Osječki matematički list 19 (2019), 123-136

Kombinatorika i vjerojatnost – zajedno kroz ples

Dragana Jankov Maširević, Mirna Mikić*

Sažetak

U ovom članku su opisani osnovni kombinatorni principi koje često koristimo prilikom rješavanja vjerojatnosnih problema te je dan uvid u osnove teorije vjerojatnosti, s posebnim osvrtom na klasičnu definiciju vjerojatnosti. Također, dani su zanimljivi primjeri iz svakodnevnoga života na kojima je ilustrirana veza između ovih dviju grana matematike.

Ključne riječi: *kombinatorika, kombinacije, vjerojatnost, klasična definicija vjerojatnosti, uvjetna vjerojatnost, primjena u svakodnevnom životu*

Combinatorics and probability – together through dance

Abstract

In this paper we present basic combinatorial principles, which are often used in solving probability problems. Also, we present some fundamental assertions of probability theory with special reference to classical definition of probability. Examples of real-life problems which illustrates connection between these two branches of mathematics are given, as well.

Keywords: *combinatorics, combinations, probability, classical definition of probability, conditional probability, application in real-life*

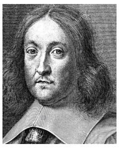
*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: djankov@mathos.hr, mirna.mikic309@gmail.com

1 Kombinatorna teorija vjerojatnosti

Girolamo Cardano (1501.–1576.), talijanski matematičar

Igre na sreću od davnina su privlačile pažnju te je još u 16. stoljeću Cardano napisao čuvenu knjigu *Liber de ludo aleae* (*Knjiga o bacanju kocke*) u kojoj, osim problema računanja vjerojatnosti dobitka, piše i o tome kako varati [1, str. 37]. Dakle, u ovom djelu se radi o kombinatornoj vjerojatnosti, iako se uspostavljanje njezinih temelja smješta u 17. stoljeće, u dopisivanju Pascala i de Fermata o problemima koji uključuju igre na sreću, a s kojima se Pascalu 1654. godine obratio kockar Chevalier de Méré [1]. Huygens na temelju njihovih rezultata objavljuje prvu matematičku knjigu o vjerojatnosti *De ratiociniis in ludo aleae* 1657. godine, dok se prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti smatra knjiga *Ars conjectandi* Jacoba Bernoullija, objavljena 1713. Bernoulli nije uspio dovršiti svoje djelo, ali je njegove rezultate nadopunio i pojednostavio de Moivre koji prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjer broja povoljnih i broja svih mogućih ishoda, danas poznatu u sljedećem obliku:

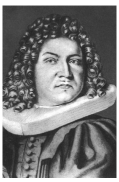
Blaise Pascal (1623.–1662.), francuski matematičar



Pierre de Fermat (1601.–1665.), francuski matematičar

Definicija 1.1. Neka je *prostor (skup) elementarnih događaja* (*skup svih mogućih ishoda*) Ω neprazan i konačan. Ako su svi ishodi u konačnom skupu elementarnih događaja Ω jednako mogući, vjerojatnost da se realizira događaj $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, to jest

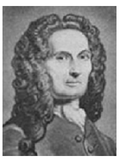
$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja za } A}{\text{broj svih mogućih elementarnih događaja}}.$$



Jacob Bernoulli (1654.–1705.), švicarski matematičar

1.1 Vjerojatnosni principi

Još je 1933. Kolmogorov aksiomatizirao vjerojatnost (vidi npr. [1]). Naime, općenito, vjerojatnost definiramo kao funkciju $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ na takozvanom *izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$, gdje je $\mathcal{F}$ familija podskupova od Ω, koju nazivamo *σ–algebra*, njezine elemente *događajima*, a koja zadovoljava *aksiome vjerojatnosti*, tj. da je $P(A) \geq 0$, za svaki $A \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$ te da je vjerojatnost unije prebrojive familije međusobno disjunktnih događaja jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinih događaja. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo *vjerojatnosni prostor*. Lako je provjeriti da vjerojatnost iz definicije 1.1 zadovoljava aksiome vjerojatnosti.



Abraham de Moivre (1667.–1754.), francuski matematičar

Iz aksioma vjerojatnosti slijede mnoga druga svojstva vjerojatnosti, od kojih u nastavku navodimo ona koja su nam od interesa te se i najčešće koriste u praksi, a ostale čitatelj može pronaći u [2, 7, 8].

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903.–1987.), ruski matematičar

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vrijedi:

- *Vjerojatnost suprotnog događaja*

  Neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj i $A^C \in \mathcal{F}$ njegov komplement, tj. njemu suprotan događaj. Tada je
  $$P(A^C) = 1 - P(A). \tag{1}$$

- *Vjerojatnost praznog skupa (nemogućeg događaja)*
  $$P(\emptyset) = 0. \tag{2}$$

- *Monotonost vjerojatnosti*

  Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je $A \subseteq B$. Tada vrijedi
  $$P(A) \leq P(B). \tag{3}$$

- *Vjerojatnost unije dva događaja*

  Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ ne nužno disjunktni događaji, tada je
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{4}$$

Bitno je napomenuti da se formula (4) može generalizirati na vjerojatnost unije više događaja, što nazivamo Sylvesterova formula:

Teorem 1.1. [Sylvesterova formula] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in \mathcal{F}$ konačna familija događaja. Tada vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dokaz. Vidi [8, str. 37–39].

Svakom događaju, u skladu s klasičnom definicijom vjerojatnosti, pridružili smo njegovu vjerojatnost koja je potpuno određena i ne mijenja se u postavljenom problemu. No, što ako promatramo vjerojatnost nekog događaja uz dodatne informacije o realizaciji slučajnog pokusa? Kako bismo odgovorili na ovo pitanje uvodimo pojam uvjetne vjerojatnosti.

Definicija 1.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $P(B) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost* uz dani događaj B je funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ definirana izrazom

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

za svaki $A \in \mathcal{F}$.

Uz pretpostavke definicije 1.1, kako bi pronašli traženu vjerojatnost, potrebni su nam kardinalni brojevi odgovarajućih skupova, koje ćemo pronaći kao odgovor na pitanje *na koliko se načina nešto može odabrati*. Stoga, možemo zaključiti da će se računanje vjerojatnosti (u slučaju kada možemo primijeniti klasičnu definiciju vjerojatnosti) svesti na prebrojavanje elemenata skupova za što će nam koristiti neki od osnovnih kombinatornih principa koje ćemo u nastavku upoznati.

1.2 Kombinatorni principi

Kod mnogih kombinatornih problema, rješenje je zasnovano na dvama osnovnim principima prebrojavanja: *princip sume* i *princip produkta* te ih u nastavku navodimo.

Teorem 1.2 (Princip sume). Neka su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni i međusobno disjunktni. Tada je i skup $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ također konačan i vrijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_n). \tag{5}$$

Teorem 1.3 (Princip produkta). Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_m$ konačni skupovi. Tada je Kartezijev produkt $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m$ također konačan skup i vrijedi

$$k(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \cdots \cdot k(S_m).$$

Princip produkta često se formulira u obliku *teorema o uzastopnom prebrojavanju*, koji u slobodnoj interpretaciji glasi ([8, str. 60]):

Teorem 1.4 (Teorem o uzastopnom prebrojavanju -slobodna interpretacija). Ako prvi objekt možemo birati na k_1 načina, drugi na k_2 načina,. . . , m–ti na k_m načina, tada imamo $k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_m$ načina da se izaberu svi ti objekti.

Prilikom prebrojavanja konačnih skupova te samim time i u rješavanju kombinatornih problema bit će nam korisna sljedeća tvrdnja:

Teorem 1.5. Neka su A i B konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada vrijedi

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \tag{6}$$

Nadalje, ako je $A \subseteq B$, tada vrijedi

$$k(B \backslash A) = k(B) - k(A). \tag{7}$$

Dokaz. Vidi [8, str. 61–62].
Jednakost (7) možemo pisati i u obliku

$$k(B \backslash A) = k(B) - k(A \cap B), \tag{8}$$

s obzirom na to da je $B \backslash A = B \backslash (A \cap B)$ i $A \cap B \subseteq B$.

Bitno je naglasiti da se uređeni razmještaji nazivaju *permutacije*, a neuređeni razmještaji *kombinacije* [3]. Kako su nam u rješavanju konkretnih problema često zanimljiviji neuređeni razmještaji, u nastavku navodimo njihovu preciznu definiciju:

Definicija 1.3 (Kombinacije). Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. *Kombinacija* r-tog razreda u skupu A jest svaki r-člani podskup od A. Pri tome broj svih kombinacija r-tog razreda u n-članom skupu označavamo s $C_n^{(r)}$ i računamo na sljedeći način

$$C_n^{(r)} = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

Ako se od elemenata n–članog skupa A tvore neuređene r–torke, onda govorimo o *kombinacijama s ponavljanjem* r–tog razreda od n elemenata [5]. Drugim riječima, dozvoljeno je da kombinacija s ponavljanjem sadrži i jednake elemente skupa A te u ovom slučaju nije nužno ograničenje $r \leq n$, nego može biti i $r > n$.

Definicija 1.4 (Kombinacije s ponavljanjem). Neka je A n-člani skup i $r \in \mathbb{N}$. *Kombinacija s ponavljanjem* r-tog razreda u skupu A je svaka neuređena r-torka $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ (u kojoj elementi mogu biti međusobno jednaki) elemenata iz skupa A. Broj svih kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda u n-članom skupu označavat ćemo s $\bar{C}_n^{(r)}$ i vrijedi

$$\bar{C}_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Napomena 1.1. U slučaju kada možemo primijeniti definiciju 1.1 i uz pretpostavku da su naši skupovi zapravo događaji iz Ω odmah slijedi veza između gore navedenih kombinatornih i vjerojatnosnih principa. Na primjer, uz pretpostavku da su $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \Omega$ (pri čemu je Ω neprazan i konačan skup elementarnih događaja) jednako mogući događaji, kada jednakost (5), danu u teoremu 1.2, podijelimo s $k(\Omega)$, pomoću definicije 1.1 dobivamo upravo treći aksiom vjerojatnosti u slučaju konačnog broja događaja.

Također, ako isto napravimo s teoremom 1.5 i jednakosti (6) dobivamo svojstvo vjerojatnosti unije dva događaja (4). Nadalje, na isti način kao što smo generalizirali tvrdnju (4) na Sylvesterovu formulu, danu u teoremu 1.1, tako i tvrdnju (6) teorema 1.5 možemo generalizirati na takozvanu *formulu uključivanja-isključivanja* [6, str. 111].

2 Zanimljivi primjeri

U ovom poglavlju pokušat ćemo kroz zanimljive primjere iz svakodnevnoga života čitateljima približiti opisane kombinatorne i vjerojatnosne principe.

Primjer 1. Ana se od osnovne škole bavi plesom te bi voljela nastaviti s tim i kada ove godine počne studirati. U gradu u kojem je upisala fakultet postoje 4 gradske četvrti te se u svakoj od njih nalaze dva studentska restorana i 4 plesna kluba, po dva u okolini svakog restorana. Prije nego počnu predavanja, Ana želi unajmiti stan. Na koliko načina može odabrati četvrt, studentski restoran i plesni klub ako:

a) nije bitno da studentski restoran i plesni klub budu u istoj četvrti kao i stan;

b) nije bitno da studentski restoran bude u istoj četvrti u kojoj je i stan, ali plesni klub treba biti;

c) sve treba biti u najbližoj okolini stana.

Rješenje. Pri rješavanju ovog primjera pomoći će nam teorem 1.4 o uzastopnom prebrojavanju.

a) S obzirom na to da nije bitna blizina stana, restorana i plesnog kluba, iz uvjeta zadatka, prema teoremu 1.4 slijedi da je broj načina na koje Ana može odabrati sve navedeno $4 \cdot 8 \cdot 16 = 512$.

b) Ana je četvrt mogla birati na 4 načina, restoran na 8 načina (jer nije bitno da on bude u istoj četvrti) te se nakon odabrane četvrti Ani u blizini nalazilo dva restorana, odnosno 4 plesna kluba (jer se u okolini svakog restorana nalaze dva plesna kluba). Sada je traženo rješenje $4 \cdot 8 \cdot 4 = 128$.

c) Nakon odabrane četvrti (što je Ana mogla napraviti na 4 načina), odlučila je ići u jedan od dva najbliža restorana (jer je 8 studentskih restorana ravnomjerno raspoređeno po četvrtima). Kako se u okolini svakog restorana nalaze 2 plesna kluba, Ana je svoj izbor mogla napraviti na $4 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ načina.

Nakon dugog premišljanja, Ana je odlučila pronaći smještaj tako da joj se sve nalazi u najbližoj okolini te se upisala u plesni klub *Ritam*. ◀

Primjer 2. Mjesec dana nakon što se upisala u plesni klub *Ritam*, Ani je bio rođendan te je, vrlo zadovoljna društvom iz kluba, odlučila na probu donijeti kolače. U slastičarnici se prodaju četiri vrste kolača: čoko-kocke, baklave, kremšnite i šampite. Ana je neodlučna oko izbora, a treba kupiti 20 kolača, jer toliko članova (zajedno s njom) ima njezin plesni klub. Na koliko načina Ana može odabrati kolače?

Rješenje. Kako bismo pronašli rješenje, pomoći će nam definicija 1.4, odnosno kombinacije s ponavljanjem 20-og razreda skupa od 4 elementa, jer kako imamo četiri vrste kolača, to je $n = 4$, a Ana treba kupiti 20 kolača, odnosno $r = 20$. Sada je

$$\bar{C}_4^{(20)} = \binom{4+20-1}{20} = 1771,$$

što je zaista veliki broj načina na koji Ana može napraviti svoj izbor. ◀

Primjer 3. Anin trener je osmislio novu plesnu točku za koju su potrebne LED lampe. Preko jednog web-shopa je naručio pošiljku od 120 LED lampi, na sniženju, pri čemu ga je proizvođač upozorio da se u pošiljci nalazi 5% neispravnih lampi, što je razlog sniženja. Treneru su lampe stigle na kućnu adresu te je, zbog težine, odlučio na trening ponijeti 42 lampe, po dvije za svakog člana plesne skupine te dvije za rezervu. Kolika je vjerojatnost da je slučajnim odabirom 42 lampe trener odabrao točno dvije neispravne?

Rješenje. U kutiji imamo 5% neispravnih lampi, što znači da je od njih 120, 6 neispravnih. Trener slučajno odabire 42 lampe, dakle nije nam važan raspored. Stoga su svi mogući ishodi našeg izvlačenja zapravo 42-člani podskupovi skupa od 120 elemenata, odnosno naš prostor elementarnih događaja će biti

$$\Omega = \{sve\ kombinacije\ 42\text{-}og\ razreda\ skupa\ od\ 120\ elemenata\}.$$

To, prema definiciji 1.3, znači da je $k(\Omega) = \binom{120}{42}$. Budući da nas zanima kolika je vjerojatnost da su među slučajno odabranim lampama točno dvije neispravne, možemo zapisati

$$A = \{između\ 42\ slučajno\ odabrane\ LED\ lampe\ točno\ su\ 2\ neispravne\}, A \subset \Omega$$

te trebamo odrediti $k(A)$. Budući da nam je poznato da je 6 lampi neispravno, znamo da ćemo 2 neispravne LED lampe odabrati između tih 6, a to možemo učiniti na $\binom{6}{2}$ načina. Kada smo odabrali 2 neispravne lampe, ostaje nam odabrati $42 - 2 = 40$ lampi između $120 - 6 = 114$ ispravnih, što možemo učiniti na $\binom{114}{40}$ načina. Sada zaključujemo da je $k(A) = \binom{6}{2}\binom{114}{40}$. Na kraju, vjerojatnost da je trener slučajnim odabirom 42 lampe uzeo točno 2 neispravne je, prema definiciji 1.1, jednaka

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{114}{40}}{\binom{120}{42}} \approx 0.33623.$$

Primjer 4. Plesnu točku s LED lampama, koju su do sada u plesnom klubu izvrsno svladali, Anin klub planira izvesti na velikoj proslavi povodom *Svjetskog dana plesa* koji se slavi 29. travnja još od 1982. godine. Tim povodom, jedan plesni klub se pridružio Aninom kako bi zajedno osmislili nekoliko nastupa te ta dva plesna kluba zajedno broje 50 plesača. Treneri su se dogovorili da 30 plesača sudjeluje u jazz dance koreografiji, 16 u break dance koreografiji, dok ih 15, zbog spriječenosti, ne ide na nastup. Kolika je vjerojatnost da će svaki od plesača koji idu na nastup sudjelovati u obje koreografije, a kolika da će sudjelovati samo u jazz dance koreografiji?

Rješenje. Označimo s P skup svih plesača, s J skup plesača koji sudjeluju u jazz dance koreografiji, s B skup svih plesača koji sudjeluju u break dance koreografiji, a s N skup svih plesača koji ne idu na nastup. Sada imamo:

$$k(P) = 50, k(J) = 30, k(B) = 16, k(N) = 15.$$

Možemo primijetiti da će skup $J \cup B$ označavati sve plesače koji idu na nastup. Skupovi $J \cup B$ i N su disjunktni te vrijedi $P = (J \cup B) \cup N$. Iz teorema 1.2 slijedi

$$k(P) = k(J \cup B) + k(N),$$

stoga je

$$k(J \cup B) = k(P) - k(N) = 50 - 15 = 35.$$

Skup $J \cap B$ predstavlja skup svih plesača koji sudjeluju u obje koreografije, jazz dance i break dance. Njihov broj odredit ćemo pomoću formule (6) dane u teoremu 1.5.

Sada je

$$k(J \cap B) = k(J) + k(B) - k(J \cup B) = 30 + 16 - 35 = 11.$$

Nadalje, kako bismo dobili broj plesača koji sudjeluju samo u jazz dance koreografiji trebamo naći $k(J \setminus B)$, a to ćemo, pomoću jednakosti (8), napraviti na sljedeći način

$$k(J \setminus B) = k(J) - k(J \cap B) = 30 - 11 = 19.$$

Sada možemo izračunati tražene vjerojatnosti. Vjerojatnost da svaki od plesača koji idu na nastup sudjeluje u obje koreografije, prema definiciji 1.1, bit će jednaka kvocijentu broja svih plesača koji nastupaju u obje koreografije i broja svih plesača koji idu na nastup, to jest

$$P(J \cap B) = \frac{k(J \cap B)}{k(J \cup B)} = \frac{11}{35} \approx 0.31429,$$

dok će vjerojatnost da će svaki od plesača sudjelovati samo u koreografiji jazz dance-a biti jednaka kvocijentu broja svih plesača koji nastupaju samo u koreografiji jazz dance-a i broja svih plesača koji idu na nastup, odnosno

$$P(J \setminus B) = \frac{k(J \setminus B)}{k(J \cup B)} = \frac{19}{35} \approx 0.54286.$$

Primjer 5. Nakon uspješnog nastupa na *Svjetskom danu plesa*, Anin plesni klub *Ritam* priprema koreografiju za 20 plesača, s kojom će nastupiti na *Osječkom ljetu kulture*. Zbog godišnjih odmora, imaju samo 15 plesača, stoga odluče posuditi plesače iz drugog plesnog kluba. U drugom plesnom klubu ima 20 plesača, 7 muškaraca i 13 žena te su svi plesači spremni pomoći. Voditelj drugog kluba nasumično odabire 5 plesača iz svog kluba, koje će posuditi klubu *Ritam*. Ako znamo da su svi odabrani plesači istog spola, kolika je vjerojatnost da su svi muškarci?

Rješenje. S obzirom na to da odabiremo 5 plesača iz drugog kluba od njih 20, zaključujemo da je

$$\Omega = \{\textit{sve kombinacije } 5\textit{-og razreda skupa od } 20 \textit{ elemenata}\},$$

tj. prema definiciji 1.3 $k(\Omega) = \binom{20}{5}$. Ono što dodatno znamo je da su svi odabrani plesači istog spola, a zanima nas kolika je vjerojatnost da su svi muškarci te ćemo definirati sljedeće događaje

$$A = \{\textit{odabrani plesači su muškarci}\},$$

$$B = \{\textit{odabrani plesači su istog spola}\}.$$

Možemo primijetiti da je $A \subseteq B$ pa prema svojstvu monotonosti vjerojatnosti (3) zaključujemo da će biti $P(A) \leq P(B)$ što možemo i pokazati.

Naime, očito je

$$k(A) = \binom{7}{5}, \qquad k(B) = \binom{7}{5} + \binom{13}{5},$$

odnosno

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0.00135 \leq 0.08437 \approx \frac{\binom{7}{5} + \binom{13}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = P(B).$$

Tražimo vjerojatnost da su odabrani plesači muškarci, pod uvjetom da su svi odabrani plesači istog spola. Dakle, prema definiciji 1.2 je

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}, \text{ jer je } A \subseteq B,$$

iz čega slijedi

$$P_B(A) = \frac{\frac{k(A)}{k(\Omega)}}{\frac{k(B)}{k(\Omega)}} = \frac{k(A)}{k(B)} = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{7}{5} + \binom{13}{5}} \approx 0.0161.$$

Iz prethodnog rješenja možemo zaključiti da je vjerojatnost da su odabrani plesači muškarci, uz uvjet da su svi odabrani plesači istog spola, vrlo mala.◀

Primjer 6. Nakon službenog programa na *Osječkom ljetu kulture*, organizatori su organizirali plesno natjecanje, u kojem su sudjelovale 4 ekipe od kojih se svaka sastoji od pet plesača i to tri plesača iz plesnog kluba *Ritam* i dva plesača iz plesnog kluba *Dance*. Jedan novinar odlučio je od svih sudionika natjecanja slučajno odabrati 6 koji će mu ukratko prokomentirati svoje viđenje tog događaja. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja:

a) među izabranim sudionicima su točno dva iz plesnog kluba *Ritam*?

b) među izabranim sudionicima je barem jedan plesač iz svake ekipe?

Rješenje. U oba slučaja će nam biti potreban prostor elementarnih događaja, a ovdje je to

$$\Omega = \{\textit{svi 6-člani podskupovi skupa od 20 elemenata}\}.$$

Očito je, prema definiciji 1.3, $k(\Omega) = \binom{20}{6}$. Tražene događaje označit ćemo s

$$A = \{\textit{među izabranim sudionicima su točno dva iz plesnog kluba Ritam}\}$$
$$B = \{\textit{među izabranim sudionicima je barem jedan plesač iz svake ekipe}\}.$$

Kako bismo izračunali vjerojatnost događaja A, moramo odrediti kardinalni broj tog skupa. Budući da imamo $3 \cdot 4 = 12$ plesača iz plesnog kluba *Ritam* i $2 \cdot 4 = 8$ plesača iz plesnog kluba *Dance*, a biramo 6 plesača od kojih želimo da budu točno dva plesača iz *Ritma*, to je $k(A) = \binom{12}{2} \cdot \binom{8}{4}$. Sada možemo izračunati vjerojatnost primjenjujući definiciju 1.1

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{6}} \approx 0.1192.$$

Ako označimo s

$$B_i = \{\textit{među izabranim plesačima je barem jedan plesač iz i-te ekipe}\},\ i = 1, 2, 3, 4$$

onda događaj B možemo prikazati na sljedeći način:

$$B = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$$

te je očito

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4).$$

Kako nam je, u ovom slučaju, lakše raditi sa suprotnim događajima, promotrimo sljedeći događaj:

$$B_i^C = \{\textit{među izabranim plesačima nema niti jednog iz i-te ekipe}\}.$$

Sada ćemo imati

$$P(B) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P((B_1^C \cup B_2^C \cup B_3^C \cup B_4^C)^C).$$

Koristeći svojstvo *vjerojatnosti suprotnog događaja* (1), vjerojatnost događaja B možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} P(B) &= P((B_1^C \cup B_2^C \cup B_3^C \cup B_4^C)^C) = 1 - P(B_1^C \cup B_2^C \cup B_3^C \cup B_4^C) \\ &= 1 - P(B_1^C) - P(B_2^C) - P(B_3^C) - P(B_4^C) + P(B_1^C \cap B_2^C) \\ &\quad + P(B_1^C \cap B_3^C) + P(B_1^C \cap B_4^C) + P(B_2^C \cap B_3^C) + P(B_2^C \cap B_4^C) \\ &\quad + P(B_3^C \cap B_4^C) - P(B_1^C \cap B_2^C \cap B_3^C) - P(B_1^C \cap B_2^C \cap B_4^C) \\ &\quad - P(B_2^C \cap B_3^C \cap B_4^C) + P(B_1^C \cap B_2^C \cap B_3^C \cap B_4^C), \end{aligned} \tag{9}$$

gdje smo zadnju jednakost dobili pomoću Sylvesterove formule dane u teoremu 1.1. Kako bismo izračunali vjerojatnost traženog događaja, potrebno je izračunati sve vjerojatnosti dane u prethodnoj formuli.

Budući da želimo odabrati šest sudionika, a da pri tome niti jedan od tih šest nije iz i-te ekipe, to je

$$k(B_i^{\mathcal{C}}) = \binom{5}{0} \cdot \binom{15}{6} = \binom{15}{6},$$

što, prema definiciji 1.1, daje vjerojatnost

$$P(B_i^{\mathcal{C}}) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}}, \ i = 1,2,3,4.$$

Nakon toga, tražimo vjerojatnost događaja $B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}$, $i \neq j$, to jest želimo odabrati šest sudionika tako da niti jedan nije iz i-te ekipe i niti jedan nije iz j-te ekipe pa je

$$k(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}) = \binom{10}{0} \cdot \binom{10}{6} = \binom{10}{6}, \ i,j = 1,2,3,4, \ i \neq j,$$

odnosno

$$P(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}}) = \frac{k(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}})}{k(\Omega)} = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}}.$$

Nadalje, vidimo da je događaj $B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}} \cap B_k^{\mathcal{C}}$ nemoguć jer u našem izboru od šest sudionika ne bi trebao biti niti jedan sudionik iz 3 ekipe, što nam ostavlja $20 - 15 = 5$ sudionika od kojih bismo trebali izabrati 6, a to je nemoguće. Prema *vjerojatnosti nemogućeg događaja* (2) slijedi

$$P(B_i^{\mathcal{C}} \cap B_j^{\mathcal{C}} \cap B_k^{\mathcal{C}}) = 0, \ i \neq j \neq k, \ i,j,k = 1,2,3,4.$$

Očito je da će i događaj $B_1^{\mathcal{C}} \cap B_2^{\mathcal{C}} \cap B_3^{\mathcal{C}} \cap B_4^{\mathcal{C}}$ biti nemoguć pa će i njegova vjerojatnost biti jednaka nula.

Nakon što sve izračunato uvrstimo u (9), dobivamo

$$P(B) = 1 - 4 \cdot \frac{\binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} + 6 \cdot \frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}} - 3 \cdot 0 + 0 \approx 0.51599.$$

◄

Primjer 7. S obzirom na to da je Ana uspješno rješavala svoje obaveze na fakultetu i pokazala iznimnu angažiranost u *Ritmu*, trener joj je preporučio tečaj za voditelja plesnih tehnika koji je Ana s oduševljenjem upisala. Nakon odslušanog tečaja, Ana je trebala položiti ispit kako bi dobila diplomu. Zbog nedostatka vremena, Ana je došla na ispit, na kojem se izvlači 5 pitanja, znajući odgovor na 90 od 100 pitanja. Kolika je vjerojatnost da će Ana znati odgovore na barem tri od pet izvučenih pitanja (koliko je potrebno za polaganje tečaja)?

Rješenje. Kako Ana na ispitu izvlači 5 pitanja iz skupa od 100 pitanja to je

$$\Omega = \{\textit{svi 5-člani podskupovi skupa od } 100 \textit{ elemenata}\},$$

odnosno prema definiciji 1.3 $k(\Omega) = \binom{100}{5}$. Označimo traženi događaj s

$$A = \{\textit{Ana zna odgovore na barem } 3 \textit{ pitanja}\},$$

što znači da Ana zna odgovor na 3, 4 ili 5 pitanja, odnosno toliko pitanja je izvukla iz skupa od 90 pitanja na koja zna odgovor, a ostala pitanja je dobila iz skupa od $100 - 90 = 10$ pitanja koja nije naučila. Sada je, prema definiciji 1.1,

$$P(A) = \frac{\binom{90}{3} \cdot \binom{10}{2} + \binom{90}{4} \cdot \binom{10}{1} + \binom{90}{5} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{100}{5}} \approx 0.99.$$

Nakon položenog tečaja, Ana je bila jako sretna te je odlučila proslaviti isti dan. Nije se mogla odlučiti hoće li navečer otići na trening ili će proslaviti u krugu obitelji. Kolika je vjerojatnost za svaku od te dvije odluke? ◀

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Zagreb, 2009.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku -nastavni materijali*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek (nerecenzirani materijal) `http://www.mathos.unios.hr/uvis/Vjezbe/materijali_3.pdf`

[4] V. Čuljak, *Vjerojatnost i statistika*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb (nerecenzirani materijal) `http://www.grad.hr/vera/webnastava/vjerojatnostistatistika/vis-pdf.pdf`

[5] M. Ilijašević, Ž. Pauše, *Riješeni primjeri i zadaci iz vjerojatnosti i statistike s pregledom osnovnih pojmova i formula*, Tisak Zagreb, Zagreb, 1990.

[6] S. Majstorović, K. Vincetić, *Totalna zbrka*, Osječki matematički list 17/2 (2017), 109-123

[7] M. Mikić, *Osnovni principi kombinatorike u teoriji vjerojatnosti*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2019.

[8] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika I. dio -Osnove vjerojatnosti. Kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.