NAPRAVI SVOJ MAGIČNI KVADRAT

Franka Miriam Brückler, Zagreb

Vjerojatno znaš što su magični kvadrati, ali ponovit ćemo za svaki slučaj: to su kvadratne tablice u kojima su raspoređeni brojevi tako da isti zbroj dobijemo ako zbrajamo brojeve u bilo kojem retku, bilo kojem stupcu ili pak po bilo kojoj od dijagonala (od gornjeg lijevog kuta do donjeg desnog ili od gornjeg desnog do donjeg lijevog kuta). Evo jednog magičnog kvadrata:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

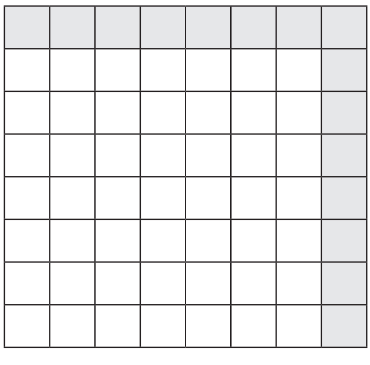
Zbroj svakog stupca, retka i dijagonale u tom je kvadratu 34.

Najčešće se gledaju magični kvadrati u kojima su, kao u gornjem, raspoređeni brojevi 1, 2, 3... itd. do nekog kvadratnog broja (gore: 16 je kvadrat od 4 – piše se $16 = 4^2$ i pritom misli $16 = 4 \cdot 4$). Na prvi pogled djeluje jednostavno ispisati novi magični kvadrat, no pokušaj smisliti neki drugi s istim brojevima kao gore – neće biti lako! Pritom se podrazumijeva da ako samo zrcališ ili zaokreneš poznati magični kvadrat, to nije novi, npr. gornji magični kvadrat isti je kao (tablica na rubu).

16	5	9	4
3	10	6	15
2	11	7	14
13	8	12	1

Do danas nije poznata opća metoda kojom ćeš moći napraviti magični kvadrat s brojevima 1, 2, 3... do kvadratnog broja proizvoljne zadane veličine, no postoje razne metode za kvadrate s neparnim brojem stupaca ili pak za one s parnim. Najviše metoda postoji za magične kvadrate s brojevima 1, 2, 3 itd. s neparnim brojem stupaca i one su također najjednostavnije. Za magične kvadrate s parnim brojevima stupaca lakše su metode za konstrukciju onih čiji je broj stupaca 4, 8, 12, itd. (dakle, djeljiv brojem 4), a teže i rijetke za one s brojem stupaca 6, 10, 14... (parnim, ali ne djeljivim brojem 4). Kao zadatak za tebe ostavljamo pitanje: Zašto ne postoje magični kvadrati s 2 retka i stupca?

Želiš li impresionirati nekoga brzim ispisivanjem velikog magičnog kvadrata s neparnim brojem stupaca, recimo njih 7, vjerujemo da će ti se svidjeti sljedeća metoda poznata kao sijamska metoda.[1] Nacrtaj praznu tablicu s jednim retkom i jednim stupcem viška (dakle, ako ispisuješ magični kvadrat sa 7 stupaca, nacrtaj tablicu s po 8 redaka i stupaca. Prvi red i zadnji stupac samo pomažu u ispisivanju pa ćemo ih označiti sivo (oni se na kraju brišu). U sredinu prvog (bijelog) retka upiši 1.



[1]Ime je dobila jer ju je iz Sijama (današnjeg Tajlanda) u Francusku u 17. stoljeću prenio diplomat Simon de la Loubère.

U bijela polja ispisuješ redom brojeve 2, 3, 4 i tako dalje, prema sljedećem pravilu: svaki sljedeći broj upiši u polje gore desno od zadnjeg broja; pritom:

- ako je to polje bijelo i prazno, nastavi sa sljedećim brojem;
- ako je to polje bijelo i puno (ili pak ako je to polje gornji desni sivi kut) umjesto u to polje, broj upiši ispod zadnjeg upisanog broja;
- ako je to polje u sivom gornjem retku, taj broj „propada” na dno istog stupca i zatim nastavljaš sa sljedećim brojem;
- ako je to polje u sivom desnom stupcu, taj broj „otkliže” u prvo polje istog retka i zatim nastavljaš sa sljedećim brojem.

Izradimo naš magični kvadrat sijamskom metodom. U prvom koraku 2 bi išao gore desno od 1, što je sivi redak, dakle 2 propada na dno.

				(2)			
			1				
				2			

Sad nastavimo prema osnovnom pravilu:

				(2)			
			1				
							5
						4	
					3		
				2			

				(2)			
			1				
		7					
	6	8					
5							(5)
						4	
					3		
				2			

Kako je 5 u sivom stupcu, on otkliže na početak svog reda pa opet nastavimo prema osnovnom pravilu. Sad bismo 8 morali napisati na mjesto 1, dakle na već popunjenu poziciju, pa ga umjesto tamo napišemo ispod 7: (tablica lijevo).

				(2)	(11)	(20)	29
			1	10	19	28	
		7	9	18	27		
	6	8	17	26			
5	14	16	25				(5)
13	15	24				4	(13)
21	23				3	12	(21)
22				2	11	20	

Nastavljamo (11 propada dolje, 13 kliže ulijevo, 15 ide ispod 14 umjesto gore desno, 20 propada dolje, 21 kliže ulijevo, 22 ide ispod 21): (tablica lijevo).

	(31)	(40)	(49)	(2)	(11)	(20)	(29)
30	39	48	1	10	19	28	(30)
38	47	7	9	18	27	29	(38)
46	6	8	17	26	35	37	(46)
5	14	16	25	34	36	45	(5)
13	15	24	33	42	44	4	(13)
21	23	32	41	43	3	12	(21)
22	31	40	49	2	11	20	

Broj 29 u sivom je kutu, dakle ide ispod 28, i onda nastavimo do kraja: (tablica lijevo).

Tako smo dobili magični kvadrat sa 7 redova i stupaca. Svi zbrojevi jednaki su 175. Ako ne vjeruješ, provjeri :)

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Želiš li pak napraviti magični kvadrat s parnim brojem stupaca djeljivim s 4, npr. s 8 stupaca, za to također postoji jednostavna metoda. Prvo u praznu tablicu ispiši redom (po retcima) sve brojeve 1, 2, 3... Tu tablicu u mislima raspodijeli na kvadrate dimenzija 4 puta 4 i označi (mi smo osjenčali) dijagonale tih kvadrata.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

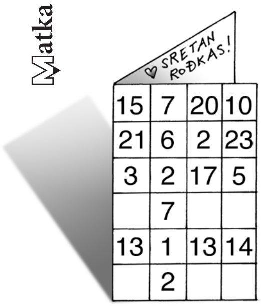
Zamijeni svaka dva broja koja su simetrična u odnosu na središte ako su u označenim poljima: 1 sa 64, 10 s 55, 11 s 54 itd. Evo magičnog kvadrata!

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Želiš li pak nekome pokloniti magični kvadrat koji umjesto toga da sadrži brojeve 1, 2, 3 itd. sadrži njegov ili njezin rođendan, može se i to. Iscrtaj 4 puta 4 tablicu i u prvi red ispiši dan, mjesec, prve dvije pa druge dvije znamenke rođendana, recimo za 15. 7. 2010.:

15	7	20	10

Zapamti zbroj prvog retka (trebat će ti kasnije; ovdje je to 52).[2]



Na početak i kraj zadnjeg reda upiši bilo koja dva broja koja imaju zboj jednak kao srednja dva broja prvog reda (7 + 20 = 27):

15	7	20	10
13			14

Na 3. mjesto u 2. redu i 2. mjesto u 3. redu napiši bilo koja dva broja kojima je zbroj jednak kao zbroj gornjeg lijevog i donjeg desnog kuta (15 + 14 = 29):

15	7	20	10
		2	
	27		
13			14

Uoči da si tako postigao da dijagonala od donjeg lijevog do gornjeg desnog kuta ima zbroj koji želimo (52). Sad slično: na 2. mjesto u 2. redu i 3. mjesto u 3. redu napiši bilo koja dva broja kojima je zbroj jednak kao zbroj gornjeg desnog i donjeg lijevog kuta (10 + 13 = 23) kako bi i druga dijagonala imala isti zbroj:

15	7	20	10
	6	2	
	27	17	
13			14

Na 2. mjesto i 3. mjesto u zadnjem redu napiši razliku zbroja prvog retka (52) i brojeva koje već imaš u 2. odnosno 3. stupcu (52 – 7 – 6 – 27, odnosno 52 – 20 – 2 – 17):

15	7	20	10
	6	2	
	27	17	
13	12	13	14

[2] Ako je taj zbroj manji od 34, morat ćeš u kvadratu imati negativnih brojeva.

Sad ne samo da 2. i 3. stupac imaju željeni zbroj 52, nego je to i zbroj zadnjeg retka. Sad na krajeve 2. i 3. retka stavi bilo koja dva broja koja imaju zbroj kao lijevi gornji i donji kut (15 + 13 = 28):[3]

15	7	20	10
	6	2	23
	27	17	5
13	12	13	14

Time je i zbroj zadnjeg stupca 52. Na prva mjesta u 2. i 3. retku sad stavi razliku od 52 i ostatka odgovarajućih redova: 52 – 6 – 2 – 23 odnosno 52 – 27 – 17 – 5:

Gotov je rođendanski kvadrat!

15	7	20	10
21	6	2	23
3	27	17	5
13	12	13	14

Za kraj, evo rješenja zadatka iz prošlog broja:

Imali smo neprozirnu vrećicu u kojoj su bile dvije kuglice, a za svaku je bilo jednako vjerojatno da je crna ili bijela. Trebalo je odrediti najvjerojatniji sastav vrećice. Rješenje je sljedeće. Imamo dvije kuglice, prvu i drugu. Mogućnosti su: obje bijele, obje crne, prva bijela i druga crna ili prva crna i druga bijela. Dakle, vjerojatnost da su obje bijele je $\frac{1}{4}$, obje crne $\frac{1}{4}$ i da je jedna bijela, a druga crna vjerojatnost je $\frac{1}{2}$. Zamisli da si u vrećicu dodao još jednu crnu kuglicu. Sad imaš mogućnosti: 2 bijele i 1 crna (vjerojatnost $\frac{1}{4}$ jer taj slučaj imamo ako su obje bile bijele), 3 crne (vjerojatnost $\frac{1}{4}$) i 2 crne, 1 bijela (vjerojatnost $\frac{1}{2}$). Ako bismo sad izvlačili jednu kuglicu iz te vrećice s 3 kuglice, vjerojatnost da smo izvukli crnu je $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ (ako su 2 bijele i 1 crna, vjerojatnost da smo izvukli crnu je $\frac{1}{3}$) plus $\frac{1}{4} \cdot 1$ (ako su sve tri crne, sigurno smo izvukli crnu) plus $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ (ako su 2 crne i 1 bijela, vjerojatnost da smo izvukli crnu je $\frac{2}{3}$), što sve skupa daje vjerojatnost izvlačenja crne $\frac{2}{3}$. No, s druge strane, to je jednako vjerojatnosti izvlačenja crne samo ako su u vrećici 2 crne i 1 bijela. Dakle, nakon dodavanja crne kuglice u vrećici su bile 2 crne i 1 bijela, odnosno najvjerojatnije (matematičari bi rekli *gotovo sigurno*) je od 2 kuglice u vrećici jedna bijela, a druga crna (odnosno, vjerojatnost tog sastava nije $\frac{1}{2}$ = 50 % nego 1 = 100 %).

[3]Ovisno o tome koje brojeve tu odabereš, može se dogoditi da neki od brojeva u zadnjem koraku bude negativan.