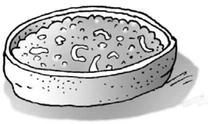
ALICA U ZEMLJI LOGIČKIH ZAGONETAKA

Marija Ćorić i Matko Trupinić, XV. gimnazija, Zagreb

Jeste li čitali *Alisu u zemlji čudesa*, poznato djelo Lewisa Carrolla? Znate li tko su Ludi Klobučar, Ožujski Zeci Gušter Bill? Možete li nabrojiti još neke likove iz toga djela? Znate li da je na temelju tog djela nastala knjiga *Alica u zemlji (logičkih) zagonetaka* autora Raymonda Smullyana? Ako ne znate, ovdje ćete upoznati Alicu (kao i neke druge likove Carrollovog djela) uz malo matematičke logike.



Alica u zemlji (logičkih) zagonetaka zbirka je nekoliko zagonetki koje se nalaze u različitim pričama s radnjom i dijalozima. U svakoj priči netko je ukrao jedan od sastojaka potrebnih za pečenje pite, a zadatak je otkriti počinitelja toga nedjela kako bi se sastojak mogao vratiti Kraljici da ispeče pitu. U posljednjoj priči Kraljica je ispekla pitu, ali ju je netko ukrao. Kako bi se otkrio kradljivac pite, potrebno je riješiti najsloženiju zagonetku te knjige.

U prvom dijelu treće priče treba odgonetnuti tko je ukrao papar.

– *Eto ti brašna* – reče kralj sretno – *Hajde, ispeci tu pitu!*

– *Pitu bez papra?* – reče Kraljica.

– *Papar?!* – vrisne Kralj u čuđenju i nevjerici. – *Ti stavljaš papar u pitu?*

– *Ne stavljam ga puno* – odgovori Kraljica.

– *Pretpostavljam da je i on ukraden!*

– *Dakako* – reče Kraljica. – *Pronađi papar, a kada pronađeš i lopova, skini mu...*

– *Ma stani malo!* – reče joj Kralj.

No, papar je, dakako, morao pronaći.

Kao što svi znate, oni koji kradu papar nikada ne govore istinu.

Najsumnjivija je bila Damina kuharica. Na sudu je izjavila tek ovo:

– *Znadem tko je ukrao papar!*

Je li Damina kuharica ukrala papar?

Propozicijska logika

Često se susrećemo sa zagonetkama poput ovakvih, ili radi zabave i mozganja, ili ih u stvarnom životu gledamo kao probleme koje moramo riješiti kako bismo uspjeli donijeti nekakvu odluku.

Jedna vrlo zanimljiva metoda rješavanja zagonetaka primjenjuje znanja **propozicijske logike.**

Logički sud ili izjava svaka je tvrdnja za koju se može reći je li istina ili laž. Ako je tvrdnja istinita, pridružuje joj se logička vrijednost 1, a ako je lažna, vrijednost 0.

Unutar propozicijske logike svaki se logički sud označava jedinstvenim simbolom, najčešće slovom. Primjer označavanja logičkih sudova:

A – Ivica vozi bicikl.

B – Marica vozi romobil.

Logičke varijable povezujemo logičkim operacijama te tako dobivamo složene izjave.

Osnovne logičke operacije su **AND**, **OR** i **NOT**. Operacija **AND** (simbol ∧) daje za rezultat istinitu izjavu jedino ako su sve ulazne izjave također istinite. Primjerice, izjava „Ivica vozi bicikl i Marica vozi romobil" (A ∧ B) istinita je jedino ako i Ivica vozi bicikl i Marica vozi romobil.

Operacija **OR** (simbol ∨) daje za rezultat istinitu izjavu ako je bar jedna od ulaznih izjava također istinita. Primjerice, izjava „Ivica vozi bicikl ili Marica vozi romobil" (A ∨ B) istinita je ili ako Ivica vozi bicikl, ili ako Marica vozi romobil, ili ako i Ivica vozi bicikl i Marica vozi romobil.

Operacija **NOT** (simbol ¬) daje za rezultat istinitu izjavu kad je ulazna izjava lažna i lažnu izjavu kada je ulazna izjava istinita. Primjerice, provođenjem operacije NOT od izjave „Ivica vozi bicikl" (A) dobije se izjava „Ivica ne vozi bicikl" (¬A).

Prilikom prevođenja jezičnih iskaza koriste se i operacije **implikacije i ekvivalencije**.

Implikacija (simbol →) daje za rezultat istinitu izjavu uvijek osim u slučaju kada iz ulazne istinite izjave proizlazi lažna. Primjerice, izjava „Ako Ivica vozi bicikl, onda Marica vozi romobil" (A → B) istinita je uvijek osim kada Ivica vozi bicikl, a Marica ne vozi romobil.

Ekvivalencija (simbol ↔) daje za rezultat istinitu izjavu jedino ako obje ulazne izjave sadrže istu logičku vrijednost, odnosno ako su obje ulazne izjave ili istinite ili lažne. U jezičnom smislu ekvivalencija je jednaka ustroju: „Akko ..., onda ..." (***akko*** s dvostrukim ***k***, za razliku od operacije implikacije gdje je ***ako*** s jednim ***k***). Primjerice, izjava „Akko Ivica vozi bicikl, onda Marica vozi romobil" (A ↔ B) istinita je ako i Ivica vozi bicikl i Marica vozi romobil ili ako ni Ivica ne vozi bicikl ni Marica ne vozi romobil.

Ako se u zadatku dvoumimo između implikacije i ekvivalencije, zamijenimo mjesta logičkim varijablama i provjerimo ostaje li isti smisao logičkog izraza. Ako ostaje, radi se o ekvivalenciji, a ako ne, radi se o implikaciji.

Postupak rješavanja tekstualne zagonetke sastoji se od nekoliko koraka:

1. Analiziranjem teksta određuju se logički sudovi koji opisuju moguće okolnosti i ishode zadatka te se pripisuju proizvoljno odabranim logičkim varijablama.

2. Analiziranjem teksta određuju se logički izrazi koji opisuju odnose između određenih logičkih sudova te se logičke varijable povezuju logičkim operacijama.

3. Traži se kombinacija logičkih vrijednosti varijabli za koju su vrijednosti svih logičkih izraza istinite.

Analiza teksta i izjave

Analizom teksta mogu se pretpostaviti dvije stvari: Damina kuharica ukrala je papar i Damina kuharica govori istinu. Te izjave ujedno su i logički sudovi jer se može dokazati njihova istinitost. Potrebno ih je označiti proizvoljno odabranim logičkim simbolima, npr. A i B:

A – Damina je kuharica ukrala papar.

B – Damina kuharica govori istinu.

Nakon toga potrebno je pronaći povezanost između tih izjava te toj povezanosti pridružiti pripadajuću logičku operaciju.

Prva izjava

Uvjet zagonetke govori kako onaj tko krade papar nikada ne govori istinu, odnosno uvijek laže. Time vrijedi da ako je Damina kuharica ukrala papar, onda ne govori istinu. Ukoliko vrijedi i obratno, radi se o ekvivalenciji. No u zadatku nigdje nije rečeno da onaj tko nije ukrao papar mora govoriti istinu, pa obratno nema logičkog smisla. Radi se o implikaciji. Ta izjava zapisana pomoću logičkih simbola glasi: $A \rightarrow \neg B$ (Provođenjem operacije NOT od izjave „Damina kuharica govori istinu" dobiva se izjava „Damina kuharica ne govori istinu, odnosno laže").

Druga izjava

Analiziranjem teksta može se zaključiti da ako je Damina kuharica ukrala papar, onda zna tko ga je ukrao, a s obzirom na to da njezina izjava glasi „*Znadem tko je ukrao papar*", govori istinu. Time vrijedi da ako je Damina kuharica ukrala papar, onda govori istinu. No obratno ne vrijedi jer Damina kuharica može znati tko je ukrao papar, a da je to bio netko drugi. Radi se opet o implikaciji. Zapisano pomoću simbola: $A \rightarrow B$.

Tablice istinitosti

Povezanost smo zapisali pomoću logičkih simbola pa tražimo kombinaciju vrijednosti logičkih sudova za koju je ta izjava istinita, odnosno valjane kombinacije vrijednosti. Kombinacije se mogu tražiti pomoću **tablice istinitosti**.

Prilikom crtanja tablice istinitosti prvo se crtaju stupci gdje svaki stupac sadržava jednu logičku varijablu sa svojim vrijednostima i redci gdje se u svakom retku nalazi drugačija kombinacija vrijednosti svih stupaca. Npr., ako imamo logičke varijable A i B, moguće kombinacije njihovih vrijednosti su: (0,0), (0,1), (1,0) i (1,1), pa bi početni stupci tablice istinitosti izgledali ovako: (Tablica na rubu).

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Zatim se crtaju ostali stupci gdje svaki stupac sadrži određeni logički izraz, a vrijednost svakog retka stupca rezultat je provođenja operacije toga izraza nad vrijednostima pripadajućih početnih stupaca koje se nalaze u istome retku. Npr., ako varijable A i B povežemo operacijom **OR**, dobiveni logički izraz zapisan pomoću simbola glasio bi: $A \lor B$, a s obzirom na to da operacija OR za rezultat daje vrijednost 1 kada je vrijednost bar jedne logičke varijable 1, dopunjena tablica istinitosti izgledala bi ovako:

A	B	$A \lor B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Kako bismo odredili valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli, traže se redci u kojima se u završnom stupcu nalazi vrijednost 1. Ti redci sadržavaju valjane kombinacije. Na ovom primjeru ti redci su drugi, treći i četvrti, pa su valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli: (0,1), (1,0) i (1,1).

1. primjer: Nacrtajmo tablicu istinitosti i odredimo valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli za izraz $A \rightarrow \neg B$.

Rješenje. Početni stupci tablice istinitosti izgledaju ovako:

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Sljedeći stupac sadrži izraz ¬B. S obzirom na to da operacijom **NOT** vrijednost 1 postaje 0 i obratno, dopunjena tablica izgleda ovako:

A	B	¬B
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Sljedeći stupac sadrži konačni izraz A →¬B. Budući da navedena implikacija povezuje varijablu A i izraz ¬B, gledaju se vrijednosti unutar prvog i trećeg stupca tablice. S obzirom na to da implikacija za rezultat daje vrijednost 1 osim kada iz vrijednosti 1 proizlazi vrijednost 0, dopunjena tablica izgleda ovako:

A	B	¬B	A →¬B
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Vrijednost 1 u završnom stupcu sadrže prvi, drugi i treći redak, pa su valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli: (0,0), (0,1) i (1,0).

2. primjer: Nacrtajmo tablicu istinitosti i odredimo valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli za izraz A → B.

***Rješenje*:**

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Valjane kombinacije su: (0,0), (0,1) i (1,1).

Budući da su u našoj zagonetki istovremeno istinite i jedna i druga izjava, one se mogu povezati operacijom **AND**. Zapisano pomoću simbola: (A →¬B) ∧ (A → B).

3. primjer: Nacrtajmo tablicu istinitosti i odredimo valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli za izraz (A →¬B) ∧ (A → B).

Rješenje: Početni stupci tablice istinitosti izgledaju ovako: (tab. na rubu)

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Koristeći prethodne primjere možemo popuniti tablicu:

A	B	¬B	A →¬B	A → B
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Konačno, završni stupac sadrži izraz (A →¬B) ∧ (A → B). Budući da operacija AND povezuje dvije implikacije koje se nalaze unutar četvrtog i petog stupca, gledaju se vrijednosti unutar tih stupaca. S obzirom na to da operacija AND za rezultat daje vrijednost 1 jedino ako su obje ulazne vrijednosti 1, konačan oblik tablice izgleda ovako:

A	B	¬B	A →¬B	A → B	(A →¬B) ∧ (A → B)
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

Je li Damina kuharica ukrala papar?

Vrijednost 1 u završnom stupcu sadrže prvi i drugi redak, pa su valjane kombinacije vrijednosti logičkih varijabli: (0, 0) i (0, 1). U objema kombinacijama vrijednost varijable A je 0, odnosno izjava „*Damina kuharica ukrala je papar*” u svakom je slučaju lažna. Odgovor na postavljeno pitanje zagonetke je da Damina kuharica nije ukrala papar, no vrijednosti varijable B u valjanim kombinacijama su i 0 i 1, pa se ne može zaključiti je li Damina kuharica govorila istinu ili nije.

Tko je onda ukrao papar ako kuharica nije? Ima još mnogo sumnjivaca: Ožujski Zec, Ludi Klobučar, Puh, Grifon, Kornjača i Jastog.

Tko je kradljivac papra, doznat ćete u sljedećem broju Matke!

Isprika autorima i čitateljima

U Matki broj 109 potkrala se tiskarska pogreška u članku „Kup Matematičke gimnazije u Beogradu”. Pogrešno je otisnut zadatak broj 6 (na stranici 7). Ispravno napisan zadatak glasi.

6. Neka je $0 < t < 1$ te da je t realni broj takav da vrijedi $t + \frac{1}{t} = 7$. Vrijednost $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ je jednaka:

(A) $\sqrt{5}$ (B) $-\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $-\sqrt{7}$ (E) 0