



Petar Mladinić, Zagreb

STARO I/ILI NOVO RAČUNANJE

Prije džepnog računala i raznih softvera računanje umnoška i količnika dvaju brojeva bio je zahtjevan posao. Matemagičari su se domišljali raznim postupcima kojima su bolje i brže računali umnožak ili količnik.

U ovom ćemo tekstu razmotriti i ilustrirati ideju starih matemagičara (egipatskih, kineskih i europskih) koja je ugrađena u današnja računala. Uvjerit ćemo se koliko su bili domišljati. Trebamo samo znati zbrajati pribrojнике i udvostručiti pojedini broj. Ideja starih matemagičara vodi do današnjeg prikazivanje broja u binarnom sustavu koji je temelj današnjih računala.

Binarni zapis broja

Dekadski sustav brojeva zapis je vrijednosti broja pomoću potencija broja 10 i znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Primjerice, broj 753 zapišimo pomoću potencije broja 10 i spomenutih znamenaka. U školi učimo da je taj prikaz

$$753 = 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Binarni zapis brojeva zapis je vrijednosti broja pomoću potencija broja 2 i znamenaka 0 i 1. Primjerice, binarni zapis broja 13 jednak je

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1101_{(2)}.$$

Podsjetimo se kako se određuje binarni zapis nekog broja.

Primjer 1. Zapišimo broj 53 binarno.

Rješenje. Izračunajmo potencije broja 2 i zapišimo njihove vrijednosti u tablicu.

potencija	...	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
vrijednost	...	128	64	32	16	8	4	2	1

Broj 53 napišemo kao zbroj nekih vrijednosti iz tablice. Dakle, vrijedi:

$$\begin{aligned} 53 &= 32 + 16 + 4 + 1 \\ &= 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 110101_{(2)} \end{aligned}$$



U sljedećem primjeru ukazat ćemo na izravniji postupak kojim se dobiva binarni zapis broja.

Primjer 2. Odredimo binarni zapis broja 19.

Rješenje. Napišimo broj 19 i ispod njega potencije broja 2, te zaokružimo vrijednosti čiji je zbroj jednak 19. Zaokruženi brojevi imaju koeficijent 1, a ostali 0:

19	binarni zapis
1	1
2	1
4	0
8	0
16	1

$$\begin{aligned}
 17 &= 16 + 2 + 1 \\
 &= 2^4 + 2^1 + 2^0 \\
 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
 &= 10011_{(2)}
 \end{aligned}$$

Dakle, zapis $19 = 10011_{(2)}$ mogao se dobiti izravno iz tablice, čitajući znamenke odozdo prema gore. Ovakav će nam postupak biti temelj računanja umnoška i količnika dvaju brojeva.

Množenje brojeva

Uporabimo prethodni postupak kako bismo mogli izračunati umnožak dvaju brojeva. Riješimo sljedeća dva primjera.

Primjer 3. Pomnožimo brojeve 17 i 15.

Rješenje. U tablici imamo sljedeći prikaz množenja. U prvom su stupcu znamenke binarnog zapisa broja 17, u drugom su potencije broja 2 (počevši od 2^0), a u posljednji stupac redom upisujemo dvostruku vrijednost broja iz prethodnog reda. Zaokružene brojeve ispod broja 15 zbrojimo.

	17	.	15
1	1	→	15
0	2		30
0	4		60
0	8		120
1	16	→	240
	17		255

Zbroj zaokruženih brojeva u posljednjem stupcu traženi je umnožak, tj. vrijedi $17 \cdot 15 = 240 + 15 = 255$.





Primjer 4. Pomnožimo brojeve 42 i 31.

Rješenje. Prema prehodnom primjeru dobivamo sljedeću tablicu. Ne moramo više pisati binarni zapis.

42	.	31
1		31
2	→	62
4		124
8	→	248
16		496
32	→	992
42		1344

Dakle, rezultat je $42 \cdot 31 = 992 + 248 + 62 = 1302$.

Dijeljenje brojeva

Kako podijeliti dva broja? Može li se ovaj postupak primijeniti na računanje količnika? Ovaj postupak samo treba obrnuti. Ilustrirajmo to sljedećim primjerima.

Primjer 5. Podijelimo 1075 s 25.

Rješenje. Brojeve 1075 i 25 zapišimo u tablicu. Udvostručivanje brojeva u stupcu djeljitelja (stupac broja 25) zaustavimo u trenutku kad nam taj broj bude veći od djeljenika. Imamo

1075	:	25
1		25
2		50
4		100
8		200
16		400
32		800
64		1600

U drugom stupcu uočimo i zaokružimo pribrojnice čiji je zbroj jednak djeljeniku 1075. Zbrojimo zaokružene potencije broja 2. U tablici to ovako izgleda:





1075	:	25
①	←	②5
②	←	⑤0
4		100
⑧	←	②00
16		400
③2	←	⑧00
64		1600
43		1075

Odavde je količnik jednak $1075 : 25 = 32 + 8 + 2 + 1 = 43$.

Primjer 6. Podijelimo 1705 s 55.

Rješenje. Prema prethodnom primjeru dobivamo sljedeću tablicu:

1705	:	55
①	←	⑤5
②	←	①10
④	←	②20
⑧	←	④40
①6	←	⑧80
32		1760
31		1705

i rezultat je $1705 : 55 = 31$.

Zadaci

Riješite sljedeće zadatke.

1. Pomnožite: a) 555 i 111, b) 37 i 201.
2. Podijelite: a) 5 145 s 49, b) 627 816 s 808.
3. Može li se ovaj postupak dijeljenja proširiti na dijeljenje s ostatkom?
4. Podijelite: a) 117 s 22, b) 573 s 27.

Objavit ćemo ime svakog Matkača koji nam pošalje rješenje zadatka. Posebno ćemo nagraditi Matkača koji nam objasni može li se i kako ovaj postupak primijeniti na dijeljenje s ostatkom.

