Hamilton-Cayleyjev teorem za matrice reda 2

Ljiljana Arambašić[1]

Sažetak: Za proizvoljnu matricu reda 2 promatramo prostor generiran njenim potencijama $A^n, n \geq 0$ i pokušavamo odrediti dimenziju toga prostora. Rješavanjem ovog zadatka dolazimo do karakterističnog polinoma i Hamilton-Cayleyjevog teorema za matrice reda 2.

Ključne riječi: *linearna nezavisnost, matrice reda 2, Hamilton-Cayleyjev teorem*

Neka je M_n prostor svih kvadratnih matrica reda n s koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Za $A \in M_n$ definiramo polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

pri čemu je I jedinična matrica. Stupanj ovog polinoma je n i nazivamo ga *karakterističnim polinomom matrice A.*

Sljedeći teorem poznat je pod nazivom Hamilton-Cayleyjev teorem.

Teorem 1. Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi $k_A(A) = 0$.

Studenti studijskih programa na kojima se obrađuje linearna algebra (studiji matematike, fizike, tehnički studiji) upoznaju se s ovim teoremom kroz neki od matematičkih kolegija. Postoje razni dokazi ove tvrdnje (vidjeti Andreescu (2014.), Horvatić (2003.)).

Poznavajući Hamilton-Cayleyjev teorem lako možemo riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 1. Neka je $A \in M_2$ bilo koja matrica različita od nulmatrice. Označimo s W potprostor od M_2 razapet potencijama matrice A, dakle

$$W = \left[\{I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots\}\right],$$

pri čemu uglate zagrade označavaju skup svih linearnih kombinacija elemenata skupa $\{I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots\}$. Odredite dimenziju prostora W.

[1]Ljiljana Arambašić, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

Rješenje: Ako je A skalarna matrica, to jest matrica oblika λI za neki kompleksni broj λ, tada je $A^n = \lambda^n I$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\dim W = 1$. Neka A nije skalarna matrica. Tada je

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A,$$

pa iz $k_A(A) = 0$ slijedi

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I.$$

Ovu formulu možemo čitati i tako da se matrica A^2 može napisati kao linearna kombinacija matrica I i A. Odavde slijedi da su i sve ostale potencije od A također linearne kombinacije matrica I i A, na primjer

$$\begin{aligned} A^3 &= A\cdot A^2 = A((\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I) \\ &= (\operatorname{tr} A)\cdot A^2 - (\det A)\cdot A \\ &= (\operatorname{tr} A)\cdot((\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I) - (\det A)\cdot A, \\ &= \left((\operatorname{tr} A)^2 - \det A\right)\cdot A - (\operatorname{tr} A\cdot \det A)\cdot I. \end{aligned}$$

Istim postupkom tvrdnja slijedi za više potencije od A.

Prema tome, ako A nije skalarna matrica, tada je $\{I, A\}$ linearno nezavisan skup, a iz Hamilton-Cayleyjevog teorema slijedi da se sve matrice A^n, $n \geq 2$ mogu prikazati kao linearne kombinacije matrica I i A. Slijedi da je dim $W = 2$.

Međutim, ako nam nije poznat Hamilton-Cayleyjev teorem, prethodni zadatak i nije tako lagan. Zadatak sam postavila upravo takvoj grupi studenata, kao motivacijski zadatak za uvođenje karakterističnog polinoma i Hamilton-Cayleyjevog teorema.

Prvo što su studenti zaključili je da je $\dim W \leq 4$, jer je W potprostor četverodimenzijskog prostora M_2. Slučaj skalarne matrice lako je riješen. Odgovor koliko točno ta dimenzija iznosi za opći slučaj nije bio očit, pa smo stoga krenuli na primjere konkretnih matrica. Studenti su si sami zadali matricu reda 2 i računali prvih nekoliko njenih potencija. Evo nekih primjera.

Primjer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

U ovom slučaju lako se uoči veza $A^2 = 5A$, pa je $A^3 = 5A^2 = 25A$, te općenito $A^n = 5^{n-1}A$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Odavde vidimo da je

$$W = \left[\{I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots\}\right] = \left[\{I, A\}\right],$$

pa je $\dim W = 2$.

Primjer 2. Ako uzmemo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

tada je

$$A^2=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 8 & 13\end{bmatrix}.$$

Prije nego računamo više potencije od A, provjerit ćemo postoje li skalari α i β takvi da je $A^2=\alpha A+\beta I$. Direktni račun pokazuje da je $\alpha = 4$ i $\beta = 1$, dakle, $A^2=4A+I$. Tada je

$$\begin{aligned}A^3 &= A\cdot A^2 = A(4A+I)\\ &= 4A^2+A = 4(4A+I)+A\\ &= 17A+4I,\end{aligned}$$

a istim postupkom dobije se i da su A^4, A^5, ... linearne kombinacije I i A. Opet smo dobili da je

$$W=\left[\{I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots\}\right]=\left[\{I, A\}\right],$$

tj. $\dim W = 2$.

Primjer 3. Ako je

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},$$

dobivamo da je $A^2=4A+9I$, pa je opet $\dim W = 2$.

Nakon nekoliko izračunatih primjera vidimo da se u svim slučajevima A^2 može napisati kao linearna kombinacija matrica I i A. Kako bismo „napipali” opću formulu, dobivene veze napisali smo u sljedeću tablicu:

A	$A^2=\alpha A+\beta I$
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$	$5A$
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$	$4A+I$
$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$	$4A+9I$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$	$-4A+4I$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0

Koeficijenti α u drugom stupcu su redom $5, 4, 4, -4, 0,$ dok smo za koeficijente β dobili redom $0,\ 1,\ 9,\ 4,\ 0$. Dobivene koeficijente željeli bismo interpretirati u terminima matrice A.

Bilo mi je drago da su studenti vrlo brzo uočili kako navedeni brojevi imaju veze s tragovima i determinantama navedenih matrica. Zaista, tragovi i determinante ovih matrica su redom: $5, 4, 4, -4, 0$, odnosno, $0, -1, -9, -4, 0$. Prema tome, u prethodnim primjerima vrijedi da je

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I. \qquad (1)$$

Preostalo nam je provjeriti vrijedi li gornja formula općenito. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}(\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I &= (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{bmatrix} \\ &= A^2.\end{aligned}$$

Dakle, matrica A^2 uvijek je linearna kombinacija matrica I i A, a onda induktivno lako pokažemo da se i sve više potencije od A također mogu zapisati kao linearne kombinacije od I i A. Time smo pokazali da je $\dim W = 2$ ako A nije skalarna matrica (jer tada je $\{I, A\}$ linearno nezavisan skup), te da je $\dim W = 1$ u slučaju skalarne matrice.

Nakon ovog zadatka riješili smo još dva zadatka koji ilustriraju kako korištenjem (1) možemo olakšati neke račune.

Zadatak 2. Odredite formulu za inverz matrice $A \in M_2$ (u slučajevima kada inverz postoji).

Rješenje: Znamo da inverz postoji točno onda kada je $\det A \neq 0$.

Kako je

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)\cdot A - (\det A)\cdot I,$$

množenjem ove relacije s A^{-1} dobivamo

$$A = (\operatorname{tr} A)\cdot I - (\det A)\cdot A^{-1}.$$

Odavde je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((\operatorname{tr} A)\cdot I - A) = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

odredite koliko je

$$A^5 - 2A^4 - 6A^3 + 10A^2 - 4A + 17I$$

Rješenje: Mogli bismo računati direktno, ali nećemo tako. Označimo

$$p(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 - 4\lambda + 17.$$

Vrijedi

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - \lambda - 5.$$

Dijeljenjem polinoma dobijemo

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 5) + 32 - 11\lambda$$

za neki polinom q. Tada je i

$$p(A) = q(A)(A^2 - A - 5I) + 32I - 11A.$$

Kako je $A^2 - A - 5I = 0$, slijedi

$$p(A) = 32I - 11A = \begin{bmatrix} 10 & -33 \\ -11 & 43 \end{bmatrix}.$$

Vratimo se relaciji

(2) $$A^2 - (\operatorname{tr} A)\cdot A + (\det A)\cdot I = 0$$

koju smo provjerili za matrice reda 2. Neka su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ rješenja kvadratne jednadžbe

(3) $$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\cdot \lambda + \det A = 0.$$

Tada vrijedi $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$ a također iz (2) slijedi

(4) $$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0.$$

Ako je A skalarna matrica, tada je $\lambda_1 = \lambda_2$ i $A - \lambda_1 I = 0.$ Ako A nije skalarna matrica, zaključujemo da su obje matrice $A - \lambda_1 I$ i $A - \lambda_2 I$ singularne (nemaju inverznu matricu). Naime, ako bi postojala matrica $(A - \lambda_1 I)^{-1}$, tada bismo njome pomnožili (4) i dobili $A - \lambda_2 I = 0,$ što bi značilo da je A skalarna matrica. Isto ako bi postojao inverz od $A - \lambda_2 I.$

Sjetimo se da matrica ima inverz ako i samo ako je njena determinanta različita od 0. Prema tome, za ovako uvedene λ_1 i λ_2 vrijedi $\det(A - \lambda_1 I) = 0$ i $\det(A - \lambda_2 I) = 0$. Drugim riječima, λ_1 i λ_2 rješenja su jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{5}$$

Raspisivanjem lako vidimo da je

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A.$$

Ova jednakost ne vrijedi općenito za matrice višeg reda n jer će izraz na lijevoj strani biti polinom n-tog stupnja. Na primjer, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) \; ,$$

dok je

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 - 6\lambda + 6.$$

Poništava li navedena matrica A neki od ovih polinoma (kao što je to bio slučaj kod matrice reda 2)? Direktnim računom vidimo da je

$$A^2 - (\operatorname{tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I \neq 0,$$

ali da je

$$(I - A)(2I - A)(3I - A) = 0.$$

To nam govori da bi i općenito, za matrice A proizvoljnog reda n, za polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

moglo vrijediti $k_A(A) = 0.$ To je upravo Hamilton-Cayleyjev teorem za matrice reda n, čiji dokaz ovdje nećemo navoditi.

Kolegij linearne algebre studenti slušaju na početku svoga studija i najčešće je to prvi susret s „apstraktnom matematikom". Upravo zato neki studenti na početku imaju problema s razumijevanjem nekih dijelova ovog kolegija. Ovim sam primjerom htjela pokazati kako čak i na takvom kolegiju studenti ne moraju nužno biti pasivni slušatelji, već ih se može navesti da i sami sudjeluju u formiranju za njih zahtjevnih teorema poput Hamilton-Cayleyjevog. Svjesna sam da ovaj način rada zahtijeva dosta vremena, a količina gradiva i vrijeme predviđeno za nastavu na kolegijima obično to ne dopuštaju. Ipak, s obzirom na pozitivne reakcije studenata na ovakav pristup, smatram da u svom poučavanju trebamo iskoristiti svaku priliku koja nam se ukaže da primijenimo učenje istraživanjem. Naročito to smatram važnim za studente nastavničkih smjerova matematike jer će se i oni sami uskoro naći u ulozi nastavnika.

Literatura:

1. Andreescu, T. *Essential Linear Algebra with Applications – A Problem-Solving Approach*, Birkhäuser Basel, 2014.
2. Horvatić, K. *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.