Matka 28 (2019./2020.) br. 109

SUSTAVI S PARAMETRIMA – ŽICA I PRAVOKUTNIK

Maja Starčević, Zagreb

Kod rješavanja matematičkih zadataka ponekad uočavamo sličnosti te primjećujemo da se mogu rješavati na analogan način. U takvim situacijama možemo odlučiti da sve takve zadatke rješavamo „odjednom", odnosno općenitije. Zadatci koji se svode na postavljanje sustava jednadžbi mogu se rješavati općenito, tako da se umjesto više sustava rješava samo jedan sustav koji je zapisan pomoću parametara umjesto konkretnih koeficijenata.

Promotrimo tu situaciju na jednom jednostavnom primjeru. Zamislimo da imamo žicu duljine 144 cm i želimo od nje napraviti rub pravokutnika kojemu je jedna stranica 3 puta dulja od druge. Tada trebamo odrediti duljinu svake stranice. Označimo duljinu kraće stranice s x, a dulje s y. Primijetimo da opseg pravokutnika treba biti jednak duljini žice. Sada možemo postaviti sljedeći sustav s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

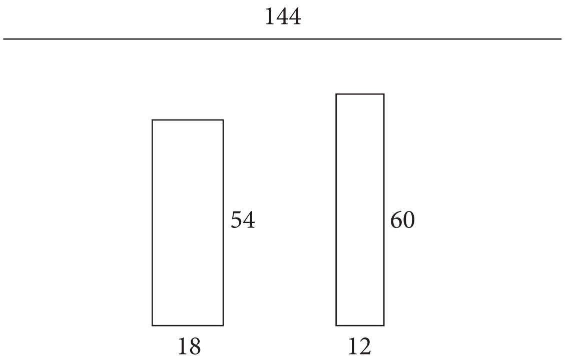
U prvoj smo jednadžbi zapisali opseg pravokutnika, a u drugoj zadanu vezu između duljina njegovih stranica. Riješimo sustav. Uvrstimo izraz za y iz druge jednadžbe u prvu jednadžbu i dobivamo $2x + 6x = 144$, odnosno $8x = 144$. Dakle, $x = 18$, a $y = 54$.

Sad postavimo zadatak na malo drugačiji način. Opet imamo istu žicu duljine 144 cm, međutim sada želimo da jedna stranica pravokutnika bude 5 puta dulja od druge stranice. Tada moramo zapisati sličan sustav

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= 5x \end{aligned}$$

Sustav rješavamo na isti način, uvrštavanjem izraza za y iz druge jednadžbe u prvu. Dobivamo $2x + 10x = 144$, tj. $12x = 144$, pa je $x = 12$, a $y = 60$.

Dobivene pravokutnike vidimo na Slici 1.



Slika 1.

Što kad bismo htjeli riješiti još nekoliko sličnih zadataka, gdje samo mijenjamo broj koji govori koliko je puta jedna stranica dulja od druge? Vidjeli bismo da stalno ponavljamo vrlo sličan postupak pa se možemo zapitati postoji li neki način da sve takve zadatke riješimo odjednom. To možemo postići tako da broj koji u tim zadatcima varira zapišemo kao parametar, znači pomoću nekog simbola. Neka je ovdje to simbol k. Tada dakle gledamo općeniti problem gdje moramo od žice duljine 144 cm napraviti rub pravokutnika tako da mu je jedna stranica k puta dulja od druge. Stoga k može biti bilo koji broj veći od 1 (ne nužno prirodan). Sustav s parametrom tada glasi

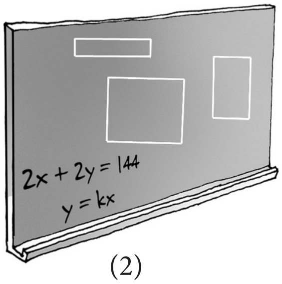
$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= kx \end{aligned}$$

Uvrstimo opet y iz druge jednadžbe u prvu te dobivamo $2x + 2kx = 144$, odnosno

$$2(k + 1)x = 144. \tag{1}$$

Ideja je podijeliti jednadžbu brojem koji stoji uz x. Međutim, taj broj nije nam precizno određen. Pitamo se može li on za neki k biti nula, jer tada ne možemo s njim dijeliti jednadžbu. Kako smo rekli da je $k > 1$, vrijedi i $2(k + 1) > 0$, stoga možemo jednadžbu (1) dijeliti tim brojem. Time dobivamo

$$x = \frac{144}{2(k+1)} = \frac{72}{k+1}.$$



Ako uvrstimo dobiveni x u drugu jednadžbu sustava, dobivamo

$$y = \frac{72k}{k+1}.$$

Dakle, rješenje sustava je uređeni par

$$\left(\frac{72}{k+1}, \frac{72k}{k+1}\right). \tag{2}$$

Primjećujemo da su dobivene vrijednosti za x i y uvijek pozitivne za svaki $k > 1$ te da stvarno predstavljaju duljine stranica. Na prvi pogled ovako zapisano rješenje može ostaviti dojam da sustav ima beskonačno rješenja jer je zapisano pomoću nekog općenitog broja. Međutim, taj broj k je broj koji određuje sam sustav. U konkretnoj situaciji prvo ga odabiremo da bismo uopće odredili sustav. Nakon toga uvrštavanjem izabranog broja k u rješenje (2) dobivamo samo jedan uređen par koji je rješenje sustava. Npr. odaberimo da je $k = 6.2$ i tada sustav glasi

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= 6.2x \end{aligned}$$

Iz formule (2) dobivamo da je $x = \frac{72}{6.2+1} = 10$ i $y = \frac{72 \cdot 6.2}{6.2+1} = 62$ (s tim da y

možemo izračunati i jednostavnije, pomoću $y = 6.2x$). Dakle, za $k = 6.2$ imamo jedinstveno rješenje sustava, a to je uređeni par (10, 62).

Nadalje, možemo primijetiti da bismo u rješenje (2) mogli uvrštavati i neke druge brojeve k, a ne samo one veće od 1. Međutim, da bi to imalo smisla, treba malo promijeniti tekst zadatka. Npr. ako u zadatku ne tražimo da je druga stranica pravokutnika k puta dulja od prve stranice, nego da je omjer duljina druge i prve stranice jednak k, onda se druga jednadžba opet može zapisati kao $y = kx$ pa dobivamo isti sustav, ali ga sad ima smisla promatrati za bilo koji broj $k > 0$. Sustav se posve isto rješava pa za svaki promatrani k opet dobivamo rješenje (2). Za parametre $k < 1$ dobivat ćemo rubove pravokutnika kojima je druga stranica kraća od prve, a za $k = 1$ dobit ćemo rub kvadrata.

Skup iz kojeg biramo vrijednost parametra k za dosad promatrani sustav možemo još proširiti, i to na sljedeći način. Pretpostavimo da sada tražimo dva (realna) broja takva da je njihov dvostruki zbroj jednak 144, dok im je količnik jednak k. Označimo te brojeve s x i y te neka je količnik brojeva y i x jednak k (dakle, x ne smije biti jednak nula). Sada k može biti bilo kakav (realan) broj. Problem se opet može zapisati pomoću sustava

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= kx \end{aligned}$$

Iz sustava opet dobivamo jednadžbu

$$2(k + 1)x = 144. \tag{3}$$

Međutim, sad uočavamo jedan problematičan parametar koji nismo imali u problemu sa žicom, a to je $k = -1$. Za njega je broj $2(k + 1)$, s kojim bismo htjeli podijeliti jednadžbu (3), jednak nula pa jednadžbu tada ne smijemo dijeliti tim brojem. Zato prvo pretpostavimo da je $k \neq -1$. Tada dijelimo jednadžbu (3) s $2(k + 1)$ i dobivamo kao i prije da je

$$x = \frac{72}{k+1}, \quad y = \frac{72}{k+1}.$$

Primijetimo da je broj x uvijek različit od nule za sve $k \neq -1$ pa je rješenje sustava ujedno i rješenje zadatka (da smo za neki k dobili rješenje sustava u kojem je $x = 0$, zadatak ipak ne bi imao rješenje).

Sad još moramo vidjeti što se zbiva u slučaju kad je $k = -1$. Tada ne možemo dijeliti jednadžbu (3) s $2(k + 1)$, ali zato imamo konkretnu vrijednost parametra k i možemo taj broj uvrstiti u jednadžbu (3). Dobivamo $0 \cdot x = 144$. Očito je da ne postoji broj x koji zadovoljava tu jednadžbu pa sustav u ovom slučaju nema rješenja. Pogledajmo i što dobivamo kad uvrstimo $k = -1$ u početni sustav. Tada imamo sustav

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 144 \\ y &= -x. \end{aligned}$$

MATKA 109.indd 10 13.9.2019. 8:21:27

Jednadžbe možemo zapisati i u sljedećem obliku

$$x + y = 72$$
$$x + y = 0.$$

Dakle, zapravo smo pokušali dobiti brojeve kojima je zbroj istodobno jednak i 0 i 72, što je, naravno, nemoguće.

Zaključujemo konačno da postavljeni sustav, a ujedno i zadatak, imaju uvijek jedno rješenje za svaki $k \neq -1$. Sustav, pa tako ni zadatak, nemaju rješenja za $k = -1$.

Vratimo se sad na zadatak sa žicom. Primijetimo da možemo slično razmišljati i kad je riječ o duljini žice. Možemo imati više žica različitih duljina i želimo od svake od njih napraviti rub pravokutnika tako da mu duljine stranica budu u odabranom omjeru. Tada nakon promjene duljine žice ne moramo opet postavljati novi sustav, nego i duljinu žice možemo zapisati pomoću parametra. Nazovimo ga d. Sada imamo sustav s dva parametra

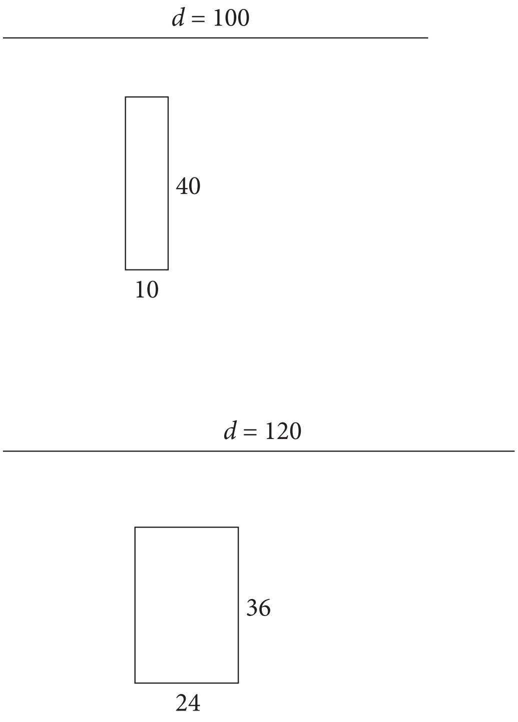
$$\begin{aligned} 2x + 2y &= d \\ y &= kx \end{aligned}$$

U sustav ima smisla uvrštavati samo pozitivne parametre k i d. Rješavamo ga istim postupkom kao prije i dobivamo rješenje

$$x = \frac{d}{2(k+1)},$$
$$y = \frac{d \cdot k}{2(k+1)}\ . \qquad (4)$$

Možemo odabrati razne pozitivne vrijednosti za k i d pa dobivamo uvijek jedno rješenje sustava dano s (4) (koje je i rješenje zadatka jer su brojevi x i y uvijek pozitivni). Npr. neka je $k = 4$ i $d = 100$. Uvrštavanjem u (4) dobivamo $x = 10$, a $y = 40$. Ako uzmemo da je $k = 1.5$ i $d = 120$, dobivamo da je $x = 24$ i $y = 36$ (Slika 2.).

Za kraj spomenimo da je još jedan od razloga zašto postavljamo sustave jednadžbi s parametrima i taj što u stvarnom životu želimo ponekad riješiti sustav i prije nego što su nam dostupni svi podatci koji određuju koeficijente sustava. U takvoj situaciji, kao što smo opisali, nepoznate podatke zapišemo kao parametre, riješimo sustav, i uvrstimo konkretne vrijednosti parametara u rješenje kad nam postanu poznate. Ako smo proučili sve slučajeve parametara, unaprijed ćemo znati imaju li sustav i pripadni problem rješenje za odabrane vrijednosti parametara.



Slika 2.