KUP MATEMATIČKE GIMNAZIJE U BEOGRADU

Lovro Cvitanović i Luka Passek Kumerički, XV. gimnazija, Zagreb

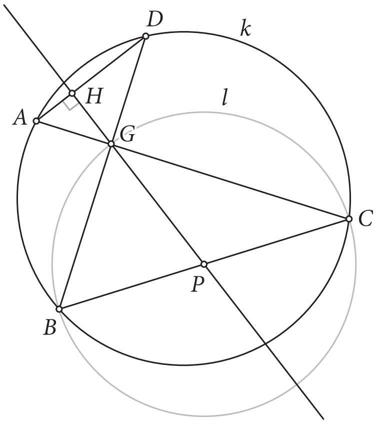
Kup Matematičke gimnazije međunarodno je natjecanje iz matematike, fizike i informatike. Ove godine održano je od 24. do 29. lipnja u Beogradu. Sudionici su bili iz Rumunjske, Velike Britanije, Njemačke, Crne Gore, Srbije, Bugarske, Slovenije, Bjelorusije, Bosne i Hercegovine, Grčke, Rusije, Makedonije i Hrvatske. Svi sudionici imali su do 16 godina (1. razred srednje škole). Ovo je sedma godina održavanja ovog natjecanja koje se organizira od 2013. Ove godine hrvatski su tim činili: Magdalena Bajdak (brončane medalje iz fizike i matematike), Ivan Golubić (brončana medalja iz matematike), Lovro Cvitanović (brončane medalje iz fizike i matematike) i Luka Passek Kumerički (zlatna medalja iz fizike i brončana iz matematike), a voditeljica tima bila je Sanja Antoliš. Luka, Magdalena, Ivan i Lovro učenici su prvih razreda XV. gimnazije u Zagrebu.

Iskustvo

Stekli smo sjajno natjecateljsko iskustvo jer su rijetki od nas do sada sudjelovali u većim internacionalnim natjecanjima. Ipak, prvenstveni cilj ovoga natjecanja bilo je druženje, stjecanje novih iskustava i upoznavanje ljudi, stoga smo slobodno vrijeme iskoristili za druženje s drugim natjecateljima i volonterima koji su nam pokazivali grad. Osim upoznavanja Beograda, posjetili smo tvrđave Smederevo i Golubac te Srebrno jezero. Posjetili smo i Teslin muzej, prekrasni hram Sv. Save, Narodnu skupštinu i druge znamenitosti Beograda. Sprijateljili smo se s drugim natjecateljima te uživali u atmosferi cjelokupnog natjecanja.

Natjecanje iz matematike

Natjecanje iz matematike sastojalo se od 12 zadataka koji su bili podijeljeni u dva dijela. Prvi dio sastojao se od 8 zadataka višestrukog izbora i svaki je nosio po 5 bodova. Drugi dio sadržavao je 4 zadatka iz područja teorije brojeva, algebre, geometrije i kombinatorike, koji su nosili po 15 bodova svaki. Pogledajte tekst i rješenje 10. zadatka koji je bio iz područja geometrije.



10. zadatak Neka je k kružnica te neka su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dvije tetive različitih duljina te kružnice koje se sijeku točki G, pri čemu vrijedi $A \neq B \neq C \neq D$. Točka H je nožište okomice iz G na AD. Pravac GH siječe pravac BC u točki P tako da je $|BP| = |PC|$. Dokažite da je $AC \perp BD$.

Rješenje. Neka je mjera kuta $|\angle DAC| = \alpha$ i mjera kuta $|\angle ADB| = \delta$. Tada je i mjera kuta $|\angle DBC| = \alpha$ jer su kutovi

$\angle DBC$ i $\angle DAC$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{DC}$. Analogno je mjera kuta $|\angle ACB| = \delta$ jer su $\angle ADB$ i $\angle ACB$ obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$.

Neka je l kružnica opisana trokutu ΔBCG te neka je njezino središte O. Kako su H, G i P kolinearne točke, vrijedi $|\angle BGP| = |\angle HGD| = 90° - \delta$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi da je $|\angle GOB| = 2|\angle GCB| = 2\delta$. Trokut ΔGOB je jednakokračan s osnovicom $\overline{BG}$ pa kutovi uz osnovicu moraju imati jednaku mjeru. Zato je $|\angle BGO| = |\angle GBO| = \frac{1}{2}(180° - 2\delta) = 90° - \delta$. Zaključujemo da je $|\angle BGP| = |\angle BGO|$ i da su točke H, G, O, i P kolinearne.

Očito je $|GB| \neq |GC|$ jer bi inače bilo $|GD| = |GA|$ te $|AC| = |BD|$, što nije moguće jer su, prema uvjetima zadatka, te tetive različitih duljina. Točka O pripada simetrali dužine $\overline{BC}$ i pravcu GP. Budući da je $|GB| \neq |GC|$, ti se pravci sijeku u točno jednoj točki, a to je točka P. Slijedi da je $P \equiv O$ pa je dužina $\overline{BC}$ promjer kružnice l, a prema Talesovom poučku obodni kut nad promjerom uvijek je pravi: $|\angle BGC| = 90°$. Time smo dokazali tvrdnju zadatka.

Fantomiranje

Metoda koju smo koristili kako bismo riješili ovaj zadatak naziva se *fantomiranje* ili *metoda fantomske točke*. U biti, to je metoda rješavanja geometrijskih zadataka u kojima je potrebno dokazati da neka tvrdnja vrijedi za određenu točku. Ta tvrdnja može biti tvrdnja zadatka ili, kao u ovom primjeru, jedan dio zadatka koji nas vodi ka konačnom rješenju. Ukratko, potrebno je uvesti neku novu točku za koju vrijedi ono što želimo pokazati da vrijedi za zadanu točku, a zatim je nekim drugim putem potrebno dokazati da su te dvije točke iste. To je malo zaobilazni put da bismo nešto dokazali, ali često se pokaže izuzetno elegantnim.

Prvi dio natjecanja

Za kraj ovog teksta navodimo zadatke prvog dijela natjecanja. Okušajte se u njihovu rješavanju.

1. Kolika je vrijednost izraza $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}-4} - \frac{1}{3\sqrt{2}+4}\right) : \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + 5 - 2\sqrt{6}\right)$?

(A) $10+4\sqrt{6}$ (B) $\frac{8}{5+2\sqrt{6}}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$ (E) 12

2. Cijena knjige povećana je za 20 %, a nakon povišenja nova je cijena povećana za 35 %. Ukupno povećanje jednako je

(A) 55 % (B) 60 % (C) 62 % (D) 65 % (E) 70 %

MATKA 109.indd 6 13.9.2019. 8:21:26

3. Umnožak svih rješenja jednadžbe $x + 2 \cdot |x - 4| = 7$ u skupu realnih brojeva jednak je

(A) 6 (B) 5 (C) 1 (D) –1 (E) –6

4. U trokutu ΔABC veličina kuta $\angle ACB$ iznosi 90°, a točka H nožište je visine iz točke C na stranicu $\overline{AB}$. Ako je $|BC| = 5$ cm i $|BH| = 1$ cm, onda je $\dfrac{|CH|}{|CA|}$ jednak

(A) $2\sqrt{6}$ (B) 5 (C) $\dfrac{1}{10\sqrt{6}}$ (D) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ (E) $\dfrac{1}{5}$

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi tako da je $a + c = 2b$ i $c^2 + ac - a^2 = b^2$. Čemu je od navedenoga jednako $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$?

(A) $3\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $3\sqrt{2}$ (D) 6 (E) $2\sqrt{3}$

6. Neka je t realan broj takav da vrijedi $0 < t < 1$ i $t - \dfrac{1}{t} = 7$. Vrijednost izraza $\sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ je

(A) $\sqrt{5}$ (B) $-\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $-\sqrt{7}$ (E) 0

7. Neka je $ABCD$ paralelogram, pri čemu je $|\angle DAB| = 30°$. Ako je $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm i ako je površina paralelograma jednaka $20\sqrt{3}$ cm^2, onda je duljina dijagonale $\overline{AC}$ jednaka

(A) $2\sqrt{\dfrac{91}{3}}$ (B) $2\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{138}$ (D) $2\sqrt{67}$ (E) $2\sqrt{23}$

8. Promotrimo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$. Koliko ima parova (X, Y) takvih da je $X \subset A$, $Y \subset A$ i da su kardinalni brojevi elemenata skupova $|X| = 8, |Y| = 7$ i $|X \cap Y| = 5$?

(A) 9 240 (B) 3 245 (C) 27 720 (D) 87 512 (E) 13 860

Literatura:

1. http://www.cup.mg.edu.rs/ (29. 7. 2019.)

Rješenja zadataka:

1. (A) **2.** (C) **3.** (B) **4.** (E) **5.** (B) **6.** (B) **7.** (D) **8.** (C)

MATKA 109.indd 7 13.9.2019. 8:21:27