Anali Zav. za povij. znan. HAZU u Dubrovniku, sv. XXXI/1993, str. 31—44 

Izvorni znanstveni članak
UDK 530.1. GRADIĆ, S.
Primljen 24.XI.1992.

Zdravko Faj

Pedagoški fakultet, Osijek

# STAV STJEPANA GRADIĆA O PRIMJENI NEDJELJIVIH DIJELOVA (INDIVIZIBILA) U FIZICI

*Dubrovčanin S. Gradić (1613–1683) je izložio svoje mišljenje o Cavalierijevoj metodi, tj. da se iz odnosa indivizibila može zaključiti o odnosima kontinuuma u pismu H. Fabriju. Na jednom primjeru dokazuje da iz primjene navedene metode i shvaćanja da je površina sastavljena od crta, a crta od točaka slijedi paradoks. Zaključuje da indivizibile treba izbaciti iz primjene. Zbog toga pri tumačenju slobodnog pada dopušta da se stezanje vremenskih intervala nastavlja neograničeno, pa oni teže k nuli. Njegov stav o kontinuumu je vrlo sličan s mišljenjem T. Bradwardinea.*

## 1. Uvod

Dubrovčanin Stjepan Gradić (1613–1683) sudjelovao je u mnogim interesantnim raspravama prednjutnovskog doba. O opsegu njegova rada govore brojna pisma i rukopisi, kojih se dio nalazi u Vatikanskoj biblioteci, sakupljen u tridesetak svezaka. Prvi poticaj i interes za matematiku potječe vjerojatno još iz Dubrovnika, jer je Gradićev prvi učitelj, Ignjat Tudišević (Tudisić), bio odličan matematičar i prijatelj M. Getaldića. Na njega je znatno utjecao studij filozofije u Rimu, koji je bio u duhu aristotelizma. Međutim, tek dolaskom na studij teologije u Rimu, kad se našao u krugu vrsnih matematičara koji su bili pod utjecajem Galileijevih učenika Torricellija i Castellija, počeo se i samostalno baviti matematikom. Na kasniji njegov rad i razvoj bitno je utjecalo formiranje znanstvenoga kruga švedske kraljice Kristine i neposredni kontakti s tada najpoznatijim talijanskim matematičarima i fizičarima, kao s M. A. Riccijem, H. Fabrijem. V. Vivianijem i A. Borellijem.[1]

Tvorac atomističke koncepcije materije Demokrit vjerojatno je i pokretač sličnih shvaćanja u matematici. Po toj koncepciji kontinuum je sastavljen od »nedjeljivih« dijelova (indivizibila). Platon je bio pod utjecajem Demokrita te je točku definirao kao ono što začinje crtu ili kao indivizibil crte ([2], str. 302). U Platonovoj školi važno je mjesto imao pojam nedjeljive crte koji je izgradio Platonov učenik Ksenokrat ([3], str. 49).

Aristotel je, nasuprot tome, u svojoj »Fizici« isticao da ništa što je neprekinuto nije nedjeljivo ([2], str. 303). Za njega je nedjeljivi dio crte točka, no nemoguće je da se crta kao kontinuum sastoji od nedjeljivih točaka, a isto tako i vrijeme nije sastaljeno od nedjeljivih trenutaka. Općenito, za njega je kontinuum djeljiv na dijelove koji su i sami djeljivi i ne mogu se svesti na nešto što je dalje nedjeljivo. Granica, kao npr. točka koja dijeli crtu na dva dijela, jest indivizibil, koji nema istu dimenziju kao kontinuum.

Demokrit je razvio koncepciju diskretnog i sastavljivog kontinuuma i postavio osnove tzv. diskretne matematike, u osnovi koje je razlaganje geometrijskog tijela na najtanje listove (površine), povšine na niti (crte) i crte na točke, koje su dalje nedjeljive. Najbitnija odlika takvog shvaćanja matematičkih objekata bilo je negiranje njihove beskonačne djeljivosti. Tu koncepciju su dalje razvijali Platon, Epikur i Lukrecije Kar. Vrlo slabo mjesto atomističke koncepcije kontinuuma bilo je objašnjenje sjedinjenja nedjeljivih elemenata u jednu cjelinu i upravo je to i izazvalo kritičke primjedbe protivnika, a posebno Aristotela ([4], str. 15). Za Aristotela je neprekidno samo po sebi nešto zatvoreno i nesastavljivo od nedjeljivih dijelova. Nemoguće je da se crta sastoji od nedjeljivih dijelova, pa ni od točaka, jer nedjeljivo nema dijelova, pa ni krajnjeg dijela, te granica jednog i idućeg nedjeljivog ne može biti jedno, nego bi uvijek dva nedjeljiva pala skupa ([3], str. 60). Za Aristotela je neprekinuto sve što je djeljivo, pa se stoga i kontinuum također sastoji od dijelova koji su i sami dalje beskonačno djeljivi. Upravo zbog toga Aristotel vidi rješenje u potencijalnoj a ne u aktualnoj beskonačnosti. Bez obzira na razliku između Demokritova i Aristotelova rješenje kontinuuma, može se u njima uočiti i jedna zajednička osobina. Oba kontinuuma se sastavljaju, prvi od nedjeljivih dijelova, a drugi od dijelova koji su dalje djeljivi do beskonačnosti ([4], str. 19).

Diskusija o pitanju kontinuuma nastavljena je i u srednjem vijeku. I dalje se s jedne strane javljaju već spomenuta shvaćanja o atomističkoj strukturi i nasuprot njima ona koja su slijedila Aristotela. Jedan od najistaknutijih protivnika nedjeljivih dijelova bio je T. Bradwardine (1290–1349). On je dao i preglednu klasifikaciju svih dotadašnjih pogleda na kontinuum, a zatim izložio svoje mišljenje, koje je po nekim značajkama slično Aristotelovu, ali se od njega i razlikuje, te predstavlja u stvari jednu dalju razvojnu etapu. U radu »Tractatus de continuo...« negira bilo kakvu sastavljivost kontinuuma i postojanje u kontinuumu od njega različitih dijelova.[1] Naime, ako se spoje dva tijela, tada nestaju dvije površine i namjesto njih ostaje jedna, a isto tako ako se točkom razdijeli dužina na dva dijela, tada se umjesto jedne dužine javljaju dvije. Zbog toga ni točke, ni crte, ni površine ne sastavljaju kontinuum, već čine samo vanjske granice. Točka tako više nije dio kontinuuma, već samo oznaka da između dva primaknuta dijela nema ničeg protežnog. Tako već krajem 14. stoljeća dolazi do značajne promjene od koncepcije kontinuuma koji se sastavlja (bilo od nedjeljivih dijelova ili pak od dijelova djeljivih do beskonačnosti) do koncepcije u kojoj je neprekinut i u kojoj točka nije dio kontinuuma. Po toj koncepciji u kontinuuma se mogu samo označiti pojedine točke, no sam po sebi kontinuum je lišen bilo kakvog sastavljanja i ne raspada se na zasebne točke. Ta nova koncepcija kontinuuma, daljim doprinosima Newtona, Leibniza i Cauchyja, preobrazila se u skladnu teoriju »beskonačno malih veličina« koje su osnova infinitezimalnog računa ([4], str. 27–30).

U 17. stoljeću još su uvijek, kao i u starom vijeku, problemi kontinuuma i njegova sastavljanja, a s tim u vezi i pojam beskonačnosti, pobuđivali pažnju mnogih. Te je probleme aktualizirao G. Galilei u svom radu »Discorsi e dimostrazioni matematiche...« [6].

Galiei, Kepler i Cavalieri bili su osnivači novih nastojanja koja su se ostvarila u radovima Newtona, Leibniza i drugih. Svaki je od njih dao u tom razvoju svoj doprinos. Tako Galilei, za razliku od Demokrita, smatra da se konačni kontinuum sastoji od besko-

[1] Naš renesansni filozof i matematičar Franjo Petrišević ([5], str. 96) zastupao je mišljenje da je kontinuum samo jedan i da ih ne postoji više. Za razliku od Bradwardinea, Petrišević priznaje postojanje indivizibila, tako je nedjeljivi dio crte opet crta.

načno mnogo nedjeljivih, koji pritom nemaju veličinu, jer bi inače beskonačno mnogo nedjeljivih dalo i beskonačnu veličinu. Svoje atomističke nazore Galilei je primijenio i u svojoj mehanici. Za njega je tijelo sastavljeno od površina, površina od crta, crta od točaka, te mu je dimenzija »indivizibila« za jedan manja od kontinuuma. Kepler i Cavalieri su se koristili pojmom indivizibila u matematičkim istraživanjima, a zbog svoje originalnosti Cavalieri je imao mnogo sljedbenika i učenika. Tako u prvoj polovini 17. stoljeća većina matematičara prati rad Galileija, Keplera i Cavalierija, jer su oni, a i drugi kao npr. Torricelli, koristeći se teorijom indivizibila dolazili do novih rezultata.

O mnogim problemima iz tog područja raspravljalo se i u znanstvenom krugu švedske kraljice Kristine krajem šezdesetih godina 17. stoljeća. Rezultati nekih od tih rasprava objavljeni su u Gradićevim disertacijama [7], a neka Gradićeva razmišljanja ostala su sačuvana u rukopisu [8].

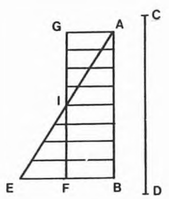
## 2. Stav S. Gradića o indivizibilima u radu »Peripateticae philosophiae...«

Prvi objavljeni Gradićev rad »Peripateticae philosophiae...« [9] ima za osnovu Aristotelovu filozofiju i odraz je Gradićeva školovanja. Interesantno je stoga razmotriti što je od toga poznavao S. Gradić, odnosno što je o indivizibilima izložio u tom radu. Tim problemima Gradić posvećuje točku 49 (str. 16) u kojoj, pozivajući se na Aristotela, ističe da je svojstvo veličina i svih prirodnih tijela da su neprekinute. Diskretne su veličine sastavljene od indivizibila kao od brojeva, dok se neprekinute ne mogu sastaviti od »indivizibila«, i to ni od konačnog broja, niti od beskonačnog, već su sastavljene od dijelova djeljivih u beskonačnost. No ta beskonačna djeljivost nije aktualna, nego potencijalna. Indivizibili su pak granice ili se njima povezuju veličine itd. Iz navedenog se lako može zaključiti da Gradić samo sumarno prepričava Aristotela, a da pritom i ne spominje neka druga mišljenja.

## 3. Galileijeva primjena indivizibila u fizici

Galilei je preuzeo interpretaciju jednoliko ubrzanog gibanja od Oresmea, koji prijeđeni put predočava površinom pravokutnog trokuta kojem su katete vrijeme i konačna brzina. Od Oresmea preuzima i dokaz da je prijeđeni put kod tog gibanja jednak putu koji bi tijelo prešlo gibajući se jednoliko polovinom konačne brzine. U dokazu navedene tvrdnje Galilei predočava površinu trokuta kao skup crta. Drugim riječima, dokaz temelji na teoriji »nedjeljivih dijelova« ili »indivizibila«. Mnogi su znanstvenici u narednom periodu nastojali naći teorijsku podlogu za teoriju indivizibila ili pak, budući da su ubrzo opažene kontradikcije koje su slijedile iz njene primjene, nadomjestak ili zamjenu za nju. U 17. stoljeću bilo je više onih koji su tražili egzaktniji dokaz od Galileijeva, među njima, pored Ch. Huygensa i drugih, bio je i Stjepan Gradić.

Indivizibili su tako našli svoju primjenu u fizici u radovima Galileija, no Galilei nije ulazio u objašnjenje prirode indivizibila te površine, niti je objasnio što oni fizički znače. Upravo zbog toga ta su pitanja unosila velike probleme i suprotnosti koje je trebalo objasniti. Navedenu tvrdnju o jednakosti putova Galilei dokazuje u prvoj teoremi svojih rasprava ([10], str. 248 i [3], str. 135.). AB je vrijeme u kojem tijelo pada, počevši iz mirovanja u točki C. U toku tog vremena brzina se povećava i na kraju vremenskog intervala jednaka je EB. Spajanjem točaka A i E dobije se trokut AEB u kojem su paralele s EB stupnjevi brzina koje se povećavaju počevši od A (sl. 1.). Ako se EB raspolovi u F i konstruira pravokutnik FBAG, tada je, dokazuje Galilei, njegova površina jednaka površini trokuta AEB. U dokazu se prvo ističe da je površina trapeza AIFB zajednički dio pravo-




*Sl. 1. Crtež uz Galileijev dokaz da je prijeđeni put kod jednoliko ubrzanog gibanja jednak putu koji bi tijelo prešlo gibajući se jednoliko polovinom konačne brzine.*

kutnika i trokuta, a skup paralela u trokutu IEF jednak sumi paralela u trokutu GIA. Na osnovi toga se zaključuje da je suma svih paralela u trokutu AEB jednaka sumi svih paralela u pravokutniku AGFB. Galilei ističe da svakom trenutku vremena odgovara točka na crti AB i tom točkom povučena paralela koja je omeđena trokutom AEB, koja je stupanj brzine. Paralelne crte unutar paralelograma skup su jednakih brzina. Iz toga slijedi da sve trenutne brzine ubrzanog gibanja, koje se povećavaju u trokutu AEB, odgovaraju crtama paralelograma AGFB, jer ono što nedostaje u trenucima iz prvog dijela gibanja u trokutu GIA nadoknađuje se u trenucima iz drugog dijela gibanja u trokutu IEF. Na osnovi takvog dokaza Galilei konačno zaključuje o jednakosti prijeđenih putova koje tijelo prelazi jednoliko ubrzano i jednoliko, ako se giba polovinom konačne brzine koja je dostignuta pri ubrzanom gibanju.

Međutim, ovako izveden dokaz nije mnogima bio dovoljno egzaktan i strog. Pogotovo kad su se pojavile sumnje u Cavalijerijevu »teoriju indivizibila«, jer se moglo uočiti da ta teorija nema neku čvrstu teorijsku osnovu[2], a s druge strane, i pri primjeni su se javljali paradoksi. Sam Cavalieri nije se uopće upuštao u tumačenje kontinuuma, no po njegovu mišljenju čak i nije neophodno znati kako se kontinuum sastoji od nedjeljivih dijelova, nego je dovoljno samo uočiti odnos između dva kontinuuma i tada mora postojati isti odnos i među nedjeljivim dijelovima i obratno. [13][3]

## 4. Dokaz S. Gradića da primjena Cavalierijeve »Teorije indivizibila« vodi do apsurda

Vjerojatno su upravo te činjenice potakle i S. Gradića da i on o njima razmišlja i da o njima raspravlja na sastancima znanstvenog kruga švedske kraljice Kristine. O njegovu mišljenju o problemima kontinuuma možemo saznati iz druge disertacije [7] u kojoj dokazuje da je put kod slobodnog pada jednak površini Galileijeva trokuta.[4] Iako u tom radu nigdje i ne spominje »indivizibil«, iz njegova se dokaza lako može zaključiti da ne prihvaća Galileijevo stajalište da je crta sastavljena od točaka, vrijeme od trenutaka, a površina od crta. To detaljnije iznosi u korespondenciji s H. Farijem i M. A. Riccijem koja je ostala sačuvana zajedno s mnogi pribilješkama u njegovu manuskriptu. Među bilješkama interesantna je jedna u kojoj Cavalierijevom metodom ([8], str. 267d) uspoređuje površinu

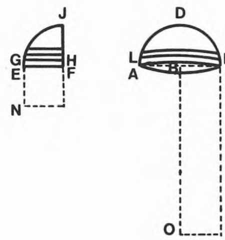
[2] Cavalieri je u svojim studijama (Exercitationes geometricae sex, 1647.) razmatrao dokaze protiv metode nedjeljivih dijelova koje je postavio P. Guldin. U svojim daljim razmatranjima dužine je zamijenio »nitima«, tj. površinama vrlo malih širina.

[3] Kad je 1634. god. B. Cavalieri završio svoju geometriju [11], zamolio je Galileija da dâ uvodna objašnjenja i da razradi pitanje indivizibila u vezi s gibanjem ([12], str. 237).

[4] Naslov rasprave je: »De causa naturali motus accelerati et aequabilibus ejus in descensu corporum gravium ad aequalia momenta temporum incrementis« ([7], str. 22–38).

kruga s površinom trokuta kojem je baza opseg kruga, a visina jednaka polumjeru. Slično je taj zadatak već metodom indivizibila riješio Kepler ([14], str. 6478), a Gradić ga na Riccijevu inicijativu razmatra kao primjer iz kojeg se vidi da iz jednakosti površina ne slijedi i jednakost opsega[5], a što je u vezi sa sadržajem iz treće Gradićeve disertacije u kojoj se raspravlja o paradoksu kojim Galilei dokazuje jednakost točke i crte.[6] Međutim, Gradić taj primjer nije unio u tekst disertacije, što pokazuje njegov negativan stav prema Cavalierijevoj metodi. Dio bilježaka ([8[, str. 267d–269d) sređen je na str. 269d u obliku pisma koje je vjerojatno bilo namijenjeno H. Fabriju, s kojim je Gradić raspravljao o sličnim problemima[7]. U pismu na jednom primjeru pokazuje da se primjenom Cavalierijeve metode, tj. ako se iz odnosa indivizibila zaključuje o odnosu kontinuuma,[8] može doći do apsurdnog rezultata.

Gradić uspoređuje indivizibile površine polukugle ADC i kvadranta EJ[9]. Uzima da je površina polukugle sastavljene od kružnica (crta) počevši od kružnice najvećeg polumjera, koja je označena s AC, pa sve do D (sl. 2). Na isti način dijeli kvadrant koji ima




*Sl. 2. Crtež iz Gradićeva rukopisa ([8], str. 269d) uz dokaz da primjena Cavalierijeve »teorije indivizibila« vodi do apsurda.*

[5] Na taj je primjer M. A. Ricci upozorio Gradića u jednom pismu ([8], str. 190). U njemu Ricci napominje da će o ostalom što Gradić iznosi protiv Cavalierijeve teorije indivizibila raspraviti posebno.

[6] Naslov rasprave je: »De loco Galilei, qui punctum lineae aequale pronuntiat« ([7], str. 29–55).

[7] U rukopisu (vjerojatno pismu) je na kraju dopisano da je to još jedan paralelogizam sličan onome u vezi s figurom sinus. Iako u pismu nije naznačen primalac, može se pretpostaviti da je to H. Fabri, jer se ista figura spominje i u pismu koje je Gradić uputio Fabriju u vezi s diskusijom o Galileijevu trokutu ([8], str. 214d). Fabri je objavio i rad pod naslovom »Opusculum geometricum de linea sinum et cycloide«. Dopisani tekst je na talijanskom jeziku: »VR resti semita d'notar il paralogismo che certamente deve essere nascita nell sup$^{to}$: discorso e come l egualita di quella sua figura sinum, cha risulta da uno simile discorso, subsiste«. Na kraju se nalazi i potpis S. Gradića.

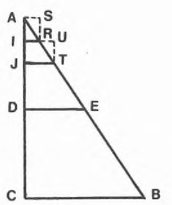
[8] Cavalieri polazi od »Figura procedere dicitur per sua elementa in qua accipiuntur parallelae basi lineae, si basis linea est, vel superficies parallelae, si basis est superficies« ([15], str. 26). Naime, Cavalieri je dao varijantu računa u kojem točka pri gibanju daje crtu, crta površinu. Polazeći od toga, spajanjem (nizanjem) dužina dobivao je površinu, a od površina tijelo. Ta shvaćanja dovela su ga do poznatog Cavalierijeva principa. Naime, ako tijela imaju jednake visine i na istim visinama jednake površine presjeka, tada imaju i jednake volumene.

[9] Dokaz je izveden na dva mjesta u Gradićevu manuskriptu [8], prvi na str. 168, a drugi na str. 169. Drugi dokaz je nešto opširniji i neznatno se razlikuje od prvog. Uz njega je dopisana primjedba na talijanskom jeziku uz Gradićev potpis. Uz oba teksta dodan je crtež (sl. 2). Tekst nije lako pročitati, a početak i svršetak glase: »Sit hemispherium ADC et quadrantis eiudem altitudinis EJ erit pheripheria ABC maioris circuli hemispherij ad ommnes peripherias circulos parallellos in superficie sphaerica existentes ut sinus totus EF quadrantis EJ ad reliquot omnes sinus sibi parallellos in quadrantis superficie existentes . ... Sed rectangulum CO est equale superficiei hemispherij ergo et superficiis illa quadrato superficiei quadrantis«.

jednaki polumjer kao i polukugla na niz paralelnih dužina počevši od najveće EF pa sve do J. Između indivizibila kvadranta (to su crte EF, GH, pa sve do J) i indivizibila površine polukugle (to su kružnice AC, LM, pa sve do D) postoji stalan odnos. Isti odnos biti će i između dva kontinuuma, dakle površine polukugle i kvadranta. Isti odnos je i između najveće kružnice AC, koja neka je CP, i najduže crte kvadranta EF. Isti odnos bit će i između površine pravokutnika CO koji se dobije tako da se dužina (crta) CP uzme toliko puta koliko je točaka na dužini OP (OP=EF) i površine kvadrata FN koji se dobije tako da se dužina EF uzme toliko puta koliko je točaka na dužini EF. No, kako je površina pravokutnika CO jednaka površini polukugle, iz toga slijedi da je i površina kvadrata FN jednaka površini kvadranta EJ, a to je apsurd. Ovaj apsurd, koji slijedi iz primjene shvaćanja da je površina sastavljana od crta, crta od točaka, a i drugi za koji je vjerojatno znao,[10] bili su razlogom što je Gradić smatrao da primjena tih shvaćanja u fizici nije pogodna, a nije to ni u smislu starih egzaktnih metoda.

## 5. Rasprave o slobodnom padu i tzv. Galileijevu trokutu

Problem slobodnog pada i njegove interpretacije bio je već i prije objavljivanja Galileijeva rada predmetom rasprave R. Descartesa i I. Beeckmanna, i to prilikom Descartesova boravka u Nizozemskoj od 1617. do 1619. godine ([17], str. 152–153 i [3], str. 157)[11] Descartes primjenjuje teoriju impetusa i slično kao i Galilei 1604. godine polazi od pogrešnog zakona da je brzina tijela koje slobodno pada proporcionalna s prijeđenim putom.[12] Za razliku od Descartesa Beeckmann poznaje ispravan zakon. Služi se grafičkim prikazom (sl. 3). Ako je AD neko jedinično vrijeme, onda je površina trokuta ADE pri-




*Sl. 3. Crtež tzv. Galileijeva trokuta iz rasprave Beeckmann-Descartes.*

jeđeni put za to vrijeme. Površina trokuta ACB je prijeđeni put za dva jedinična vremena. Da bi dokazao navedenu tvrdnju služi se »teorijom impetusa« i predodžbom površine sastavljene od indivizibila. U prvom vremenskom trenutku tijelo prihvaća impetus koji je u tijeku cijelog intervala vremena AI nepromijenjen. Tijelo tada, gibajući se jednoliko, prevali put jednak površini pravokutnika AIRS. Slično će i u drugom intervalu vremena IJ, budući da će impetus biti dvostruk, biti i put IJTU također dvostruk, itd. Iz prikaza se vidi da će put prevaljen u bilo kojem vremenu biti predočen površinom trokuta uvećanom

[10] Neke od paradoksa isticao je već E. Torricelli ([16], str. 315–316), a neke primjere protiv teorije nedjeljivih dijelova dao je i P. Guldin ([13], str. 61).

[11] Podaci o toj raspravi nalaze se u Descartesovu pismu M. Mersenneu od 13. studenog 1629. godine.

[12] Da je i Galilei smatrao da je brzina tijela koje slobodno pada proporcionalna s prijeđenim putom vidi se iz pisma P. Sarpiju iz 1604. god. ([18], str. 79).

za male međusobno jednake trokutiće ARS, RTU, itd. Beeckmann zaključuje da će za manje vremenske intervale i površine trokutića biti manje. Konačno, ako se smanje do indivizibila površine, bit će površine trokutića nula, a put će biti predočen površinom tzv. Galileijeva trokuta. Ovo Beeckmannovo rješenje vrlo je slično Fermatovoj metodi za rješavanje ekstrema, jer on promatra indivizibile površine tog pravokutnog trokuta i na kraju stavlja da su oni jednaki nuli ([3], str. 157). Interesantno je istaći da Beeckmann u jednom kasnijem sličnom radu čini istu grešku[13] kao i Descartes uzimajući da je brzina kod slobodnog pada proporcionalna s prijeđenim putom ([17], str. 153).

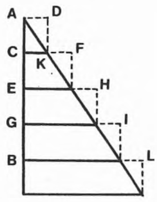
H. Fabri, za razliku od Beeckmanna, uzima da ti mali trokutići ne iščezavaju, nego da samo padaju ispod naših osjeta ([3], str. 158). U tom slučaju put je predočen nazubljenim likom ASRUT... BC, a intervali AI, IJ, ... su »nedjeljivi« fizički trenuci vremena. Zbog toga se prirasti putova ne odnose kao 1:3:5: ... (kao neparni brojevi), kao što je to utvrdio G. Galilei, nego kao 1:2:3: ..., što slijedi iz Fabrijeve pretpostavke. Iako je H. Fabri znao da je Galilei zakon slobodnog pada potvrdio pokusom, smatrao je da pokus ne može odlučiti u ovom slučaju, jer se radi o nedjeljivim trenucima koji su ispod mogućnosti opažanja. Razlika prijeđenih putova predočenih trokutom ili pak nazubljenim likom ne može se opaziti, te se u praktične svrhe mogu upotrijebiti obje pretpostavke. Na taj se način H. Fabri nalazi na Cavalierijevim pozicijama i pritom svjesno nedjeljive dijelove uvodi i u fiziku. No to i nije ništa neobično jer je poznato da je Fabri bio Cavalierijev učenik i da je prihvatio njegove ideje i u matematici i njima se obilno koristio, pa čak ih umnogome i unaprijedio. Čak se i W.G. Leibniz u radovima iz mlađih dana pozivao na Fabrijeve radove u vezi s indivizibilima ([15], str. 5).

## 6. Gradićevo rješenje

Gradićev rad rezultat je nastojanja da se interpretaciji slobodnog pada da stroži oblik.[14] Neposredni uzrok pada tijela je težina. Kad tijelo počne padati, ono dalje ustraje u tom gibanju. Slično kao i kad se rukom baci kamen, u njega se utiskuje impetus, te se dalje giba iako više nije u vezi s uzrokom. No težina i dalje jednako djeluje, i to potpuno neovisno da li tijelo miruje ili se giba i ponovo u tijelo utiskuje impetus kao da i nema onog prethodnog gibanja. Ova dva gibanja sastavljaju treće, kojem je brzina jednaka sumi dvaju prethodnih, jer su oba na istom pravu i u istom smjeru. U idućem trenutku, zbog djelovanja težine koja je nerazdvojiva od tijela, sve se ponavlja. rezultat toga je da se brzina tijela u svakom novom trenutku povećava i pritom, zbog djelovanja stalno jednakog uzroka, prirasti brzine uvijek su jednaki. Na osnovi ove teorije slobodnog pada Gradić dokazuje da je prijeđeni put za tijelo koje slobodno pada jednak površini pravokutnog trokuta kojem je stranica AB vrijeme, a druga kateta BL konačna brzina na kraju puta (sl. 4). Dužina AB podijeljena je na jednake dijelove, vremenske intervale AC, CE, EG itd. Zbog

[13] René Dugas na kraju komentara dodaje da sve to ostaje i nadalje vrlo konfuzno, unatoč Duhemovu pokušaju da ta pitanja rasvijetli.

[14] Ni Ch. Huygens nije bi zadovoljan Galileijevim dokazom, pa je i on na dva mjesta u svojim radovima razmatrao isti problem. Tako se u rukopisu »De motu corporum ex percussione« iz godine 1654. ([19], str. 114–116) koristi istim geometrijskim prikazom kao i Galilei. Dokazuje da iz pretpostavke o nejednakim putovima za jednoliko ubrzano i jednoliko gibanje s polovinom konačne brzine slijedi paradoks. Sličan dokaz nalazimo i u objavljenom radu »Horologium ...« ([20], str. 36–38).




*Sl. 4. Crtež Galileijeva trokuta iz Gradićeve rasprave o jednoliko ubrzanom gibanju ([7], str. 22–38).*

trenutnog djelovanja težine tijelo dobije početnu brzinu AD i dalje se giba jednoliko. Prijeđeni put u prvom intervalu vremena jednak je površini pravokutnika CAD. Tijelo bi se i dalje nastavilo gibati jednoliko da ponovo ne djeluje težina, i to jednako kao da tijelo miruje. Zbog istog uzroka u tijelo se utiskuje novi impetus, jednak prethodnom. Taj impetus je uzrokom da tijelo dobije i novi prirast brzine, koji je po iznosu jednak brzini koju je već tijelo dobilo u točki A. Budući da su gibanja na istom pravcu i istom smjeru, brzina se u točki C udvostručava i iznosi CF. U idućem vremenskom intervalu CE tijelo se giba jednoliko i pritom prijeđe put koji je jednak površini pravokutnika ECF. U narednom trenutku ponovo zbog istog uzroka, prirast brzine je isti, pa je brzina trostruka u odnosu na početnu itd. Vremenski intervali AC, CE, EG, ... izabrani su po volji, no isto će vrijediti i ako se raspolove ili pak i dalje smanjuju. Smanjivanjem vremenskih intervala nazubljeni lik će imati sve manje i manje zupce i time će se površinom sve više približavati površini trokuta ABL. Za razliku od Fabrija, Gradić se u ovom smanjivanju vremenskog intervala ne zaustavlja na »nedjeljivim fizičkim trenucima«, nego dopušta da se broj intervala povećava tako da teži u beskonačnost. Brzina u trenutku A bit će tada minimalna i svodi se na mirovanje iz kojega gibanje započinje, a nazubljeni lik prelazi u savršeni i apsolutni trokut.

U ovim Gradićevim tvrdnjama i zaključcima Ž. Dadić je uočio i istakao vrijednost njegova doprinosa, jer se on bez sumnje među prvima približio egzaktnom tumačenju ovog problema pomoću graničnog procesa [21].

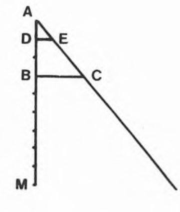
Dok Beeckmann i Fabri nalaze rješenje problema u okviru »teorije indivizibila«, ali se rješenja razlikuju, jer Beeckmann indivizibil izjednačava s nulom, a za Fabrija je različit od nule, Gradić za razliku od njih smatra da indivizibil treba izbaciti iz primjene. Gradić očito dopušta da se stezanje vremenskih intervala nastavlja neograničeno, pa oni tako teže k nuli. Tim postupkom površina zupčastog lika prelazi u tzv. apsolutni trokut [22].

## 7. Fabrijeve primjedbe i Gradićevi odgovori

Pored već spomenutih primjedbi koje je Fabri dao na Gradićevu disertaciju, on se u pismu koje je uputio 7. siječnja 1661. godine[15] posebno osvrće na Gradićevu tvrdnju prema kojoj nazubljeni lik prelazi u savršeni trokut ako se broj intervala povećava i konačno teži u beskonačnost. Uvođenje beskonačno mnogo trenutaka, smatra Fabri, stvara velike poteškoće.[16] Ako je AB vrijeme (sl. 5), trokut ABC prijeđeni put, a paralelne dužine DE,

[15] Fabrijevo pismo i Gradićev odgovor pisan u nekoliko varijanti nalaze se u Gradićevu manuskriptu ([8], str. 211d–219). Fabrijevo je datirano »VII idus Januarias anno MDCLXI«.

[16] »Praeterea in triangulo Galileano, suppositis infinitis momenta ingens mihi semper fuit difficultas« ([8], str. 211 d). Već je Eudokso upisivao mnogokute u krug. Povećavanjem broja stranica




*Sl. 5. Crtež iz Gradićeva odgovora Fabriju ([8], str. 217). Sličan crtež je i u Fabrijevu pismu Gradiću od 7. siječnja 1661. godine (trokut ABC bez produženja do M).*

BC, ... stupnjevi brzina, tada su bez sumnje, smatra Fabri, pojedine točke crte AB vremenski trenuci, a to znači da ako za cijelo vrijeme AB tijelo prijeđe put jednak površini trokuta ABC, tada i u momentu D prijeđe put DE, a u momentu B put BC. I dalje, nastavlja Fabri, ako AB nije ništa drugo nego beskonačno mnogo točaka ili pak beskonačno mnogo vremenskih trenutaka, onda i trokut ABC nije ništa drugo nego suma svih svojih crta paralelnih s DE i BC, kojih je jednako tako beskonačno mnogo kao i trenutaka vremena. U tom bi slučaju, zaključuje Fabri, tijelo moralo u istom trenutku biti na različitim mjestima, što je pobijao već i Galilei[17]. No najveća je poteškoća, prema Fabriju, u najmanjem pravokutniku, jer tada u njemu nestaje jednoliko gibanje, a zbog njega dalje i gibanje u trapezima. Prema tome, stranica pravokutnog trokuta ipak mora ostati nazubljena sve dok zupci ne padnu ispod osjeta, jer inače gibanje ne može početi. Zbog toga je neophodno uvesti »nedjeljive fizičke trenutke«.[18]

Odgovarajući na Fabrijeve primjedbe u pismu pisanom 8. siječnja 1661. godine ([8], str. 213d–214d)[19], Gradić se posebno osvrće na spomenuta pitanja. Tako navodi da u interpretaciji Galileijeva trokuta nije nigdje tvrdio da je površina trokuta uistinu put koji tijelo prijeđe u danom vremenu slobodno padajući, niti je AB vrijeme trajanja gibanja, a DE i BC stupnjevi dobivene brzine, nego su te tri veličine samo njihove mjere. Tako kad dijelimo dano vrijeme, u stvari dijelimo dužinu AB prema veličini vremena, a jednako tako i momentima D i B odgovaraju određene brzine DE i BC. Konačno, i putovi za različita vremena u onom su odnosu u kojem su dijelovi trokuta koji odgovaraju veličini prijeđenih putova. Izražavanje pak tih putova pomoću površine trokuta prikladnije je od predočavanja ravnom crtom zbog jednostavnosti. Put se, naime, povećava s kvadratom proteklog vremena i odnos će biti isti ako se umjesto površine postavi ravna crta koja se povećava s kvadratom u odnosu na crtu koja mjeri vrijeme, kao što je navedeno kod Galileija.[20] Tako, ako je npr. tijelo za vrijeme AD prešlo put AD, tada će za vrijeme AB,

površine mnogokuta su se približavale površini kruga, ali on nije dopuštao da se površina iscrpi do kraja, jer bi time priznao i aktualnu beskonačnost. Tek je G. S. Vincent 1647. god. tvrdio da se površina može iscrpsti.

[17] Galilei smatra da je porast brzine neprekinut, tako da u svakom vremenskom intervalu tijelo ima beskonačno mnogo različitih brzina. Simplicio ističe da one ne mogu tada nikada biti iscrpljene. Tu »aporiju« Galilei rješava tako da i u vremenskom intervalu ima beskonačno mnogo trenutaka koji odgovaraju svakom stupnju brzine. Jer, ako bi tijelo održalo nepromijenjenu brzinu u toku konačnog vremena, moralo bi je održati i dalje. ([12], str. 256–257).

[18] Tekst pisma dosta je nečitak, no čini se da Fabri postavlja dilemu ili »fizički nedjeljivi trenuci« ili pak »morule«.

[19] Na tim se stranicama nalazi odgovor Fabriju, no bilješke i skica odgovora nalaze se sve do str. 219.

[20] Ovdje Gradić misli na II. teoremu iz Galileijevih »Rasprava« ([10], str. 249–250. i [3], str. 136).

koje je trostruko AD, prijeći put AM (sl. 5), koji je jednak deveterostrukom prvom. Iz ovoga prvog dijela Gradićeva odgovora uočavamo da on nalazi rješenje u tome što ističe da su točke, crte i površine samo pogodan način prikazivanja fizičkih veličina. One omogućavaju da se njihovim iznosima kao duljinom dužine ili površinom izraze iznosi fizičkih veličina, ali nikako, ističe Gradić, sama površina nije put. Iznosom površine trokuta izražena je duljina puta jer je to racionalnije, inače bi zbog njegova povećavanja s kvadratom vremena trebala suviše duga crta. Navedene poteškoće ne mogu se riješiti, ističe dalje Gradić, ako se uzme da tijelo u trenutku D prelazi neki put DE ili pak u trenutku B neki put BC, jer tim crtama zaista ne prolazi tijelo koje pada. Naime, tada bi odnos ukupnog puta za dano vrijeme i puta u trenutku D bio jednak odnosu površine trokuta prema DE. Budući da DE nije dio površine čija je crta, put u trenutku D ne pridonosi ukupnom putu bez obzira na to koliko je takvih crta. I tako, završava Gradić, ne može se reći da se tijelo u istom trenutku nalazi na različitim mjestima. Ako se usporedi tekst istog pisma, pisan vjerojatno u prvoj verziji (str. 217d), može se uočiti razlika. Tu je, naime, navedeno da DE nije dio površine, iako je crta površine, pa čak i ako je beskonačno mnogo crta. U konačnoj verziji pisma riječ »infinitae« zamijenjena je s »quotcumque« vjerojatno zbog prigovora Fabrija, koji ističe da taj pojam unosi mnoge poteškoće. Ovdje se, kada se radi o Fabrijevu prigovoru misli na pojam »aktualne beskonačnosti«, jer su neka shvaćanja Galileija, kao npr. da je crta sastavljena od beskonačno mnogo neprotežnih točaka, unosila velike poteškoće i pri tumačenju gibanja. Iz Fabrijeva prigova i Gradićeva odgovora može se zaključiti da je Fabri shvatio Gradićevu upotrebu pojma beskonačnosti u tvrdnji da se, kada broj vremenskih intervala teži u beskonačnost, prva brzina svodi na točku A, a trokut prelazi u savršeni trokut bez zubaca, u smislu aktualne beskonačnosti. U tom slučaju, mislio je Fabri, iz Gradićeve pretpostavke slijedi da je crta sastavljena od beskonačno mnogo točaka a vrijeme od beskonačno mnogo trenutaka. Drugim riječima, Gradićeva pretpostavka vodi prema shvaćanju koje je zastupao Galilei. Ako se prihvati pretpostavka da je put sastavljen od točaka, a vrijeme od trenutaka, tada se može prigovoriti da bi sva gibanja morala biti jednako brza, jer je brzina omjer najmanje dužine i najmanjeg intervala vremena. Onima koji su smatrali da su vrijeme i put sastavljeni od nedjeljivih dijelova bilo je nužno da za objašnjenje gibanja s različitim brzinama uvedu tzv »morule« ili pak virtualnu protežnost, odnosno trebalo je dopustiti da se za isti vremenski trenutak veže više točaka prostora ili pak obratno. Galilei je problem riješio tako da je smatrao porast brzine neprekinutim i u nekom intervalu vremena je beskonačnom broju stupnjeva brzine pridruživao beskonačan broj trenutaka. Prema Fabrijevoj pretpostavci ti problemi se i ne pojavljuju jer postoje »nedjeljivi fizički trenuci« u kojima je brzina stalna i ona se i ne povećava kontinuirano, nego skokovito.[21] Što se tiče Gradićeve pretpostavke, treba reći da ga je Fabri krivo optužio. Da Gradić nije prihvaćao kontinuum koji se raspada na zasebne točke, a koji mu pripisuje Fabri, može se zaključiti i po tome što pri kraju pisma prigovara Fabriju što je u raspravu uveo i doktrinu indivizibila. To učenje, tvrdi Gradić, čini velike teškoće, koje su uvidjeli i autori i sljedbenici »geometrije indivizibila«, među koje Gradić ubraja i Fabrija ([8], str. 214d).

[21] Takvo shvaćanje indivizibila uključuje skokovitu promjenu brzine, a i impetusa koji se utiskuje u tijelo. Ono se može usporediti s promjenom energije u modernoj kvantnoj teoriji. ([3], str. 159. i 241).

## 8. Gradićeva koncepcija kontinuuma

U bilješkama koje je Gradić pravio sastavljajući odgovor Fabriju ([8], str. 212d) još konkretnije ističe da se pokazuje da niti je vrijeme sastavljeno od trenutka, niti točke sastavljaju crtu, a ni crte površinu,[22] jer neprekinute veličine ne mogu biti sastavljene od nedjeljivih, već se mogu dijeliti tako da su sve manje, pa čak i beskonačno, ali samo u potenciji. Trenutak je isto kao i točka »nedjeljiv«, dok je vrijeme neprekinuti, pa će i ono, slično kao i crta, biti djeljivo u beskonačnost. U neprekinutom vremenu kao i crti tim dijeljenjem neće se moći doći do dijela od kojeg neki drugi ne bi mogao biti još manji. Ovim shvaćanjima Gradić je blizu Aristotelu, a slične poglede nalazimo i kod našeg R. Boškovića u 18. stoljeću, koje je on iznosio u svojoj »Teoriji« [24] a i u jednom radu iz ranijeg perioda u kojem razmatra zakon kontinuiteta [25]. Tako Bošković ističe ([25], str. 25, toč. 33) da među sve ono što je neprekinuto treba ubrojiti i vrijeme, kao što smo to vidjeli kod Aristotela. Zato će se i u samom vremenu morati razlikovati, kao i kod crte, neprekinuto vrijeme od međe ili granice koja razdvaja dva neprekidna vremena, što nazivamo, navodi Bošković, trenutkom itd. Može se primijetiti da se Gradić u shvaćanju kontinuuma u jednoj nijansi razlikuje od Aristotelova shvaćanja. Aristotelov je kontinuum sastavljen od drugih kontinuuma, pa je tako crta sastavljena od drugih neprekinutih i dalje beskonačno (potencijalno) djeljivih dijelova koji su zajedno vezani granicom tj. točkom. Prema tome, i točka koja dijeli kontinuum u stvari je i sama dio kontinuuma. U svojim bilješkama Gradić ističe da crta nije dio površine, nego da je na površini. Slično bi se onda moglo zaključiti i za točku. Takvo je mišljenje vrlo blisko mišljenju Bradwardinea, za koga je kontinuum jedno neprekinuto i nesastavljivo, naime u takvom kontinuumu sve manji i manji dijelovi kontinuuma uvijek su iste dimenzije kao i sam kontinuum. U raspravi o Galileijevu trokutu Gradić odgovara Fabriju da površina nije put, dužina nije vrijeme itd., nego su to veličine kojima izražavamo njihove vrijednosti. Iz toga se može zaključiti da Gradić smatra da i točka na dužini koja označava vrijeme nije trenutak, nego označava trenutak. Tako se može shvatiti da ta točka i nije dio kontinuuma, kao što ni crta nije dio površine. Točka bi eventualno u tom kontinuumu mogla samo označiti da između dva primaknuta dijela nema ničega što se prostire. Takav stav S. Gradića u skladu je sa shvaćanjima T. Bradwardinea koja vode prema koncepciji kontinuuma koji se ne sastavlja i ne raspada se na zasebne točke i u kojem ni točke, ni crte, ni površine ne sastavljaju kontinuum, već čine samo vanjske granice. Takva koncepcija kontinuuma je kasnije, daljim doprinosima u radovima Newtona i drugih, istisnula pojam »indivizibila«, koji je u pravilu reda dimenzije za jedan manje od kontinuma i omogućila njegovo postupno preobražavanje u pojam beskonačno male veličine.

## 9. Zaključak

Gradić je poznavao probleme koji se javljaju u vezi s indivizibilima, te u raspravi s Fabrijem ističe da problem gibanja (slobodnog pada) ne bi trebalo tumačiti indivizibilima jer su već autori i nastavljači te teorije uočili njihovu nejednakost[23], koja se Gradiću čini

[22] Slično razmatranje nalazimo i kod R. Boškovića: »Nec erit superficies pars corporis, nec linea pars superficiei, nec punctum pars lineae, sed realis terminis...« (citat iz: Stay, I str. 359, toč. 96 ([23], str. 4.).

[23] Vrlo je interesantno da je Galileijevu tvrdnju o jednakosti točke i crte, o kojoj Gradić raspravlja u trećoj disertaciji [7], odobrio Torricelli (Quello che dice Galilei di un puncto eguale a una

nepremostivim problemom i zbog toga smatra da bi taj dio tvorevine inače velikog Galileija trebalo izbaciti iz primjene ([8], str. 214d) I sam Gradić pronalazi jedan zgodan primjer koji potvrđuje da primjena indivizibila vodi do apsurda ([8], str. 269d).

Niz kontradikcija o kojima se raspravljalo, a naročito o problemu kontinuuma, koji se po Galileiju sastoji od beskonačnog broja nedjeljivih dijelova, upućivao ga je da ne treba sve rušiti samo zato što je aristotelizam, jer jednako tako i Galileijevi »nedjeljivi dijelovi« unose mnoge probleme. tako možemo uočiti da »indivizibili«, koji su kod Galileija dijelovi kontinuuma, ali reda dimenzije za jedan manji od kontinuuma, ne bi mogli dovesti do pojma beskonačne male veličine, koja je Newtona, Leibniza i njihove sljedbenike dovela do pojma težnje prema granici.

U raspravi o Galileijevu trokutu Gradić odgovara Fabriju da površina nije put, dužina nije vrijeme, itd., nego su to veličine kojima izražavamo njihove vrijednosti. Iz toga se može zaključiti da Gradić smatra da i točka na dužini koja označava vrijeme nije trenutak, nego označava trenutak. Tako se može shvatiti da ta točka i nije dio kontinuuma, kao što ni crta nije dio površine. Točka bi eventualno u tom kontinuumu mogla samo označavati da između dva primaknuta dijela kontinuuma nema ničega što se prostire. Takav stav S. Gradića je vrlo blizu shvaćanjima Bradwardinea koja vode prema koncepciji kontinuuma koji se ne sastavlja i ne raspada na zasebne točke, koji je neprekidan i u kojem točke čine samo vanjske granice. Takvo shvaćanje kontinuuma moglo se preko novih ideja u radovima Newtona, Leibniza i Cauchija preobraziti u skladnu teoriju beskonačno malih veličina, koje su osnova diferencijalnog i integralnog računa.

Jednako tako i Gradićev stav da se stezanje vremenskih intervala nastavlja neograničeno pa oni teže k nuli, mogao je utjecati, kao što je to već istakao Ž. Dadić, na formiranje novog shvaćanja u kojem se »indivizibil«, koji je u pravilu reda dimenzije za jedan manji od kontinuuma, postupno preobražavao u pojam beskonačno male veličine koja je iste dimenzije kao i kontinuum [22]. Tako se indivizibil postupno preobražavao u beskonačno malu veličinu koja teži prema nuli, odnosno u pojam težnje prema granici, a taj je pojam u matematičkoj analizi, a posebno u 18. stoljeću, odigrao vrlo značajnu ulogu.[24]

## 10. Literatura

[1] Zdravko Faj: Kritičko istraživanje doprinosa Dubrovčanina Stjepana Gradića razvoju matematike i fizike u 17. stoljeću, doktorska disertacija (Zagreb: PMF, 1978).

linea e vero. [26], tom IV, str. 316–317). Naime, Torricelli dokazuje na nekoliko primjera da su indivizibili međusobno nejednaki. Tako su točke kao indivizibili crte nejednake među sobom, kao npr. za dvije koncentrične kružnice, jer ako se povuku sve crte od središta prema većoj kružnici, tada ti polumjeri iscrpljuju sve točke na toj kružnici, no istovremeno sve te crte prolaze i manjom kružnicom. Isto tako ako se u trokutu s nejednakim stranicama paralelno s bazom povuku sve crte koje spajaju točke na stranicama trokuta, tada na obje stranice ima jednako mnogo točaka, a budući da su nejednake stranice, nejednake su i točke. Na sličan način Torricelli pokazuje i nejednakost crta. Na osnovi toga zaključuje da će, ako su točke a i crte nejednake, biti nejednake i crte po širini i površine po debljini jer prolaze kroz nejednake točke i nejednake crte.

[24] Već krajem 17. stoljeća I. Newton u problemima infinitezimalnog računa napušta ideju indivizibila i dopušta da mali intervali teže nuli. Beskonačno male veličine sve više gube smisao indivizibila, a sve više se promatraju kao proces.

[2] Florijan Cajori: Indivisibles and »ghosts of departed quantities« in the history of mathematics, Rivista-Scienza, 19/1925, vol. 37.

[3] Žarko Dadić: Razvoj matematike, Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju, Moderna matematika, Školska knjiga, Zagreb 1975.

[4] I. Z. Cehmistro i N. P. Bobkova: Dialektika množestvennogo i edinogo i kontinuum, Harkov 1977.

[5] Žarko Dadić: Pogledi Franje Petriševića u geometriji, Dijalektika, br. 1, Beograd 1974.

[6] Galileo Galilei: Discorsi e dimostrazioni matematiche, I classici edizione Florentia Galileo opere, vol. 4.

[7] Stjepan Gradić: Dissertationes physico-mathematicae quator, Amstelodami 1680.

[8] Quaedam meditationes Geometricae diversis temporibus a me Stephano Gradio factae, manuscript, Biblioteca Apostolica Vaticana, codex Vat. lat. 6921.

[9] Stjepan Gradić: Peripateticae philosophiae pronunciata disputationibus proposita (bez mjesta i godine izdanja).

[10] Galileo Galilei: Besedi i matematičeskie dokazatelstva, Izabranie trudi, Tom 2, »Nauka«, Moskva 1964.

[11] Bonaventura Cavalieri: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bononiae 1653.

[12] B.G. Kuzneco: Galilei, Moskva 1964.

[13] Hrestomatija po istorii matematiki (pod redakciej A. P. Juškevića), »Prosveščenie«, Moskva 1977.

[14] Kepleri Joannis Opera omnia, vol. 4, Frankforti 1863.

[15] Emil A. Fellmann: Die mathematischen werke von Honoratus Fabry, Physis, Rivista di storia della scienza, Vol. I, Fasc. I e II–1959.

[16] E. Bortolotti: L' opera geometrica di E. Torricelli, Opere di E. Torricelli, Tom 4.

[17] René Dugas: La mécanique au XVII$^{e}$ siecle, Paris 1954.

[18] Mario Gliozzi: Istorija fiziki, Moskva 1970.

[19] Ch. Huygens: Oeuvres completes, knj. 16, Amsterdam 1967.

[20] Ch. Huygens: Die Penduluhr Horologium oscillatorum, Ostwald's klassiker, Nr. 192, Leipzid 1913.

[21] Žarko Dadić: Stjepan Gradić o problemima gibanja. Matematički vesnik 5(20), sv. 4, Beograd 1968.

[22] Žarko Dadić: Stjepan Gradić o problemima mehanike. Zbornik radova o dubrovačkom učenjaku Stjepanu Gradiću, HPD, Sekcija za povijest znanosti, Zagreb 1985.

[23] O dvjestogodišnjici rođenja Ruđera J. Boškovića. Matematički rad Boškovićev, dio I, napisao, priopćio i uvodima popratio V. Varićak. Preštampano iz »Rada«, Zagreb 1910–1912.

[24] Josip Ruđer Bošković: Teorija prirodne filozofije, Bibl. Temelji, knj. prva, Zagreb, 1974.

[25] Ruđer Bošković: O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile, Predgovor i komentar napisao i prevod stručno redigovao E. Stipanić, Matematički institut, Klasični naučni spisi, Nova serija, knjiga 1(16), Beograd 1975.

[26] Evangelista Torricelli: Opere, vol. I–IV, Faenza 1919.

Zdravko Faj

# THE OPINION OF STJEPAN GRADIĆ ON THE APPLICATION OF INDIVISIBLE PARTS (INDIVISIBILA) IN PHYSICS

*Summary*

Stjepan Gradić (1613–1683) discussed the problems of indivisible parts (indivisibila) with H. Fabri and M. A. Ricci. His opinions have come to us from the dissertations published; also, many details are contained in his letters and notes that have been preserved in his manuscript. In his letter to Fabri he expresses his opinion on the Cavalieri method; namely, that from the relations of the indivisibles it can be deduced on the relations of the continuum. Further, he proves on an example that by applying the method quoted and with the understanding that the surface is made of lines, and the lines made of points, a paradox follows. Thus, he concluded that the indivisibles should be excluded from the application. Therefore, when explaining the free fall, he admits that the contraction of time intervals may continue infinitely, so they tend to zero and in that process the surface of a dentate plane figure turns into the Galilei triangle. From the discussion on the triangle mentioned, it can be deduced that Gradić believed that a point in the length only marks a moment of time. However, a point is not part of the continuum, just like a line is not part of the surface. Such an opinion of Gradić is very much close to that of Bradwardine, which actually leads to the concept of a continuum which never stops and never disperses into individual points, and in which points are but outer limits. Such understanding of the continuum could have developed, via new ideas in the works by Newton, Leibniz and Cauchy, into the theory of infinitely small values which are the basis of the calculus.