SUSTAVI S PARAMETRIMA – DVIJE ŽICE I PRAVOKUTNICI

Maja Starčević, Zagreb

U prošlom članku proučavali smo kako od žice zadane duljine napraviti rub pravokutnika ako nam je poznat omjer duljina njegovih stranica. Pogledajmo sada sličan zadatak. Ovaj put imamo dvije žice duljina 144 cm i 600 cm. Od njih želimo napraviti rubove pravokutnika, ali tako da im se duljine jedne stranice podudaraju, dok je druga stranica drugog pravokutnika 4 puta dulja od druge stranice prvog pravokutnika. Riješimo i ovaj zadatak pomoću sustava jednadžbi s dvije nepoznanice. Označimo s x i y duljine stranica prvog pravokutnika, pri čemu i prvi i drugi pravokutnik imaju stranicu duljine x. Dakle, duljina druge stranice drugog pravokutnika jednaka je $4y$. Ako zapišemo opsege obaju pravokutnika, dobivamo sustav

$$2x + 2y = 144$$
$$2x + 2 \cdot 4y = 600.$$

Prvu jednadžbu pomnožimo brojem -1 i dodamo drugoj te imamo $6y = 456$, odnosno $y = 76$. Uvrštavanjem y u bilo koju od jednadžbi dobivamo $x = -4$. Vidimo da sustav ima rješenje, ali ono ne može biti rješenje našeg zadatka jer duljine svih stranica pravokutnika moraju biti pozitivne. Zanima nas bismo li ostajali bez rješenja i kad bismo mijenjali zadane vrijednosti u zadatku.

Pogledajmo stoga općenitiji problem. Neka su duljine žica zapisane redom pomoću parametara d_1 i d_2, neka se opet pravokutnicima duljine jedne stranice podudaraju, a omjer duljina preostalih stranica neka je p. Označimo li duljine stranica na isti način kao i prije, pripadni sustav glasi

$$2x + 2y = d_1$$
$$2x + 2 \cdot py = d_2.$$

Pomnožimo opet prvu jednadžbu brojem -1 i dodamo je drugoj. Dobivamo jednadžbu

$$(2p - 2)\, y = d_2 - d_1. \tag{1}$$

Nju možemo podijeliti s $2p - 2$ samo ako je taj broj različit od nule, odnosno samo ako je $p \neq 1$. Pogledajmo prvo što će se dogoditi s rješenjem ako je $p = 1$. Uvrstimo taj broj u sustav. Tu razlikujemo dva slučaja. Ako je $p = 1$ i $d_1 = d_2$, u sustavu imamo dvije jednake jednadžbe $2x + 2y = d_1$ i primjećujemo da postoji više uređenih parova (x, y) koji je zadovoljavaju. Preciznije, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Kažemo još i da je rješenje parametarsko jer ga možemo zapisati pomoću nekog parametra, odnosno broja koji možemo odabrati na više načina (označimo ga t). Dakle, u ovom slučaju rješenje sustava svi su uređeni parovi (x, y) oblika

$$x = t$$
$$y = \frac{d_1}{2} - t\ .$$

Potrebno je još samo utvrditi kakav sve može biti broj t koji možemo varirati u rješenju sustava da bi ono bilo i rješenje zadatka. Kako duljine stranica pravokutnika moraju biti pozitivne, za parametar t mora vrijediti $0 < t < \frac{d_1}{2}$.

Ako se vratimo na naš problem, onda primjećujemo da smo u ovom slučaju zapravo odredili kako se sve od jedne žice duljine d_1 može dobiti rub pravokutnika.

Preostaje za proučiti slučaj kad je $p = 1$ i $d_1 \neq d_2$. Onda dobivamo sustav

$$2x + 2y = d_1$$
$$2x + 2y = d_2$$

koji očito ne može imati rješenje jer su lijeve strane jednadžbi jednake, a desne različite. Ovdje smo dakle pokušali napraviti rubove dvaju pravokutnika sa stranicama istih duljina, ali s različitim opsezima, što je naravno nemoguće.

Vratimo se sad na situaciju kad je $p \neq 1$. Tada dijelimo jednadžbu (1) s $2p - 2 = 2(p - 1)$ i dobivamo rješenje sustava

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_1}{2} - \frac{d_2 - d_1}{2(p-1)}, \\ y &= \frac{d_2 - d_1}{2(p-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Kao što smo prije utvrdili, neke od tih vrijednosti mogu biti i nepozitivne te tada ne dobivamo rješenje našeg zadatka. Da bismo imali rješenje zadatka, sve duljine stranica, odnosno brojevi x, y i py moraju biti pozitivni.

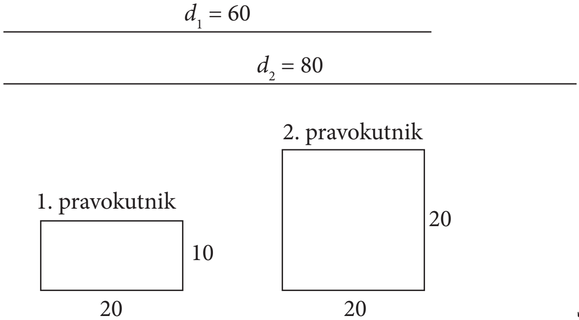
Zaključujemo da je rješenje sustava i rješenje zadatka ako i samo ako je

$$\frac{d_1}{2} - \frac{d_2 - d_1}{2(p-1)} > 0,$$
$$\frac{d_2 - d_1}{2(p-1)} > 0,$$

odnosno, jednostavnije zapisano, ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \frac{pd_1 - d_2}{p-1} &> 0, \\ \frac{d_2 - d_1}{p-1} &> 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dakle, kad postavljamo zadatak, moramo izabrati brojeve p, d_1 i d_2 tako da su brojevi $pd_1 - d_2$ i $d_2 - d_1$ istog predznaka kao i broj $p - 1$. Već smo se uvjerili da možemo izabrati p, d_1 i d_2 tako da ne vrijedi uvjet (3), odnosno da u rješenju sustava x ili y nije pozitivan pa rješenje sustava ne daje tražene stranice pravokutnika. Sad ćemo vidjeti da postoje i parametri za koje možemo dobiti pozitivne x i y. Npr. uzmimo $p = 2$, $d_1 = 60$ i $d_2 = 80$. Te vrijednosti parametara zadovoljavaju nejednakosti (3). Prema tome, rješenje sustava je u ovom slučaju i rješenje zadatka. Konkretno. uvrštavanjem tih vrijednosti u (2) dobivamo da je uređen par (20, 10) rješenje postavljenog sustava. Kako smo dobili pozitivne x i y, dobili smo ujedno i rješenje zadatka jer tada prvi pravokutnik ima duljine stranica 20 cm i 10 cm, a drugi je pravokutnik kvadrat duljine stranica 20 cm (Slika 1.).



Slika 1.

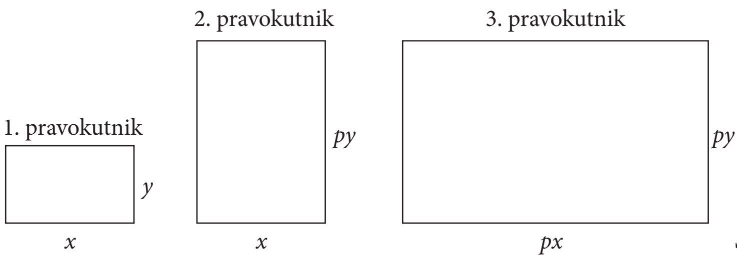
Pogledajmo za kraj što nam geometrijski znače uvjeti (3). Pretpostavimo prvo da je $p > 1$ i tada vrijedi $p - 1 > 0$. Znamo da su d_1 i d_2 redom opsezi prvog i drugog pravokutnika. Kako je

$$2 \cdot px + 2 \cdot py = p(2x + 2y) = pd_1,$$

zaključujemo da je pd_1 opseg (trećeg) pravokutnika kojemu su obje stranice p puta dulje od odgovarajućih stranica prvog pravokutnika. Prisjetimo se da drugi pravokutnik dobivamo iz prvog pravokutnika tako da samo jednoj stranici povećamo duljinu p puta. Ako poredamo opsege tih pravokutnika, najmanji opseg ima prvi pravokutnik, nešto veći drugi pravokutnik, a najveći opseg ima treći pravokutnik (Slika 2.). Dakle vrijedi

$$d_1 < d_2 < pd_1.$$

Drugim riječima, vrijedi $pd_1 - d_2 > 0$ i $d_2 - d_1 > 0$ pa ti brojevi imaju isti predznak kao i broj $p - 1$, što se slaže s uvjetima (3).

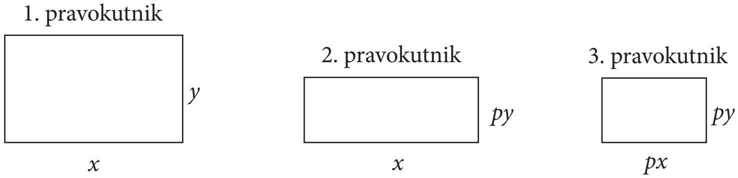


Slika 2.

Slično zaključujemo i u slučaju kad je $p < 1$. Tada je opseg drugog pravokutnika manji od opsega prvog pravokutnika, dok je opseg trećeg pravokutnika manji od opsega drugog pravokutnika (Slika 3.) pa vrijedi

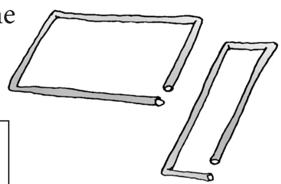
$$d_1 > d_2 > pd_1.$$

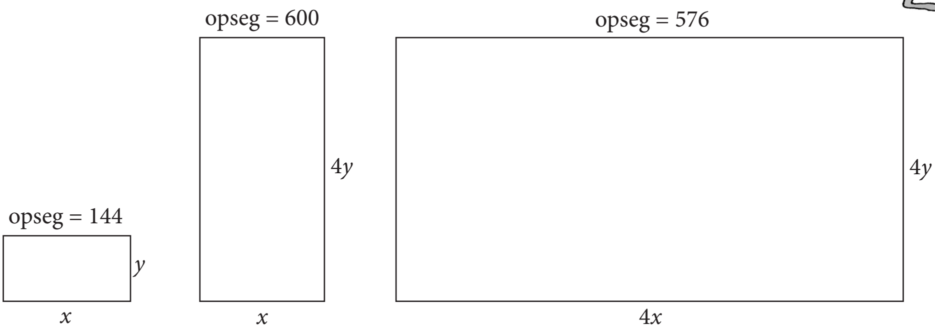
Taj uvjet može se zapisati i kao $pd_1 - d_2 < 0$ i $d_2 - d_1 < 0$. Kako je $p - 1 < 0$, taj broj ima isti predznak kao i brojevi $pd_1 - d_2$ i $d_2 - d_1$, što opet odgovara uvjetima (3).



Slika 3.

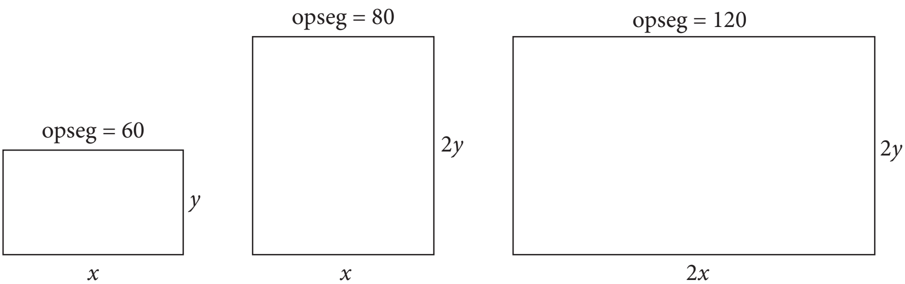
Dakle, vidjeli smo i geometrijski da kad parametre p, d_1 i d_2 zamijenimo brojevima koji ne zadovoljavaju obje nejednakosti u (3), dobivamo nešto nelogično. Konkretno, u početnom primjeru imali smo $p = 4$, $d_1 = 144$ i $d_2 = 600$. Tada su opsezi tri promatrana pravokutnika jednaki redom 144 cm, 600 cm i $4 \cdot 144 = 576$ cm. Prema tome, opsezi se redom ne povećavaju kao što bi trebali (Slika 4.) pa od žica ne možemo napraviti rubove traženih pravokutnika. Međutim, mi smo ipak dobili rješenje sustava, ali x je pritom bio negativan i ne može stoga predstavljati duljinu stranice.





Slika 4.

U drugom primjeru imali smo $p = 2$, $d_1 = 60$ i $d_2 = 80$. Rješavajući pripadni sustav dobili smo pozitivne x i y, odnosno uspjeli smo naći tražene duljine stranica pravokutnika. Primijetimo da je uvjet (3) sada zadovoljen (Slika 5.).



Slika 5.