

IZ NASTAVNE PRAKSE

Vjerojatnost i statistika – zašto, kada, kako?¹

SANJA LOPARIĆ²

Ključne riječi: statistika, vjerojatnost, razredna nastava

“If the understanding of number, measure, and probability is judged crucial in the pursuit of science, then instruction in these subjects should begin as intellectually honestly and as early as possible in a manner consistent with the child’s forms of thought.” (BRUNER, 1960.)

Uvod

Dugi niz godina u hrvatskom se obrazovnom sustavu premalo pažnje pridavalo učenju vjerojatnosti i statistike. Ovaj dio matematike koji čini svakodnevicu svih građana godinama je bio zapostavljen. Ipak, u posljednje vrijeme sve se češće govori o poučavanju statistike i vjerojatnosti u sklopu nastave matematike.

NOK je 2010. godine kao dio matematike predvidio koncept *Podatci* koji se proučava od 1. obrazovnog ciklusa. U prijedlogu novog Kurikuluma matematike, koji je izrađen u sklopu Cjelovite kurikularne reforme, postoji domena *Podatci, statistika i vjerojatnost*. Ova domena proteže se kroz sve cikluse obrazovanja i povezana je s ostalim domenama matematike. Uvođenjem novih kurikuluma u nastavu matematike postavlja se pitanje kako, kada i zašto poučavati vjerojatnost i statistiku.

Vjerojatnost i statistika

Matematika je egzaktna znanost koja se kroz povijest razvijala u skladu s razvojem čovječanstva. Stoga i ne čudi da su se među prvim granama razvile algebra i geometrija, dok je u novije vrijeme sve veća važnost primijenjenih grana, među kojima su i vjerojatnost i statistika. Iako vjerojatnost i statistika nisu potpuno egzaktna, te u potpunosti ne podržavaju strogu aksiomatsku strukturu matematike, našle su svoje mjesto unutar matematike.

¹Predavanje održano na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu

²Sanja Loparić, Tehnička škola Čakovec, Čakovec

„Statistika se kao znanstvena disciplina bavi razvojem metoda prikupljanja, opisanja i analiziranja podataka te primjenom tih metoda u procesu donošenja zaključaka na temelju prikupljenih podataka. Uporaba riječi statistika u svakodnevnom životu najčešće je povezana s brojčanim vrijednostima kojima pokušavamo opisati bitne karakteristike nekog skupa podataka” (Benšić, Šuvak, 2014.). „Vjerojatnost je pojam povezan s predviđanjem i analizom slučajnih pojava. Pojam vjerojatnosti nastao je u pokušaju brojčanog izražavanja stupnja vjerovanja da će se dogoditi neki zamišljeni događaj” (Benšić, Šuvak, 2014.).

Vjerojatnost i statistika usko su povezane. Teorija vjerojatnosti matematički je temelj statistike pa se ove dvije grane matematike često zajedno poučavaju te primjenjuju u raznim područjima fizike, tehnike, biologije, ekonomije, medicine i drugdje.

Poučavanje vjerojatnosti i statistike u Hrvatskoj

U Hrvatskoj se statistika i vjerojatnost prvi put uvode u Nastavni plan i program iz 2006. godine kroz teme *Prikazivanje i analiza podataka* i *Vjerojatnost slučajnog događanja* u sedmom razredu osnovne škole. Nažalost, uvođenje ovih dviju tema u jednom trenutku matematičkog obrazovanja nije bilo dovoljno da bi dovelo do dubljeg razumijevanja vjerojatnosti i statistike.

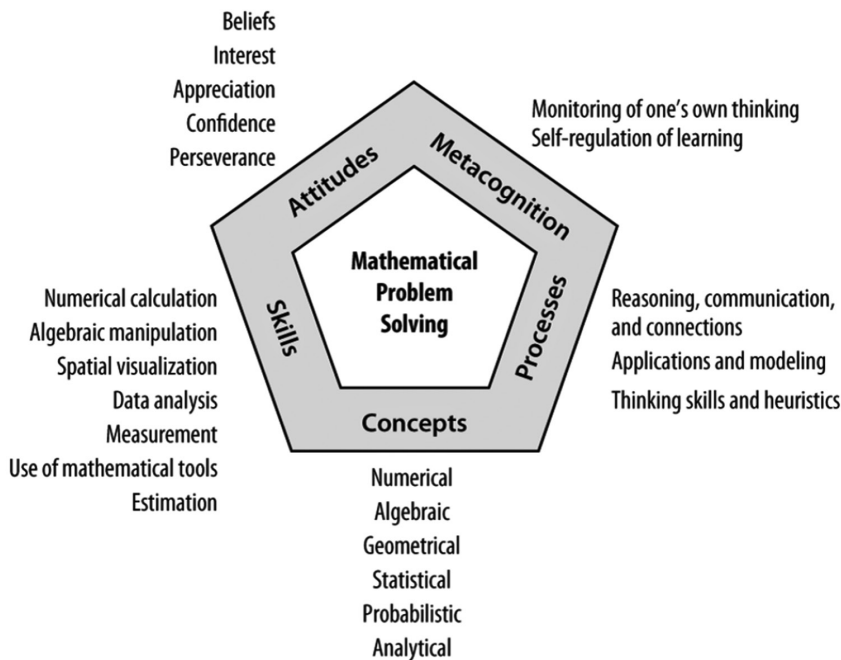
Drugi pokušaj uvođenja statistike i vjerojatnosti u nastavu matematike bio je u sklopu Nacionalnog okvirnog kurikulumu (MZOS, 2011.). Tada su statistika i vjerojatnost uvrštene kao teme u sve cikluse obrazovanja u sklopu matematičkog koncepta *Podatci*. Učenici se tako prema NOK-u sa sadržajima iz statistike i vjerojatnosti susreću već u prvom ciklusu (1., 2., 3. i 4. razred osnovne škole), a kao obrazovna postignuća koja bi učenici trebali postići iz područja *Podatci* su: „prikupiti, razvrstati i organizirati podatke koji proizlaze iz svakodnevnoga života te ih prikazati jednostavnim tablicama, piktogramima (slikovnim dijagramima) i stupčastim dijagramima, pročitati i protumačiti podatke prikazane jednostavnim tablicama, piktogramima i stupčastim dijagramima, prebrojiti različite ishode u jednostavnim situacijama rabeći stvarne materijale i dijagrame, primjenjivati osnovni jezik vjerojatnosti (ishod, moguć, nemoguć, siguran, slučajan, vjerojatan, pravedna igra, nepravedna igra i slično), usporediti vjerojatnosti ishoda (manje vjerojatan, jednako vjerojatan, vjerojataniji)” (MZOS, 2011., str.118). Nažalost, većina udžbenika za razrednu nastavu matematike pisana je prema HNOSU (Hrvatski nacionalni obrazovni standard) iz 2006. godine te ne uključuje sadržaje vjerojatnosti i statistike, stoga je na nastavnicima da sami osmisle kako i kada uvoditi ove teme.

U sklopu Cjelovite kurikularne reforme (CKR) izrađen je Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta matematike (MZOS, 2016.b). U njemu se kao jedna od pet domena nalazi i domena *Podatci, statistika i vjerojatnost*. „Domena Podatci, statistika i vjerojatnost bavi se prikupljanjem, razvrstavanjem, obradom, analizom i prikazivanjem podataka u pogodnome obliku. Podatke dane grafičkim ili nekim drugim prikazom

treba znati očitati te ih ispravno protumačiti i upotrijebiti. Sve se to postiže koristeći se jezikom statistike.” (MZOS, 2016.a. str. 8). Tako bi, prema CKR, u prvom razredu u domeni *Podatci, statistika i vjerojatnost*, koja zauzima 7.14 % od ukupnog fonda sati, ishod koji bi učenici trebali ostvariti bio služiti se podacima i prikazivati ih piktogramima i jednostavnim tablicama. U drugom razredu ista domena zauzima 11.11 %, a ishodi učenja bili bi koristiti se podacima iz neposredne okoline i odrediti je li neki događaj moguć ili nemoguć. U trećem razredu domena *Podatci, statistika i vjerojatnost* zauzima 6.67 % nastave matematike, a učenici bi se trebali moći služiti različitim prikazima podataka. U četvrtom razredu je zastupljenost domene *Podatci, statistika i vjerojatnost* 7.69 %, a ishodi učenja su provođenje jednostavnih istraživanja i analiziranje dobivenih podataka te opisivanje vjerojatnosti događanja (MZOS, 2016.a. str.11-51).

Pučavanje vjerojatnosti i statistike u svijetu

U posljednje vrijeme kvaliteta matematičkog obrazovanje neke zemlje procjenjuje se na osnovi rezultata učenika u testiranjima PISA (*Programme for International Student Assessment*) i TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*). PISA više od trećinu svojih zadataka iz područja matematičke pismenosti pridaje području podataka, statistike i vjerojatnosti (Glasnović Gracin, 2016.). Stoga ne čudi da naši učenici u tim istraživanjima postižu osrednje rezultate, dok najbolje rezultate postižu učenici iz Singapura, Hong Konga, Koreje, Japana... odnosno država koje poučavaju sadržaje iz vjerojatnosti i statistike od najranijih dana.



Slika 1. Struktura kurikuluma matematike u Singapuru

Singapurski kurikulum matematike napravljen je u spiralnom obliku gdje se isti koncepti i vještine protežu kroz sve godine učenja. Kao koncepti od 1. su razreda navedene statistika i vjerojatnost. Učenici se najprije upoznaju s tablicama i grafičkim prikazima podataka te ih koriste za rješavanje problema. Određuju i prosjeke, dok se nakon 6. razreda bave interpretacijom i analizom različitih statističkih prikaza te određivanjem vjerojatnosti.

U Hong Kongu se početna matematika uči u sklopu općih vještina primjenjivih u različitim životnim situacijama. Kao važna sadržajna domena navodi se *Upravljanje podatcima (Data handling)* u koju je uključena statistika, a od 6. razreda i vjerojatnost.

I kurikulum početne nastave matematike u Koreji je sličan prethodnima. Matematičko obrazovanje započinje poučavanjem statistike, a u 6. razredu i vjerojatnosti.

U Japanu u prvih šest razreda nema istaknute cjeline Vjerojatnost i statistika, ali se neke teme iz tog područja obrađuju unutar *Matematičkih odnosa*, dok se u 8. razredu vjerojatnost i statistika obrađuju unutar cjeline *Korištenje podataka (Making Use of Data)*³.

Učenje vjerojatnosti

Iz pregleda kurikuluma početne nastave matematike u nekim zemljama može se uočiti da se sadržaji iz statistike obrađuju relativno rano, uglavnom od 1. razreda, dok se vjerojatnost poučava puno kasnije. Ima li potrebe za odgađanje poučavanja vjerojatnosti? Istraživanje koje je provedeno u Sloveniji (Hodnik, 2011.) pokazalo je da djeca mogu osnovne pojmove iz vjerojatnosti (siguran, moguć, vjerojatan i nemoguć događaj) usvojiti već u 1. razredu osnovne škole. Iako je po Piagetu to doba dječjeg razvoja nepogodno za poučavanje vjerojatnosti, novija su istraživanja (Goldberg, 1966., Andrew, 2009., Gurbuz, 2010.) pokazala važnost poučavanja vjerojatnosti od 1. razreda. Pri tome je veliki naglasak na iskustvenom učenju. Andrew (2010.) je dokazao da su rezultati učenja bolji kod učenika koji su učili vjerojatnost eksperimentiranjem na konkretnim materijalima u odnosu na učenike koji su koristili formule.

Polaki (2002.) navodi četiri stadija učenja vjerojatnosti:

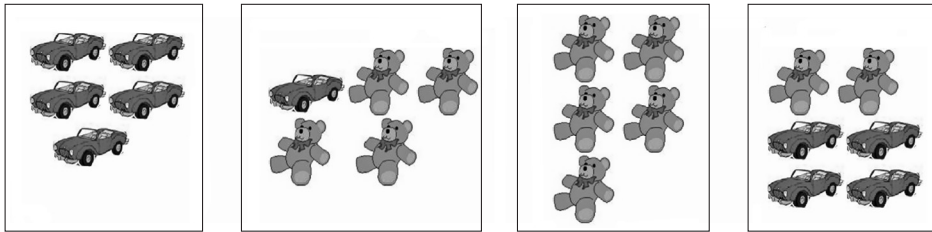
1. stadij – subjektivni – kada učenici predviđaju najvjerojatniji i najmanje vjerojatan događaj na temelju njihovih subjektivnih doživljaja (npr. od 4 crvene i 1 bijele kuglice najvjerojatnije će biti izvučena crvena jer im je to najdraža boja)
2. stadij – predviđaju se najvjerojatniji i najmanje vjerojatan događaj (vjerojatnije će biti izvučena crvena)
3. stadij – učenici točno predviđaju vjerojatnije događaje i upotrebljavaju brojeve (npr. od 4 crvene i 1 bijele kuglice vjerojatnije će biti izvučena crvena jer je $4 > 1$)

³IEA TIMSS&PIRLS International Study Center <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/countries/>

4. stadij – određuje se točna vjerojatnost događaja (vjerojatnost da se izvuče crvena je $\frac{4}{5}$, a bijela $\frac{1}{5}$).

Upravo prolazak kroz te stadije može dovesti do potpunog razumijevanja vjerojatnosti. Stoga je dobro već od 1. razreda učenicima postavljati pitanja: Je li moguće da iz ispita dobiješ 6? A 3? Može li se iz skupa od 10 jabuka odabrati kruška? A od 10 jabuka i 10 krušaka? ... Ova pitanja posebno su pogodna kod uvođenja pojma skupa, prebrojavanja elemenata skupa, uspoređivanja skupova te kod obrade pojmova manje-veće-jednako, viši-niži-jednako visok i sl. U tu svrhu potrebno je pripremiti konkretni materijal: bojice, igračke, kocku s istaknutim brojevima ili obojenu raznim bojama, kolo sreće, bombone, voće i sl.

Na slici je dan primjer s četiri kutije kod kojih eksperimentiranjem učenici mogu uočiti koji su događaji mogući, a koji nisu. Iste ove kutije s igračkama mogu se upotrijebiti u 2. 3. i 4. razredu, ali s različitim pitanjima: Koji su događaji vjerojatniji? Kolika je vjerojatnost da izvučemo medvjedića iz svake od navedenih kutija?...



Slika 2. Kutije s igračkama

Na kraju 4. razreda učenici bi trebali upotrebljavati pojmove siguran, vjerojatan, moguć i nemoguć događaj te određivati događaje koji su vjerojatniji i manje vjerojatni. Također bi trebali izražavati vjerojatnost nekog događaja u obliku 1 od 5, 4 od 5 i sl.

Učenje statistike

„Za nastavu statistike važne su sljedeće predmatematičke vještine: razvrstavanje predmeta prema određenom obilježju, uspoređivanje, nizanje i održavanje redosljedja te orijentiranje u ravnini” (Glasnović Gracin, 2016.). Razvrstavanje predmeta prema određenom obilježju kasnije će učenicima poslužiti kao pomoć u prikupljanju podataka, formiranju tablica te razlučivanju bitnog od nebitnog i pri čitanju podataka. Uspoređivanje predmeta po veličini odnosi se na pronalaženje odnosa između dvaju ili više predmeta; primjerice odnosi između veličina (više, niže, dulje, kraće...). Ove aktivnosti temelj su za kasnije očitavanje i tumačenje raznih vrsta grafikona kao što su stupčasti ili slikovni dijagrami. Nizanje i održavanje redosljedja odnosi se na aktivnosti prepoznavanja jednostavnih uzoraka. Orijentiranje u ravnini odnosi se na

uočavanje položaja predmeta u ravnini i odnosa između tih predmeta. Aktivnosti obuhvaćaju snalaženje tipa gore-dolje, ispred-iza, unutar-izvan, lijevo-desno... (Glasnović Gracin, 2016.).

Nastava statistike provodi se u sklopu nastave matematike u većini zemalja svijeta, i to uglavnom kroz eksperimente koji su u korelaciji s prirodom i društvom te drugim predmetima ili područjima. Tako učenici već od 1. razreda mogu voditi evidenciju ponašanja pomoću smješka (u tjednu, mjesecu...) te, slažući ih u redove ili stupce, pratiti vrijednosti. Kasnije mogu određivati i mod, raspon varijacije, prosjek, ali ne preko definicija već odgovarajući na pitanja: Tko ima najviše smješka? Koliko? Tko ima najmanje smješka? Koliko? Kolika je razlika između broja smješka kod „najboljeg” i „najgoreg” učenika? Koliko se smješka najčešće pojavljuje? ... Za formiranje razne vrste grafičkih dijagrama pogodni su i m&m bomboni. Oni se mogu jednostavno posložiti u stupce ili rasporediti u dijelove kruga kako bi učenici mogli


























Slika 3. Izrada grafikona stupaca pomoću bombona

u stupce, povezati broj bombona s visinom stupca kod grafikona sa stupcima (slika 3.) ili površinom kružnog isječka kod kružnih grafikona.

Nakon što nauče samostalno kreirati tablice i dijagrame, važno je pravilno iščitati i interpretirati podatke koji su prikazani tablicama i dijagramima. Potrebno je zadati tablicu s podacima iz koje učenici iščitavaju određene vrijednosti. Pri tome je važno naučiti određivati raspon varijacije, mod, a u 4. razredu i prosjek (u slučajevima kad je prirodan broj). Jednako se može napraviti i na temelju raznih vrsta dijagrama.

U razrednoj nastavi često se za grafičko predočavanje upotrebljavaju piktogrami. Učenici bi trebali naučiti prikazivati podatke slikovno i čitati piktograme. Čitanje ovakvih grafičkih prikaza posebno je pogodno za uvježbavanje tablice množenja. Na slici 4. prikazan je piktogram pomoću kojega učenici mogu uvježbavati množenje brojem 5.

Jedan  predstavlja 5 auta.

Ponedjeljak	   
Utorak	       
Srijeda	     
Četvrtak	    

Slika 4. Primjer piktograma

Prilikom učenja statistike u razrednoj nastavi nužna je korelacija matematike i nekih drugih predmeta pa se sadržaji iz vjerojatnosti i statistike mogu raditi na satovima prirode i društva, likovnog, hrvatskog, a osobito su pogodni za satove razrednika.

Zaključak

S razvojem tehnologije mijenjaju se potrebe za znanjima koje će buduće generacije trebati u životu. Statistika i vjerojatnost među najnužnijim su područjima poznavanja matematike. Nastava statistike i vjerojatnosti pomaže učenicima u prikupljanju podataka, organizaciji, interpretiranju, uspoređivanju podataka i donošenju zaključka. Potiče logičko zaključivanje koje nužno za kritičku analizu i ispitivanje točnosti podataka. Stoga je važno upoznati učenike s osnovama vjerojatnosti i statistike već od 1. razreda osnovne škole, ali kroz konkretne primjere kako bi se učenicima približilo ovo područje na njima primjeren način. Također je važno da učenici znaju verbalizirati zaključke do kojih su došli eksperimentirajući i proučavajući ovo područje.

Literatura:

1. Andrew, L. (2009.). *Experimental probability in elementary school*. Teaching Statistics, 31 (2), 34–36
2. Benšić, M., Šuvak, N. (2014.). *Uvod u vjerojatnost i statistiku*. Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku
3. Bruner, J. S. (1960.). *The Process of education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press
4. Glasnović Gracin, D. (2016.). *Uvođenje statistike u početno učenje matematike*. Zrno, 122-123
5. Goldberg, S. (1966.). *Probability judgements by preschool children: Task conditions and performance*. Child Development, 37 (1), 157–167
6. Gürbüz, R., Catlioglu, H., Bîrgîn, O., & Erdem, E. (2010.). *An investigation of fifth grade students' conceptual development of probability through activity based instruction: A quasi-experimental study*. Educational Sciences: Theory & Practice, 10 (2), 1053–1069
7. Hodnik Čadež, H., Škrbec, M., (2011.), *Understanding the Concepts in Probability of Pre-School and Early School Children*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 263-279.
8. MZOS (2006.). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. http://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf (28. 6. 2018.)
9. MZOS (2011.). *Nacionalni okvirni kurikulum*. http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (28. 6. 2018.)
10. MZOS (2016.a). *Nacionalni dokument matematičkog područja kurikuluma – Prijedlog*. <http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/02/MAT-PODRUCJE-18.2-FINAL-pdf.pdf> (28. 6. 2018.)
11. MZOS (2016.b). *Nacionalni kurikulum nastavnoga predmeta Matematika – Prijedlog*. <http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Matematika.pdf> (28. 6. 2018.)
12. Polaki, M. V. (2002.). *Using instruction to identify key features of basotho elementary students' growth in probabilistic thinking*. Mathematical Thinking and Learning, 4(4), 285- 313.