajmo najprije relativnu postotnu pogrešku:

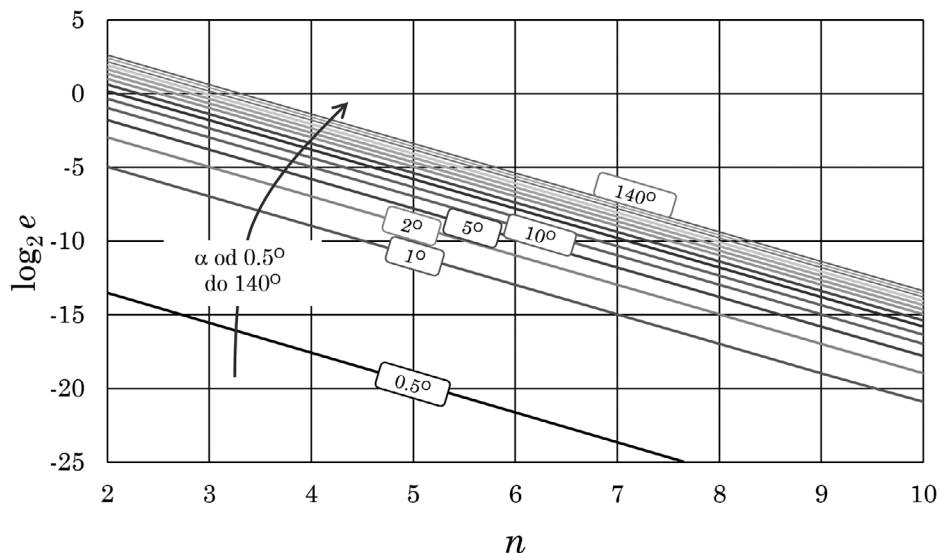
$$e = 100 \cdot \left| \frac{\hat{\pi}(n, s) - \pi}{\pi} \right|. \quad (43)$$

Prilikom rada u 16-znamenkastoj preciznosti, kao najbolju moguću aproksimaciju broja π u ovom računskom sustavu koristit ćemo iznos 3.141592653589793.

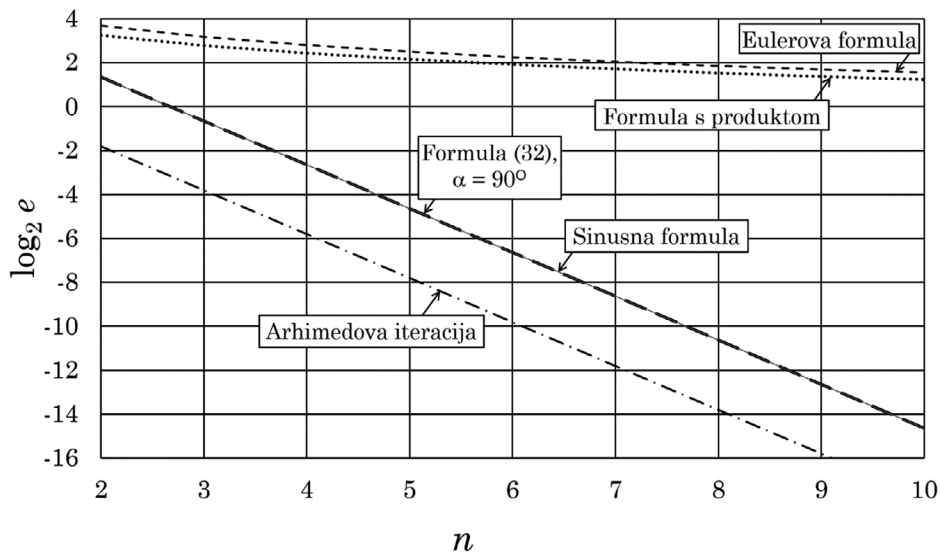
Slika 2. prikazuje rezultate koje daje dvostrana formula (32). Na slici su dani binarni logaritmi, $\log_2 e$, umjesto samih vrijednosti e , jer oni jasnije oslikavaju prirodu procesa približavanja stvarnoj vrijednosti. Kao što se odmah vidi, sve su linije ravne i paralelne, i sve imaju jednak pad od -2 po koraku, što znači da se relativna greška smanjuje četverostruko sa svakim dodatnim korakom računanja. Međutim, ubrzo ćemo vidjeti da propagacija greške već nakon u najboljem slučaju devete točne znamenke kviri rezultat (pogl. 5.3).



Slika 2. Konvergencija dvostranog algoritma (32). Nacrane su krivulje u koracima od po 10° . Krivulja za svaki α identična je onoj za $180^\circ - \alpha$.



Slika 3. Konvergencija jednostranog algoritma (34). Krivulje za α od 10° do 90° nacrtane su u inkrementima od po 10° .



Slika 4. Usporedba brzina konvergencije nekoliko različitih algoritama.

Slika 3. prikazuje isti tip rezultata za jednostrani algoritam (34). Primijetimo da on u načelu daje manja postotna odstupanja od dvostranog. No, kako je obama algoritmima logaritamska brzina konvergencije identična, -2 po koraku, oni su zapravo u smislu te brzine jednako vrijedni. Međutim, širenje računске greške u jednostranom

algoritmu je nepovoljnije, tako da on ne može ni na koji način uz 16-znamenkastu preciznost iznjedriti više od 7 točnih znamenaka (vidjeti malo kasnije, u pogl. 5.3), što je za red veličine 100 puta lošije.

Sada ćemo dati kratku usporedbu logaritamskih brzina konvergencije našeg dvostranog algoritma (32), uz $s = \frac{1}{2}$, odnosno $\alpha = 90^\circ$, sa sljedećim primjerima povijesno značajnih algoritama:

Sinusna formula

Jednadžba (2) u ovom članku.

Arhimedova iteracija

$$a_0 = 2\sqrt{3}; \quad b_0 = 3;$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Brojevi a i b teže ka π , koji se nalazi između njih. U ovom računskom primjeru koristimo manji i brže konvergirajući broj b .

Eulerova formula

$$\hat{\pi}(n) = \sqrt{6 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}}$$

Primjer produktne formule

$$\hat{\pi}(n) = 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2 - 1}$$

Primjer Ramanujanove formule

$$\hat{\pi}(n) = \frac{9801}{\sqrt{8} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{4(i-1)! \cdot (26390i - 25287)}{[(i-1)! \cdot 396^i]^4}}$$

Slika 4. prikazuje logaritamske relativne pogreške procjena n -tog reda prema navedenim algoritmima. Brzina konvergencije je to veća što je veći negativni nagib krivulje. Eulerova formula, te produktna formula, najsporije konvergiraju, tako da osim povijesnog značaja nikad zapravo nisu bile od praktične važnosti. Algoritam (32), razvijen u ovom članku, pripada istoj klasi algoritama kao Arhimedova iteracija, s obzirom da se relativne pogreške procjena u oba algoritma smanjuju za faktor 4 sa svakom novom iteracijom. Premda Arhimedova iteracija ima „prednost u startu” za otprilike jedan i pol korak, kao što smo već rekli, to nema nikakvu važnost. U smislu brzine konvergencije oba su postupka jednako dobra. Naposljetku, Ramanujanova formula toliko je dobra da ne stane na ovaj graf. Već nakon prve iteracije $\log_2 e$ za nju iznosi -18.65 , a nakon samo još jedne on pada na -45.01 . Ta početna brzina konvergencije od -26.36 po koraku 6.59 puta je veća od logaritamske brzine konvergencije našeg algoritma. Relativna pogreška ovog Ramanujanovog algoritma smanjuje se od

prvog do drugog koraka izvođenja 116 milijuna puta. S obzirom da su proračuni za izlaganje u ovom članku rađeni u 16-znamenastoj preciznosti, izvođenje više od dvaju prvih koraka Ramanujanovog algoritma nije bilo moguće.

5.2. Broj točno izračunatih znamenaka u ovisnosti o n

Tablica 2. prikazuje broj točno izračunatih znamenaka koje nakon n koraka različiti algoritmi. Rezultati za „sinusnu formulu” nisu dani jer su identični rezultatima za algoritam (32) uz $\alpha = 90^\circ$ (tj. $s = \frac{1}{2}$). Oznaka „n/c” znači da se podatak ne može izračunati (engl. *not computable*) zato što 16-znamenasta preciznost nije dovoljna.

Tablica 2. Usporedba broja točno izračunatih znamenaka broja π uz 16-znamenastu preciznost računanja.

n	Jedn. (32), $\alpha = 90^\circ$	Jedn. (34), $\alpha = 10^\circ$	Arhimed	Euler	Produkt	Ramanujan
1	0	2	2	0	0	7
2	1	3	2	0	0	15
3	2	4	2	0	0	n/c
4	2	5	4	0	0	n/c
5	3	5	4	0	1	n/c
6	4	5	5	0	1	n/c
7	5	6	5	1	1	n/c
8	5	7	6	1	1	n/c
9	5	7	7	1	1	n/c
10	6	8	7	1	1	n/c
11	7	8	8	1	1	n/c
12	7	7	8	1	1	n/c
13	8	7	9	1	1	n/c
14	9	7	10	1	1	n/c
15	9	6	10	1	1	n/c
16	9	6	11	1	1	n/c
17	8	4	12	1	1	n/c
18	6	4	12	1	1	n/c
19	6	3	13	1	2	n/c
20	6	4	13	1	2	n/c
21	4	3	14	1	2	n/c
22	4	2	14	1	2	n/c
23	3	2	15	2	2	n/c
24	3	2	15	2	2	n/c
25	2	0	15	2	2	n/c

Uočimo najprije prva dva stupca s rezultatima. Oni se odnose na (32), odnosno na (34). Korištenjem (32), uz 16-znamenkastu preciznost, nemoguće je izračunati više od 9 točnih znamenaka, kao što smo i predvidjeli u pogl. 5.1. Nakon 16. koraka računaska greška proširi se već na 9. znamenku, pa daljnje računanje nema smisla jer, kao što se u tablici vidi, rezultat nakon toga postaje sve lošiji. Jednostrani algoritam (34) u tom je pogledu još gori. On pod identičnim računskim uvjetima nikako ne može proizvesti više od 7 točnih znamenaka broja π .

Arhimedov algoritam, premda pripada istoj klasi po kriteriju brzine konvergencije, ima jedno superiorno svojstvo u odnosu na (32) i (34). S obzirom da u njemu uopće nema računске operacije oduzimanja, greška zaokruživanja korijena ne propagira, pa taj algoritam može potpuno iskoristiti dane računске kapacitete. Eulerova i produktna formula također nemaju problem propagacije greške, ali iznimno sporo konvergiraju.

Na kraju, recimo i to da postoji određeni broj algoritama koji u sebi sadrže binomne koeficijente, odnosno faktorijele [1-3]. Problem s njima proizlazi iz ekstremno brzog rasta funkcije faktorijela, tj. iz golemih vrijednosti faktorijela već i relativno malih brojeva. Primjerice, $10!$ iznosi čak 3.6288 milijuna.

Neke od takvih formula zahtijevaju zbog toga mnogo veću preciznost računanja nego što je postignuta preciznost pripadajućih procjena za π , a istodobno pokazuju razmjerno sporu konvergenciju. Ta dva momenta u kombinaciji čine algoritam praktično neupotrebljivim. Ramanujanove i Satove formule također sadrže faktorijele, ali zbog njihove ekstremno brze konvergencije to nije važno.

6. Zaključak

U ovom članku izveli smo formulu (32) za računanje sukcesivnih aproksimacija broja π , krenuvši od približnog izračunavanja površine kružnog isječka pomoću trokuta nasuprotnih središnjem kutu isječka, koji pak može imati proizvoljnu veličinu između 0 i π . Dokazali smo da algoritam konvergira kada broj izvođenja iteracija n teži u beskonačno. Također smo analizirali pripadajući računalni algoritam. Njegovo je dominantno svojstvo brza propagacija računске greške, čije je porijeklo u zaokruživanju korijena u uvjetima konačne točnosti. Kako ta greška propagira prema lijevo brzinom jednakom brzini izračunavanja točnih znamenaka prema desno, sama priroda algoritma (32) sprječava izračunavanje više točnih znamenaka od približno jedne polovice raspoloživih u danoj preciznosti računanja. Također, opće performanse u pogledu brzine konvergencije i sposobnosti izračunavanja točnih znamenaka našeg algoritma uspoređene su s performansama nekoliko poznatih i historijski važnih formula.

Literatura:

1. Weisstein, E.W., *Pi Formulas*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html> (15. listopada 2018.)
2. *Approximations of π* . From Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_of_%CF%80 (15. listopada 2018.)
3. Bailey, D.H., *A collection of mathematical formulas involving π* . <https://www.davidhbailey.com/dhbpapers/pi-formulas.pdf> (15. listopada 2018.)
4. Greenberg, R., *Pi and the great pyramid*. From the University of Washington, Department of Mathematics. <https://sites.math.washington.edu/~greenber/PiPyr.html> (15. listopada 2018.)
5. Bartlett, C., *The design of the great pyramid of Khufu*, Nexus Network Journal, Vol. 16 (2014), str. 299-311. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs00004-014-0193-9.pdf> (15. listopada 2018.)
6. Baruah, N.D., Berndt, D.C., Chan, H.H., *Ramanujan's series for $1/\pi$: A survey*, The American Mathematical Monthly, Aug.-Sept. 2009., str. 567-587. <https://faculty.math.illinois.edu/~berndt/articles/monthly567-587.pdf> (15. listopada 2018.)
7. Arras, K.A., *An introduction to error propagation*, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne. <http://www2.informatik.uni-freiburg.de/~arras/papers/arrasTR98.pdf> (15. listopada 2018.)
8. Kahan, W., *The Improbability of Probabilistic Error Analyses for Numerical Computations*. From the University of Berkley, EECS Department. <https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/improber.pdf> (30. listopada 2019.)
9. *Taylor's theorem*. From Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem (30. listopada 2019.)