

Različiti načini rješavanja jednog zadatka ili matematičko zbogom generaciji

BRANKA GOTOVAC¹

Uvod

Na zadnjem predavanju jedne akademske godine, studentima prve godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu dan je zadatak koji je trebalo riješiti na što više načina. Zadatci ovog tipa pogodni su za ponavljanje i povezivanje različitih nastavnih sadržaja. Studenti su popunili i kratki upitnik te iskazali mišljenje o ovakvim zadacima s kojima su se neki od njih susreli već ranije u nastavi matematike. Ispitivanje je bilo u potpunosti anonimno. Studenti su bili motivirani i vrlo mu odgovorno pristupili.

Uz analizu upitnika u radu se navodi nekoliko načina rješavanja ovog zadatka koje u principu studenti nisu ni provodili. Neki se od ovih pristupa ne obrađuju u srednjoj školi. Ipak, može se očekivati da učenik na svoj način upita kako bi se odredila površina pseudolika u ravnini. U protivnom, bilo bi dobro da nastavnik potakne to pitanje.

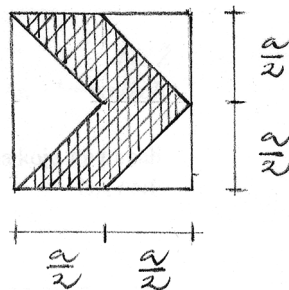
Studenti su istaknuli mnoge prednosti zadataka ove skupine čiju je ljepotu i pedagošku vrijednost ilustrirao zadatak koji su rješavali.

Nekoliko načina rješavanja zadatka

Studentima je bio zadan sljedeći zadatak:

Na što više načina odrediti površinu šrafiranog lika (Slika 1.)

Igrajući se raznim likovima, studenti su traženu površinu uglavnom računali primjenjujući osnovne matematičke operacije i dobro poznate „pučkoškolske” izraze za površinu. Nitko od studenata nije riješio zadatak koristeći se npr. izrazom za površinu trokuta s vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ili koristeći se vektorskim umnoškom (gradivo kolegija Matematika 1 iz prvog semestra). Iako se ne tako davno obrađivala primjena jednostrukog, odnosno dvostrukog integrala na računanje površine lika u ravnini, samo je nekolicina studenata koristila integral, i to ne sasvim uspješno.



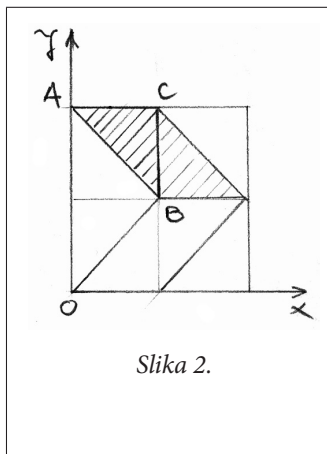
Slika 1.

¹Branka Gotovac, Kemijsko-tehnološki fakultet, Sveučilište u Splitu

U nastavku je dano nekoliko načina rješavanja ovog zadatka koje, kako je već rečeno, studenti gotovo da i nisu koristili. Ovdje treba napomenuti da smo kod računanja površine pomoću jednostrukog integrala kao varijablu integracije mogli uzeti i varijablu y . Naravno, tu su i podvarijante ovih načina rješavanja obzirom da odabir elemenata za određivanje površine nije jednoznačan (primjerice u 2. slučaju mogli smo uzeti da je vektor $\vec{b} = -\frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j}$).

Ne možemo ne primijetiti kako se lako otvara prostor za diskusiju sa studentima/učenicima. Površinu traženog lika odredimo:

- **koristeći se izrazom za površinu trokuta s vrhovima** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

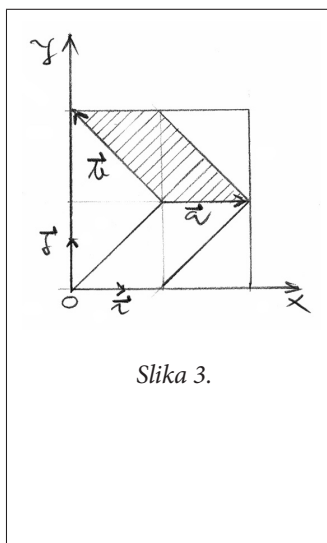


Tražena površina je $P = 4P_t$, gdje je P_t površina trokuta

s vrhovima $A(0, a), B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), C\left(\frac{a}{2}, a\right)$ (Slika 2.).

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{2} \cdot \left| 0\left(\frac{a}{2} - a\right) + \frac{a}{2}(a - a) + \frac{a}{2}\left(0 - \frac{a}{2}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{a^2}{4} \right| = \frac{a^2}{8} \\ P &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

- **koristeći se vektorskim umnoškom**



Tražena površina je $P = 2P_p$, gdje je P_p površina paralelograma razapetog vektorima \vec{a} i \vec{b} (Slika 3.).

$$\begin{aligned} P_p &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \vec{a} &= \frac{a}{2}\vec{i}, \quad \vec{b} = -\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{a^2}{4}$$

$$P = \frac{a^2}{2}$$

- koristeći se integralom

jednostruki integral

Tražena površina je $P = 2P_p$, gdje je P_p površina šrafiranog paralelograma (Slika 4.).

$$P_p = \int_0^{\frac{a}{2}} [a - (-x + a)] dx + \int_{\frac{a}{2}}^a \left[\left(-x + \frac{3}{2}a\right) - \frac{a}{2} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{a}{2}} + \left(-\frac{x^2}{2} + ax \right) \Big|_{\frac{a}{2}}^a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} + \left(-\frac{a^2}{2} + a^2 \right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{a^2}{4}$$

$$P = \frac{a^2}{2}$$

dvostruki integral (integriranje u redosljedu yx)

Tražena površina je $P = 2P_p$, gdje je P_p površina šrafiranog paralelograma (Slika 4.).

$$P_p = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-x+a}^a dy + \int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_{\frac{a}{2}}^{-x+\frac{3}{2}a} dy$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} dx \cdot y \Big|_{-x+a}^a + \int_{\frac{a}{2}}^a dx \cdot y \Big|_{\frac{a}{2}}^{-x+\frac{3}{2}a}$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} x dx + \int_{\frac{a}{2}}^a (-x+a) dx$$

	$= \frac{x^2}{2} \Big _0^{\frac{a}{2}} + \left(-\frac{x^2}{2} + ax \right) \Big _{\frac{a}{2}}^a = \dots = \frac{a^2}{4}$ $P = \frac{a^2}{2}$
	<p>dvostruki integral (integriranje u redoslijedu xy)</p> <p>Tražena površina je $P = 2P_p$, gdje je P_p površina šrafiranog paralelograma (Slika 4).</p> $P_p = \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_{-y+a}^{-y+\frac{3}{2}a} dx = \int_{\frac{a}{2}}^a dy \cdot x \Big _{-y+a}^{-y+\frac{3}{2}a}$ $= \int_{\frac{a}{2}}^a dy \left(-y + \frac{3}{2}a + y - a \right) = \frac{a}{2} \cdot y \Big _{\frac{a}{2}}^a$ $= \frac{a}{2} \left(a - \frac{a}{2} \right) = \frac{a^2}{4}$ $P = \frac{a^2}{2}$

Analiza upitnika

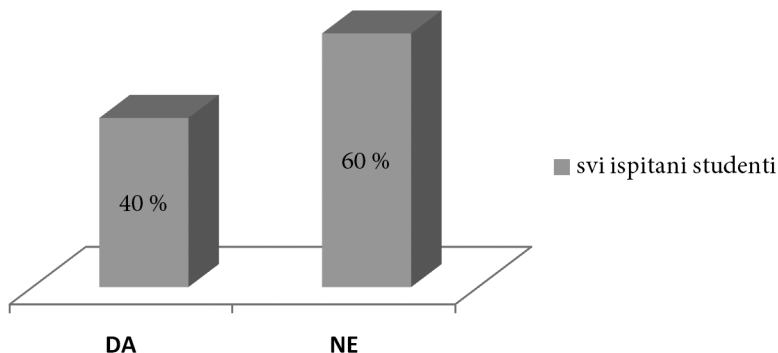
Upitnik koji su studenti popunili i priložili zajedno s rješenjima zadatka sadržavao je jedno pitanje alternativnog izbora i jedno otvoreno pitanje:

- Jeste li se tijekom školovanja u nastavi matematike već susreli sa zadacima koje ste trebali riješiti na što više načina? (Zaokružite.) DA / NE
- Što mislite o takvim zadacima?

Prikupljeni su i podaci o srednjoj školi koju su studenti završili.

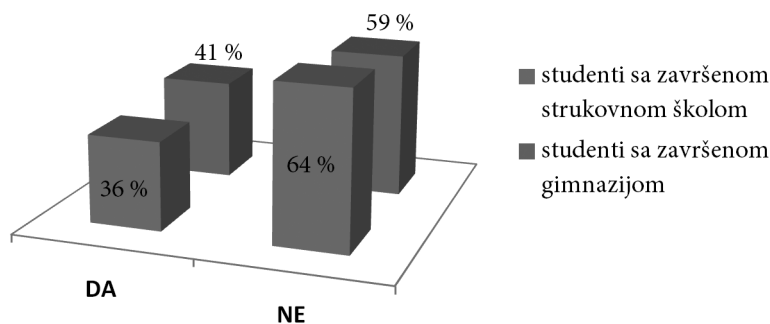
Prema dobivenim podacima, 34 ispitanika završilo je gimnaziju, a 11 strukovnu školu. Njih 18 (40 %) već se s ovakvim zadacima susrelo u nastavi matematike (Slika 5.). Slična je razdioba prema završenoj srednjoj školi ispitanika (Slika 6.).

Jeste li se tijekom školovanja u nastavi matematike već susreli sa zadacima koje ste trebali riješiti na što više načina?



Slika 5.

Jeste li se tijekom školovanja u nastavi matematike već susreli sa zadacima koje ste trebali riješiti na što više načina?



Slika 6.

Što studenti misle o ovakvim zadacima?

Nekim studentima ovakvi su zadatci **interesantni** i draži od uobičajenih, rutinskih zadataka.

Zanimljivi su i draži su mi od šablonskog rješavanja.

Više ispitanika ističe korisnost ovakvih zadataka i drugdje, izvan matematike.

*Takvi su zadatci **korisni**, ne samo u matematici...*

i **treba ih češće**, kako neki sugeriraju, **primjenjivati** u nastavi.

...Ovakav tip zadataka trebao bi se više uvesti u program i srednjih škola i studija. Nažalost, kod ovih zadataka često se susrećemo s problemom jer kada su studentima

ili učenicima „odriješene ruke”, ne znaju odakle početi, kako postaviti zadatak, u glavi nastaje blokada.

Taj bi problem vjerojatno bio manje izražen kada bi se studenti/učenici češće susretali s takvim zadacima, a sama spoznaja o takvim zadacima (riješiti na što više načina) neke bi od njih možda i potaknula da samoinicijativno razmišljaju o tome kako bi se sve mogao riješiti neki zadatak.

Više od trećine studenata uviđa da bi se ovakvi zadatci mogli **upotrijebiti za ponavljanje**, odnosno za **sistematizaciju nastavnog gradiva**.

...služe za ponavljanje i sažimanje naučenog gradiva.

...jako je dobar način za povezivanje sveukupno naučenog gradiva u cjelinu...

...potiču učenike da razmišljaju izvan gradiva koje se obrađuje točno to polugodište/godinu.

Mislim da su takvi zadatci vrlo korisni kako bi nas potakli na razmišljanje i povezivanje sveg stečenog znanja jer ako to ne naučimo, ispada kao da smo gubili vrijeme svih ovih godina školovanja. Najlakše je nešto naučiti napamet, ali to nije znanje. Zato iskreno mislim da su ovi zadatci prijeko potrebni u svim obrazovnim ustanovama.

I kako podvlači jedan od studenata, na taj način bi se nastavno gradivo i dulje pamtilo.

Mislim da je to jako dobar način za povezivanje sveukupno naučenog gradiva u cjelinu. Često se događa da studenti nakon prolaza zaborave gradivo i ne znaju ga više primijeniti, a na ovaj način to bi se dalo znatno smanjiti.

Zadaci ovoga tipa korisni su **studentima/učenicima za samoprocjenu** usvojenog znanja (jedan student eksplicite ističe da zahtijevaju veće znanje), a **nastavnicima pružaju uvid** u znanje i način razmišljanja studenata/učenika.

Mislim da su dobar način za samoprocjenu usvojenog znanja...

Ovakvi zadatci mogu dobro poslužiti profesorima da imaju bolji uvid u učeničko matematičko razmišljanje.

Dvije trećine studenata smatra da zadatci poput ovoga **potiču na razmišljanje i razvijanje vlastitih mogućnosti**.

...Ovakvi zadatci pobuđuju maštu, tj. potiču nas na razmišljanje, što je jako dobro zato jer u današnje vrijeme studenti razmišljaju sve manje i manje, a zadatak rješavaju automatski, bez da malo promisle...

Mislim da su jako korisni zato što se „razbija” monotonija u učenju. Student treba razmišljati svojom glavom, a pomoću tih zadataka upravo se to razvija.

Mislim da takvi zadatci potiču na razmišljanje i pokazuju kako se neki jednostavni zadatci, za koje su tehnike rješavanja davno svladane, mogu riješiti i primjenom

novostečenog znanja. Tako nam se približava novo gradivo i dokazuje opravdanost korištenja tehnika koje se na složenijim primjerima čine apstraktne.

Iz potonjeg je jasno da nastavnik treba, kad god je to moguće, stvoriti takvo okruženje koje će studentima/učenicima omogućiti povezivanje novog nastavnog gradiva sa starim, poznatim, i novo znanje nadograđivati na postojeće. Ujedno je to i prilika da se postojeće znanje, ako je potrebno, restrukturira.

Evo što još studenti misle o ovakvim zadacima.

...dobro je zbog toga što možda student neće znati riješiti na način kao profesor pa će upotrijebiti način koji je njemu poznatiji i lakši.

...Pomaže i onim lošijim studentima da pokažu što znaju (bez obzira na koji način) i da sami sebe motiviraju za rad...

Prema ovim i sličnim komentarima, ima ih nekoliko, razvidno je da nastavnik treba tražiti način kako bi svi studenti/učenici uvijek mogli pokazati barem neko znanje, suptilno ih tako motivirajući za daljnje učenje i rad.

Generalno gledano, studenti su zamijetili mnoge prednosti zadataka ovog tipa. Negativnih komentara nije bilo, mada je jedan student napisao da je *zapanjen* zadatkom. Nažalost, bez obrazloženja, pa ne znamo je li u pozitivnom ili negativnom smislu, tako da o razlozima njegova doživljaja možemo samo nagađati. Očito je da studenti nisu bili ravnodušni prema ovom zadatku.

S obzirom da su zadatci studentima u principu zanimljivi, korisni i motivirajući, te su, kako kaže jedan od studenata,

...potencijalno dobar način kako zainteresirati ili bar potaknuti na razmišljanje o matematici na drugačiji način,

za očekivati je da ovakvi zadatci imaju utjecaja na poboljšanje paradigme koju studenti imaju o matematici.

Završna pedagoška crtica

Ovo je ispitivanje provedeno na zadnjem predavanju u ljetnom semestru. Nakon što su uradci studenata prikupljeni kako bi se pregledali i analizirali (informacije o rezultatima i sl. studenti su mogli dobiti u vrijeme konzultacija), potaknuta je diskusija koja se razvijala nizom pitanja: Kako ste rješavali ovaj zadatak? Jeste li primjenjivali još koji način? Je li netko riješio zadatak koristeći se npr. vektorskim umnoškom? Ako nije, kako bi se to moglo napraviti? (Autorica je pripremila i nekoliko slideova s različitim pristupima rješavanja ovog zadatka za koje se ispostavilo da ih studenti uglavnom nisu primjenjivali.) ... Jesmo li iscrpili sve moguće načine rješavanja zadatka? Što smo sve ponovili rješavajući zadatak?



Slika 7.

Po završetku diskusije, studenti su upitani jesu li negdje već zapazili lik čiju su površinu računali. Čini se da nisu naslutili „porijeklo” ovog zadatka jer ih je iznenadio prateći slide. Studentima je pokazana fotografija s pločom za označavanje oštrog zavoja na cesti (Slika 7.).

Ima situacija koje nas iznenade i inspiriraju, kao autoricu ova. Nadahnuće je bilo gotovo opipljivo, trebalo je samo posegnuti za njim:

Ovaj znak često susrećemo na putu, baš kao i izazove od kojih je satkan život. Možda bude podsjetnik na jedan zadatak i više načina na koji je riješen, poticaj i ohrabrenje za traženje i ustrajnost u iznalaženju različitih putova do rješenja kako biste mogli odabrati najpovoljniji.

Nastava kojoj nastojimo dati dublji smisao može obogatiti naše studente/učeničke i pridonijeti razvoju cjelokupnosti njihova bića.

Dodatak

U dodatku navedimo neke od radova na ovu temu:

1. Bjelanović Dijanić, Ž.: *Jedan zadatak – više rješenja*, Matematika i škola, Element d.o.o., Zagreb, 15, 2002., 208-210.
2. Brčić, Ž.: *Do rješenja na mnogo načina*, Poučak, Hrvatsko matematičko društvo, Profil International d.o.o., Zagreb, 15 (59), 2014., 45-52.
3. Kurnik, Z.: *Matematički zadatak*, Matematika i škola, Element d.o.o., Zagreb, 7, 2000., 51-58.
4. Sredojević, B.; Milošević, D.: *Devet načina za rješavanje jednog zadatka o trouglu*, Matematički kolokvij, Banja Luka, XX (3), 2014., 161-167.