12c

Konstantin Momirović i Janez Stalec
Računski centar Instituta za kineziologiju

Egon Zakrajšek
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerze v Ljubljani

PRIMJENA GENERALIZIRANIH IMAGE TRANSFORMACIJA U ANALIZI RELACIJA SKUPOVA VARIJABLI

THE APPLICATION OF GENERALISED IMAGE TRANSFORMATIONS IN ANALYSIS OF RELATIONS BETWEEN GROUPS OF VARIABLES

In kinesiological, and generally anthropological investigations it is sometimes of certain interest to determine latent structure of a system of variables projected in some other space, and/or to determine the structure of a system of variables in residual space, obtained after projection of this system in any other space. The comparison between thus obtained latent structures and latent structures in real and image space can give significant information about real latent structure of some system of variables and changes of this structure under different experimental conditions.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ИМАЖ ТРАНСФОРМАЦИЙ В АНАЛИЗЕ ОТНОШЕНИЙ СОВОКУПНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННЫХ

В кинезиологических и, вообще, в антропометрических исследованиях иногда внимание уделяется определению латентной структуры какой-то системы переменных, проекцированных в какое-то другое пространство,и/или определеяется структура какой-то системы переменных в резидуальном пространстве, полученном после проекции этой системы в какое-то другое пространство.

Сравнение латентных структур, полученных таким способом, с структурами, полученными в реальном и имаж пространствах, может стать источником важных данных о действительной латентной структуре определенной системы переменных и о переменных этой структуры в зависимости от различных экспериментальных условий.

1. UVOD

U kineziologijskim, i uopće antropologijskim istraživanjima gdjekada je od izvjesnog interesa određivanje latentne strukture nekog sistema varijabli projiciranih u neki drugi prostor, i/ili određivanje struktura nekog sistema varijabli u rezidualnom prostoru, dobijenom nakon projekcije tog sistema u neki drugi prostor. Usporedba tako dobijenih latentnih struktura sa strukturama dobijenim u realnom i image prostoru može pružiti značajne informacije o stvarnoj latentnoj strukturi nekog sistema varijabli i promjenama te strukture pod različitim eksperimentalnim uvjetima.

Vjerojatno najčešći, iako možda ne i najvažniji slučajevi u kojima je ovakav način određivanja latentnih struktura neophodan ili koristan su:

(1) analiza promjena strukturalnog, dakle kvalitativnog, tipa izazvanih nekim sistemom kineziologijskih transformacijskih operatotora

(2) analiza stabilnosti latentne strukture sistema varijabli koji pripada jednom segmentu antropološkog prostora nakon parcijalizacije efekata koji potiču iz nekog drugog sistema varijabli koje pripadaju nekom drugom segmentu antropološkog prostora

(3) analiza stabilnosti latentne strukture sistema varijabli koji pripada jednom segmentu antropološkog prostora nakon projekcije tog sistema u neki drugi segment antropološkog prostora

(4) analiza promjena latentne strukture nekog sistema varijabli pod vidom objektivnih obilježja transformacijskih operatora ili objektivno određenih uvjeta pod kojima se odvija transformacijski proces

(5) analiza latentne strukture nekog sistema antropologijskih varijabli projiciranih u sistem ekoloških varijabli

(6) analiza latentne strukture nekog sistema varijabli nakon parcijalizacije efekata remetećih faktora.

Kriterij najmanjih kvadrata primijenjen je i kod operacija projekcije i parcijalizacije i kod određivanja osnovnih ortogonalnih struktura. Te su strukture određene na temelju generaliziranog komponentnog modela. Međutim, samo su kose parsimonijske transformacije osnovnih ortogonalnih struktura tretirane kao realne latentne strukture.*

* Ovaj je metod, čini se, vrlo pogodno sredstvo i za analizu intergeneracijskih procesa. U toku je njegova primjena u analizi intergeneracijske mobilnosti, a priprema se njegova primjena i u analizi psihijatrijskih poremećaja djece u funkciji tih poremećaja u njihovih roditelja.

Ovo istraživanje provedeno je u okviru teme »Generalizirane image transformacije« program istraživačkog rada »Utjecaj tjelesne aktivnosti na psihosomatski status« koji su financirali Savjet za naučni rad SR Hrvatske i Sveučilište u Zagrebu. Ova je tema dio podprograma »Generiranje transformacijskih operatora« i »Metode za transformaciju i kondenzaciju kinezioloških informacija«.

2. OSNOVNE TRANSFORMACIJE

Neka je $Z = (z_{ij})$, $i = 1, N$; $j = 1. n$; $n < N$ matrica rezultata N entiteta S_i u n varijabli V_j standardiziranih tako da je $\bar{z}_j = \Sigma_i^N z_{ij}/N = 0$ i $s_j^2 = \Sigma_i^N (z_{ij} - \bar{z}_j)^2/N = 1$; kako su kineziologijske i općenito antropologijske varijable na konvencionalnim mjernim ljestvicama, ova operacija gotovo nikada ne vodi do gubitka informacija, a znatno proširuje opseg transformacijskih postupaka. Neka je sistem varijabli $\{V_j\}$ multivarijatno normalno distribuiran; otuda će i svaka varijabla V_j biti normalno distribuirana. Sistem varija- $\{V_j\}$ bit će tretiran kao primarni sistem.

Neka je $\Psi = (\psi_{ip})$, $i = 1, N$; $p = 1, m$; $m < N$ matrica rezultata istih N entiteta S_i u varijablama W_p i neka je sistem $\{W_p\}$ također multivarijatno normalno distribuiran, i neka je svaka normalno distribuirana varijabla W_p također standardizirana tako da je $\bar{\psi}_p = 0$ i $s_p^2 = 1$. Sistem varijabli $\{W_p\}$ bit će tretiran kao sekundarni sistem.

Varijable W_p mogu pripadati nekom drugom segmentu antropološkog prostora, mogu biti mjera objektivnih obilježja transformacijskih operatora ili ekoloških karakteristika skupa $\{S_j\}$ ili se može raditi o istim varijablama V_j, određenim pod različitim eksperimentalnim uvjetima.

Pretpostavimo, za sada, da je $m \leq n$, i da su varijable V_j i W_p unutar skupova $\{V_j\}$ i $\{W_p\}$ linearno nezavisne; zbog efekta eror faktora može se, bez gubitka mogućnosti generalizacije, pretpostaviti i da su varijable V_j i W_p između sebe linearno nezavisne.

Matrica interkorelacija varijabli V_j

$$R = Z' Z N^{-1} \tag{1.1}$$

imat će puni rang, a jednako i matrica interkorelacija varijabli W_p

$$P = \Psi' \Psi N^{-1} \tag{1.2}$$

Matrica kroskorelacija varijabli V_j i W_p

$$C = Z' \Psi N^{-1} \tag{1.3}$$

bit će, općenito, ranga n.

Dijagonalna matrica unikviteta varijabli V_j je

$$U^2 = dg^{-1} R^{-1} = (u_j^2) \tag{1.4}$$

pa je matrica rezultata u varijablama V_j transformirana u image oblik

$$Y = Z (I - R^{-1} U^2) = (Y_{ij}) \tag{1.5}$$

Image varijable $\tilde{V}_j$ su, naravno (Guttman, 1953) multivarijatno normalno raspoređene sa aritmetičkim sredinama $\bar{y} = 0$ i varijancama $S_{Yj}^2 = 1 - u_j^2$; matrica kovarijanci tih varijabli je

$$G = Y, Y N^{-1} = R + U^2 R^{-1} U^2 - 2U^2 \tag{1.6}$$

i dalje ranga n.

Svaka image varijabla može se shvatiti kao optimalna linearna kombinacija, sukladno kriteriju najmanjih kvadrata, preostalih varijabli iz skupa $\{V_j\}$ ili, kao rezultat projekcije vektora varijable V_j, ponovno sukladno kriteriju najmanjih kvadrata, u $n-1$ dimenzionalni prostor omeđen vektorima varijabli V_k, $k \neq j$.

Analogno tome, mogu se vektori varijabli V_j, projicirati, sukladno kriteriju najmanjih kvadrata, u prostor omeđen varijablama W_p; nove varijable, $\widehat{V}_j$, bit će, naravno, optimalne linearne kombinacije, sukladno kriteriju najmanjih kvadrata, varijabli W_p.

Matrica tako formiranih varijabli, dobijena standardom regresionom tehnikom, bit će

$$\Omega = \Psi P^{-1} C' = (\omega_{ij}) \tag{1.7}$$

Aritmetičke sredine normalno distribuiranih varijabli $\widehat{V}_j$ bit će, naravno $\overline{\omega}_j = 0$. Matrica varijanci-kovarijanci tih varijabli je

$$\Gamma = \Omega' \Omega N^{-1} = C P^{-1} C' \tag{1.8}$$

Matrica rezidualnih varijabli $\dot{V}_j$ je

$$X = Z - \Omega = Z - \Psi P^{-1} C' = (X_{ij}) \tag{1.9}$$

Varijable $\dot{V}_j$ imaju aritmetičke sredine

$\overline{X}_j = 0$; matrica varijanci-kovarijanci tih varijabli je

$$\Phi = X'XN^{-1} = (Z - \Psi P^{-1} C')' N^{-1} (Z - \Psi P^{-1} C') = R - CP^{-1} C' = R - \Gamma \tag{1.10}$$

Naravno, i varijable $\dot{V}_j$ imaju multivarijatnu normalnu raspodjelu.

Definirajmo

$$D^2_G = \mathrm{dg}\ G \tag{1.11}$$

$$D^2_\Gamma = \mathrm{dg}\ \Gamma \tag{1.12}$$

i

$$D^2_\Phi = \mathrm{dg}\ \Phi \tag{1.13}$$

Matrica standardiziranih rezultata u varijablama $\widetilde{V}_j$, $\widehat{V}_j$ i $\dot{V}_j$ bit će

$$Z_Y = Y D^{-1}_G \tag{1.14}$$

$$Z_\Omega = \Omega D^{-1}_\Gamma \tag{1.15}$$

i

$$Z_X = X D^{-1}_\Phi \tag{1.16}$$

a matrice interkorelacija tako standardiziranih varijabli

$$R_G = Z'_Y Z_Y N^{-1} = D^{-1}_G G D^{-1}_G \tag{1.17}$$

$$R_\Gamma = Z'_\Gamma Z_\Gamma N^{-1} = D^{-1}_\Gamma \Gamma D^{-1}_\Gamma \tag{1.18}$$

i

$$R_\Phi = Z'_X Z_X N^{-1} = D^{-1}_\Phi \Phi D^{-1}_\Phi \tag{1.19}$$

Prema tome, za određivanje latentne strukture varijabli V_j nezavisno od i u odnosu na varijablu W_p mogu se upotrijebiti:

(1) R = kompletna matrica interkorelacija u realnom prostoru varijabli V_j

(2) G = matrica kovarijanci u image prostoru varijabli V_j

(3) R_G = matrica korelacija varijabli V_j u image prostoru

(4) Γ = matrica kovarijanci varijabli V_j projiciranih u prostor varijabli W_p

(5) R_Γ = matrica korelacija varijabli V_j projiciranih u prostor varijabli W_p

(6) Φ = matrica kovarijanci varijabli V_j u prostoru koji je ortogonalan na zajednički prostor među varijablama V_j i W_p

(7) R = matrica korelacija varijabli V_j u prostoru ortogonalnom na zajednički prostor koji omeđuju varijable V_j i W_p.

Usporedba latentnih struktura dobijenih na temelju ovih matrica pod vidom

a) broja latentnih dimenzija koje se mogu smatrati statistički i/ili kineziološki značajnim

b) veličine zajedničke varijacije sistema i pojedinih varijabli u faktorskom prostoru

c) kongruencije solucija transformiranih u (kosi) parsimonični oblik

d) korelacija latentnih dimenzija određenih na temelju konačnih parsimoničnih solucija

e) kroskorelacija latentnih dimenzija određenih na temelju različitih konačnih parsimoničnih solucija

može pružiti određene informacije o strukturi sistema varijabli $\{V_j\}$ u odnosu na sistem varijabli $\{W_p\}$.

3. ODREĐIVANJE LATENTNIH STRUKTURA

Neka je ρ ma koja, u općem slučaju nesingularna, matrica varijanci-kovarijanci reda n. Rješavanjem sistema karakterističnih jednadžbi

$$(\rho - \lambda_j I) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

dobit će se matrica karakterističnih vektora $X = (x_{jk})$, $j, k = 1, \ldots, n$ i dijagonalna matrica karakterističnih korjenova

$\Lambda = (\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Otuda

$$\rho = X \Lambda X'$$

Neka su $X_1 = (x_{jk})$, $k = 1, \ldots, t$ i $X_2\ (x_{jk})$, $k = t+1, \ldots, n$ dvije submatrice matrice X, i neka su Λ_1 i Λ_2 jednako definirane submatrice Λ. Vrijedi naravno

$$\rho = X_1 \Lambda_1 X'_1 + X_2 \Lambda_2 X'_2$$

Definirajmo

$$\rho_1 = X_1 \Lambda_1 X'_1$$

i

$$\rho_2 = X_2 \Lambda_2 X'_2$$

Ako je

$$\rho_2 \simeq \mathrm{dg}\ \rho_2$$

matrica ρ_1 je matrica koja, uz rang $t < n$, dobro aproksimira matricu ρ. U tom slučaju vektori matrice ρ_2 omeđuju prostor u kome su moguće slučajne varijacije vektora iz ρ_1; otuda su informacije koje emitira matrica ρ_2 irelevantne za određivanje latentne strukture analiziranih varijabli.

Ova varijanta komponentnog modela osnov je za određivanje latentnih struktura svih matrica koje mogu biti predmet predloženog tipa analiza. Naravno, moguće je te analize učiniti i na temelju klasičnog faktorskog modela

$$\rho = X_1 \Lambda_1 X_1 + U^2\rho$$

gdje je U^2_ρ dijagonalna matrica unikviteta; no poteškoće sa određivanjem komunaliteta i nemogućnosti izračunavanja faktorskih vrijednosti entiteta S znatno otežavaju komparativne procedure, koje su suštinski dio predloženog tipa analize latentnih struktura.

Na temelju ovog modela sve matrice koje mogu biti predmet ovog tipa analize mogu se faktorizirati tako da vrijedi

$$R = Q_R L_R Q'_R + K_R J_R K'_R \tag{2.1}$$

$$G = Q_G L_G Q'_G + K_G J_G K'_G \tag{2.2}$$

$$R_G = Q_g L_g Q'_g + K_g J_g K'_g \tag{2.3}$$

$$\Gamma = Q_\Gamma L_\Gamma Q'_\Gamma + K_\Gamma J_\Gamma K'_\Gamma \tag{2.4}$$

$$R_\Gamma = Q_Y L_Y Q'_Y + K_Y J_Y K'_Y \tag{2.5}$$

$$\Phi = Q_\Phi L_\Phi Q'_\Phi + K_\Phi J_\Phi K'_\Phi \tag{2.6}$$

$$R_\Phi = Q_\Phi L_\Phi O'_\Phi + K_\Phi J_\Phi K'_\Phi \tag{2.7}$$

gdje su Q matrice prvih t_α karakterističnih vektora, a L dijagonalne matrice prvih t_α karakterističnih korjenova, dok su K i J matrice preostalih $n - t_\alpha$ vektora i korjenova. Rang matrica Q, označen sa t_α, može, naravno, biti nejednak ne samo između različitih početnih matrica, već i unutar njih; naime t_α se može odrediti na nekoliko načina i u okviru analiza iste matrice.

Određivanje broja latentnih dimenzija bitno je za sve dalje komparativne procedure. Predloženo je stoga nekoliko različitih metoda za određivanje t_α za svaku početnu matricu. Naravno, od presudnog je značaja odrediti t upravo za matricu R; no procjena tog broja na temelju nekih drugih matrica može znatno doprinijeti određivanju dimenzionalnosti faktorskog prostora.

Označimo sa t_R broj značajnih latentnih dimenzija matrice R. Taj se broj može, za svrhe ovog tipa analiza, odrediti na bilo koji od slijedećih načina:

(1) Uobičajenim Guttman-Kaiserovim postupkom, tj. tako, da je

$$t_{R1} = \mathrm{NUM}\ (L_{Rj} \geq 1.) \tag{2.8}$$

(2) Na temelju PB kriterija (Štalec i Momirović, 1971) tako da budu zadovoljeni uvjeti

$$\sum_{j=1}^{t_{R2}} L_{Rj} \geq \mathrm{tr}\ G \qquad \sum_{j=1}^{t_{R2}-1} L_{Rj} < \mathrm{tr}\ G \tag{2.9}$$

(3) Na temelju kriterija što ga je Kaiser predložio za matrice reskalirane na antiimage metriku; ako su λ_j karakteristične vrijednosti matrice $U^{-1} R U^{-1}$,

$$t_{R3} = \mathrm{NUM}\ (\lambda_j > 1) \tag{2.10}$$

(4) Na temelju veličine realne varijance reducirane matrice interkorelacija (Momirović, 1973). Neka su $\widetilde{\lambda}_j$ nenulti korjenovi karakteristične jednadžbe

$$((R - U^2) - \lambda_j I)\ x_j = 0 \tag{2.11}$$

$$j = 1, \ldots, n$$

Neka je $\widetilde{t}$ broj nenegativnih korjenova. Broj značajnih latentnih dimenzija matrice R određuje se tako, da budu zadovoljeni uvjeti

$$\sum_{j=1}^{t_{R4}} L_{Rj} \geq \sum_{j=1}^{\widetilde{t}} \widetilde{\lambda}_j \qquad \sum_{j=1}^{t_{R4}-1} L_{Rj} < \sum_{j=1}^{\widetilde{t}} \widetilde{\lambda}_j \tag{2.12}$$

Očito, zbog toga što je

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \mathrm{tr}\ G$$

$$t_{R4} > t_{R2}$$

I onako oskudan izbor pretežno nezadovoljavajućih kriterija za određivanje broja značajnih osovina image matrica kovarijanci mora biti drastično sužen da bi usporedba različitih solucija mogla biti razumno objektivna. Za svrhe ove analize, čini se, moguće je primijeniti uglavnom ove kriterije:

(1) $t_{G1} = t_{Ra}$, (2.13)

gdje je t_{Ra} neki od rangova faktorske matrice dobijen u kompletnom prostoru; čini se dosta razumnim da se u tu svrhu upotrebe t_{R2} ili t_{R4}.

(2) DMEAN kriterij (Momirović i Štalec, 1972), u suštini ekvivalentan Guttman-Kaiserovom kriteriju u kompletnom prostoru

$$t_{G2} = \text{NUM } (L_{Gj} \geq \text{tr } G/n) \tag{2.14}$$

(3) DMAX kriterij (Momirović i Štalec, 1972); kasnija istraživanja su pokazala da se ponaša konzistentnije od DMEAN kriterija

$$t_{G3} = \text{NUM } (L_{Gj} \geq \text{MAX } g_{jj}) \tag{2.15}$$

gdje su g_{jj} dijagonalni elementi matrice G, tj. koeficijenti determinacije realnih varijabli na temelju skupa preostalih, dakle varijance image varijabli.

$$(4) \qquad t_{R4} = t_{RG1} \tag{2.16}$$

gdje je t_{RG1} rang ocijenjen na temelju LC kriterija za određivanje broja značajnih osovina matrica interkorelacija image varijabli.

Izgleda da za određivanje broja faktora matrice R_G postoji samo jedan kriterij, nezavisan od ostalih solucija. To je

(1) LC kriterij (Momirović i Zakrajšek, 1972) čija je logika ekvivalentna logici PB kriterija. Dakle, t_{RG1} je broj L_{RGj} koji zadovoljava uvjete

$$\sum_{j=1}^{t_{RG1}-1} L_{RGj} < \text{tr } G$$
$$\tag{2.17}$$
$$\sum_{j=1}^{t_{RG1}} L_{RG} \geq \text{tr } G$$

Naravno, i ovdje je t_{RG} moguće odrediti na temelju nekog od t_{RG} ; otuda

$$(2) \qquad t_{RG2} = t_{Ra} \tag{2.18}$$

pri čemu je vjerojatno najrazboritije primijeniti t_{R2} ili t_{R4}.

Za ostale matrice nema, naravno, do sada predloženih kriterija. No logika analize i način njihova formiranja dopuštaju relativno razborite kriterije za određivanje broja značajnih faktora i u tim matricama.

Varijable $\hat{V}_j$ su, u biti, image varijable varijabli V_j u prostoru omeđenom sistemom varijabli W_p . Otuda, za broj faktora matrice Γ mogu biti primijenjeni slični kriteriji kao i za broj faktora matrice G.

$$(1) \qquad t_{\Gamma 1} = t_{Ra} \tag{2.19}$$

no ovdje, uz t_{R2} i t_{R3} svakako dolazi u obzir i t_{R1}.

(2) Analogno DMEAN kriteriju,

$$t_{\Gamma 2} = \text{NUM } (L_{\Gamma j} \geq \text{tr } \Gamma/n) \tag{2.20}$$

jer je tr Γ ukupna varijanca varijabli $\hat{V}_j$.

(3) Analogno DMAX kriteriju

$$t_{\Gamma 3} = \text{NUM } (L_{\Gamma j} \geq \text{MAX}\,\gamma_{jj}) \tag{2.21}$$

gdje su γ_{jj} dijagonalni elementi matrice Γ, dakle koeficijenti determinacije varijabli V_j na temelju sistema varijabli W_p .

$$(4) \qquad t_{\Gamma 4} = t_{R\Gamma 1} \tag{2.22}$$

gdje je $t_{R\Gamma 1}$ određen primjenom LC logike na matricu R_Γ .

Matrica R_Γ je, naravno, analogna, u generaliziranom image smislu, matrici R_G . Otuda

(1) $t_{R\Gamma 1}$ može biti definiran kao broj karakterističnih korjenova $L_{R\Gamma j}$ koji zadovoljava uvjete

$$\sum_{j=1}^{t_{R\Gamma 1}-1} L_{R\Gamma j} < \text{tr } \Gamma$$
$$\tag{2.23}$$
$$\sum_{j=1}^{t_{R\Gamma 1}} L_{R\Gamma j} \geq \text{tr } \Gamma$$

dakle primjenom LC kriterija na matricu R_Γ.

$$(2) \qquad t_{R\Gamma 2} = t_{Ra} \tag{2.24}$$

pri čemu je i ovdje vjerojatno razborito primijeniti t_{R2} i/ili t_{R4}, uz standardni t_{R1} .

Nije sasvim jednostavno odrediti prihvatljive kriterije za broj faktora u matricama Φ i R_Φ koji bi bili nezavisni od ostalih solucija.

Za broj značajnih osovina matrice Φ, u komparativne svrhe, svakako dolazi u obzir

$$(1) \qquad t_{\Phi 1} = t_{Ra} \tag{2.25}$$

za bilo koji kriterij broja faktora matrice R.

No, analogno logici DMEAN kriterija

$$(2) \qquad t_{\Phi 2} = \text{NUM } (L_{\Phi j} \geq \text{tr } \Phi/n) \tag{2.26}$$

odnosno, analogno logici DMAX kriterija

$$(3) \qquad t_{\Phi 3} = \text{NUM } (L_{\Phi j} \geq \text{MAX } \Phi_{jj}) \tag{2.27}$$

gdje su Φ_{jj} rezidualne varijance varijabli V_j nakon parcijalizacije varijance zajedničke sa varijablama W_p .

Eventualno dolazi u obzir

$$(4) \qquad t_{\Phi 4} = t_{R\Phi 1} \tag{2.28}$$

gdje je $t_{R\Phi 1}$ određen na matrici R_Φ analogno LC kriteriju.

Za matricu R_Φ , prema tome, dolazi u obzir

(1) određivanje $t_{R\Phi}$ tako da budu zadovoljeni uvjeti, u skladu sa LC kriterijem

$$\sum_{j=1}^{t_{R\Phi 1}-1} L_{R\Phi j} < \operatorname{tr} \Phi$$

$$\sum_{j=1}^{t_{R\Phi 1}} L_{R\Phi j} \geq \operatorname{tr} \Phi \qquad (2.29)$$

i, svakako,

(2) $$t_{R\Phi 2} = t_{Ra} \qquad (2.30)$$

za bilo koji t_R.

Izbor kriterija ovisit će svakako od cilja analize. Praktički će se rijetko primijeniti svi kriteriji, jer to dovodi do enormnog broja početnih i transformiranih solucija i upravo nemogućeg broja potrebnih usporedbi. Ukoliko usporedba broja latentnih dimenzija nije bitna za ciljeve analize, t može biti određen na temelju nekog od kriterija koji je logički kongruentan sa prirodom problema, i taj broj faktora može biti fiksan za sve matrice.

Osim spomenutih i nekoliko prilično nekonvencionalnih kriterija može biti primijenjeno za određivanje broja faktora. Od izvjesnog je interesa, da se t odredi tako da budu zadovoljeni uvjeti

$$\sum_{j=1}^{t} L_{Rj} \geq \operatorname{tr} \Gamma \qquad (2.31)$$

$$\sum_{j=1}^{t-1} L_{Rj} < \operatorname{tr} \Gamma$$

i da taj broj faktora bude zadržan u svim analizama. Ovo osobito kad se s razlogom mogu očekivati visoke (kanoničke) relacije između varijabli V_j i W_p.

Neka su X i Λ prvih t karakterističnih vektora i korjenova bilo koje matrice ρ. Parsimonijski koordinatni sistem za vektore te matrice može se dobiti operacijom

$$A = X \Lambda^{1/2} T^{-1}$$

gdje je T nesingularna matrica koja, uz uvjet

$$\operatorname{dg} (T T') = I$$

zadovoljava i neki pogodan analitički kriterij jednostavne strukture, na pr.

$$\sum_{k<1}^{t} \sum_{j=1}^{n} a^2_{kj} \ a^2_{lj} = \min$$

dakle oblimin kriterij sa parametrom $\delta = 0$. Upravo će, izgleda, ovaj kriterij i biti najpodesniji za određivanje konačne pozicije faktora u ovom tipu analiza, jer je jedini od kosih transformacijskih kriterija koji je potpuno objektivan, a dobro aproksimira jednostavnu strukturu (oblimax je aproksimira vrlo loše, maxplane i promax nisu bitno bolji, a generalizirani direktni oblimin sa promjenljivim parametrom δ nije, naravno, objektivan (Harman, 1967; Hakstian, 1971); orthoblique, koji, ako je početna ortogonalna solucija dobro izabrana i parametar p adekvatan problemu, daje najbolju aproksimaciju jednostavne strukture, također nije potpuno objektivan, jer ovisi i o izboru parametra p i o izboru početne ortogonalne solucije).

Interkorelacije faktora su, u tom slučaju

$$M = T T'$$

a korelacije varijabli i faktora

$$F = A M = X \Lambda^{1/2} T^{-1} T T' = X \Lambda^{1/2} T'$$

Kako su projekcije faktora na varijable

$$\beta = X \Lambda^{-1/2} T' = A(A' A)^{-1} = R^{-1} F$$

faktorske vrijednosti, za svaku matricu početnih podataka Z bit će, ako je $\rho = N^{-1} Z' Z$,

$$\eta = Z X \Lambda^{-1/2} T'$$

Prema tome, za varijable koje formiraju matricu R

$$A_R = Q_R L_R^{1/2} T_R^{-1} \qquad (2.32)$$

$$F_R = Q_R L_R^{1/2} T'_R \qquad (2.33)$$

$$M_R = T_R T'_R \qquad (2.34)$$

$$\beta_R = Q_R L_R^{-1/2} T'_R \qquad (2.35)$$

$$\eta_R = Z Q_R L_R^{-1/2} T'_R \qquad (2.36)$$

Varijance varijabli projiciranih u faktorski prostor bit će

$$h^2_R = \operatorname{dg} (A_R F'_R) = \operatorname{dg} (Q_R L_R Q'_R) \qquad (2.37)$$

a varijance latentnih varijabli

$$H^2_R = \operatorname{dg} (A'_R F_R) = \operatorname{dg} ((T_R^{-1})' L_R T'_R) = \\ = \operatorname{dg} (T_R L_R T_R^{-1}) = \operatorname{dg} (F'_R A_R) \qquad (2.38)$$

Definirajmo eksplicitno rezultate konačnog transformacijskog postupka za sve početne matrice. Za image varijable

$$A_G = Q_G L_G^{1/2} T_G^{-1} \qquad (2.39)$$

$$F_G = Q_G L_G^{1/2} T'_G \qquad (2.40)$$

$$M_G = T_G T'_G \qquad (2.41)$$

$$\beta_G = Q_G L_G^{-1/2} T'_G \qquad (2.42)$$

$$\eta_G = Z (I - R^{-1} U^2) Q_G L_G^{-1/2} T'_G \qquad (2.43)$$

$$h^2_G = \operatorname{dg} (Q_G L_G Q'_G) \qquad (2.44)$$

$$H^2_G = \operatorname{dg} ((T_G^{-1})' L_G T'_G) = \operatorname{dg} (T_G L_G T_G^{-1}) \qquad (2.45)$$

Za standardizirane image varijable

$$A_g = Q_g\ L_g^{1/2}\ T_g^{-1} \qquad (2.46)$$

$$F_g = Q_g\ L_g^{1/2}\ T'_g \qquad (2.47)$$

$$M_g = T_g\ T'_g \qquad (2.48)$$

$$\beta_g = Q_g\ L_g^{-1/2}\ T'_g \qquad (2.49)$$

$$\eta_g = Z\ (I - R^{-1}\ U^2)\ D_G^{-1}\ Q_g\ L_g^{-1/2}\ T'_g \qquad (2.50)$$

$$h^2_g = dg\ (Q_g\ L_g\ Q'_g) \qquad (2.51)$$

$$H^2_g = dg\ ((T_g^{-1})'\ L_g\ T'_g) - dg\ (T\quad L_g T^{-1}) \qquad (2.52)$$

Analiza latentne strukture varijabli V_j projiciranih u prostor varijabli W_p dati će slijedeće rezultate

$$A_\Gamma = Q_\Gamma\ L_\Gamma^{1/2}\ T_\Gamma^{-1} \qquad (2.53)$$

$$F_L = Q_\Gamma\ L_\Gamma^{1/2}\ T'_\Gamma \qquad (2.54)$$

$$M_\Gamma = T_\Gamma\ T'_\Gamma \qquad (2.55)$$

$$\beta\ = Q_\Gamma\ L^{-1/2}\ T'_\Gamma \qquad (2.56)$$

$$\eta\ = \Psi\ P^{-1}\ \Psi'\ N^{-1}\ Z\ Q\quad L^{-1/2}\ T'_\Gamma = \\ = \Psi\ P^{-1}\ C'\ Q_\Gamma\ L_\Gamma^{-1/2}\ T'_\Gamma \qquad (2.57)$$

$$h^2_\Gamma = dg\ (Q_\Gamma\ L_\Gamma\ Q'_\Gamma) \qquad (2.58)$$

$$H^2_\Gamma = dg\ (\ (T_\Gamma^{-1})'\ L_\Gamma\ T'_\Gamma) = \\ = dg\ (T_\Gamma\ L_\Gamma\ T_\Gamma^{-1}) \qquad (2.59)$$

Standardizacija varijabli V_j nakon projekcije u prostor varijabli W_p dat će slijedeću konačnu soluciju u latentnom prostoru

$$A_Y = Q_Y\ L_Y^{1/2}\ T_Y^{-1} \qquad (2.60)$$

$$F_Y = Q_Y\ L_Y^{1/2}\ T'_Y \qquad (2.61)$$

$$M_Y = T_Y\ T'_Y \qquad (2.62)$$

$$\beta_Y = Q_Y\ \ _Y^{-1/2}\ T'_Y \qquad (2.63)$$

$$\eta_Y = \Psi\ \ P^{-1}\ C'\ D_\Gamma^{-1}\ Q_Y\ L_Y^{-1/2}\ T'_Y = \\ = \Psi\ P^{-1}\ \Psi'\ N^{-1}\ Z\ D_\Gamma^{-1}\ Q_Y\ L_Y^{-1/2}\ T'_Y \qquad (2.64)$$

$$h^2_Y = dg\ (Q_Y\ L_Y Q'_Y) \qquad (2.65)$$

$$H^2_Y = dg\ (\ (T_Y^{-1})'\ L_Y\ T'_Y) = \\ = dg\ (T_Y\ L_Y\ T_Y^{-1}) \qquad (2.66)$$

U prostoru, koji je ortogonalan na zajednički prostor varijabli V_j i W_p imati će varijable V slijedeću latentnu strukturu:

$$A_\Phi = Q_\Phi\ L_\Phi^{1/2}\ T_\Phi^{-1} \qquad (2.67)$$

$$F_\Phi = Q_\Phi\ L_\Phi^{1/2}\ T'_\Phi \qquad (2.68)$$

$$M_\Phi = T_\Phi\ T'_\Phi \qquad (2.69)$$

$$\beta_\Phi = Q_\Phi\ L_\Phi^{-1}\ T'_\Phi \qquad (2.70)$$

$$\eta_\Phi = (Z - \Psi\ P^{-1}\ C')\ Q_\Phi\ L_\Phi^{-1/2}\ T'_\Phi = \\ = Z\ Q_\Phi\ L_\Phi^{-1/2}\ T'_\Phi - \Psi\ P^{-1}C'\ Q_\Phi\ L_\Phi^{-1/2} \\ T'_\Phi = Z\ Q_\Phi\ L_\Phi^{-1/2}\ T'_\Phi - \psi\ P^{-1}\psi' \\ N^{-1}\ Z\ Q_\Phi\ L_\Phi^{-1/2}\ T'_\Phi \qquad (2.71)$$

$$h^2_\Phi = dg\ (Q_\Phi\ L_\Phi\ Q'_\Phi) \qquad (2.72)$$

$$H^2_\Phi = dg\ (\ (T_\Phi^{-1})'\ L_\Phi\ T'_\Phi\ ) = \\ dg\ (T_\Phi\ L_\Phi\ T_\Phi^{-1}) \qquad (2.73)$$

I konačno, varijable V_j standardizirane nakon projekcije u prostor ortogonalan na zajednički prostor varijabli V_j i W_p imat će strukturu definiranu matricama

$$A_\phi = Q_\phi\ L_\phi^{1/2}\ T_\phi^{-1} \qquad (2.74)$$

$$F_\phi = Q_\phi\ L_\phi^{1/2}\ T'_\phi \qquad (2.75)$$

$$M_\phi = T_\phi\ T'_\phi \qquad (2.76)$$

$$\beta_\phi = Q_\phi\ L_\phi^{-1/2}\ T'_\phi \qquad (2.77)$$

$$\eta_\phi = (Z - \psi\ P^{-1}C')\ D_\Phi^{-1}\ Q_\phi\ L_\phi^{-1/2}\ T'_\phi = \\ = Z\ D_\Phi^{-1}\ Q_\phi\ L_\phi^{-1/2}\ T'_\phi - \\ \psi\ P^{-1}\ \psi N^{-1}Z\ D_\Phi^{-1}\ Q_\phi\ L_\phi^{-1/2}\ T'_\phi \qquad (2.78)$$

$$h^2_\phi = dg\ (Q_\phi\ L_\phi\ Q'_\phi) \qquad (2.79)$$

$$H^2_\phi = dg\ (T_\phi\ L_\phi\ T_\phi^{-1}) \qquad (2.80)$$

Očito je, da faktorske vrijednosti entiteta S_i određene na temelju različitih inicijalnih matrica pokazuju mnoge zanimljive osobenosti. Možda je stoga najpogodnije započeti usporedbu latentnih struktura analizom međusobne povezanosti faktorskih vrijednosti.

4. KOVARIJANCE FAKTORSKIH VRIJEDNOSTI

Kroskorelacije latentnih dimenzija određenih u realnom i image prostoru sa latentnim dimenzijama određenim nakon projekcije varijabli V_j u prostor varijabli W_p, odnosno nakon parcijalizacije varijabli W_p, svakako su od najvećeg interesa. Budući da je koordinatni sustav definiran vektorima entiteta S_i zajednički u svim slučajevima, takve kroskorelacije su direktna mjera povezanosti latentnih dimenzija i osnov za njihovu identifikaciju.

Kako je poznato (vidi, na pr. Mejovšek, Momirović i Štalec, 1973) kovarijance latentnih dimenzija određenih kosim transformacijama glavnih osovina u realnom i image prostoru su, vodeći računa o (2.36) i (2.37)

$$M_{RG} = N^{-1} \eta'_R \eta_G = T_R L_R^{-1} Q'_R(R-U^2) Q_G L_G^{-1/2} T'_G \quad (3.1)$$

Kroskorelacije latentnih dimenzija određenih u realnom prostoru i image prostoru omeđenom standardiziranim image varijablama m, na temelju (2.36) i (2.50)

$$M_{rg} = N^{-1} \eta'_R \eta_G = T_R L_R^{-1/2} Q'_R (R-U^2) D_G^{-1} Q_g L_g^{-1/2} T'_g \quad (3.2)$$

Reducirana matrica interkorelacija temelj je ovih relacija jer, na temelju (1.5 i (1.14)

$$R_{ZY} = N^{-1}Z' Y = R - U^2 \quad (3.3)$$

i

$$R_{ZZY} = N^{-1}Z' Z_Y = (R - U^2) D_G^{-1} \quad (3.4)$$

su matrice realnih i image varijabli.

Vjerojatno najbitnija u većini analiza bit će matrica kroskorelacija latentnih dimenzija određenih u realnom prostoru i latentnih dimenzija istih varijabli određenih u prostoru nekog drugog sistema varijabli. Iz (2.36) i (2.57), a vodeći računa o (1.8), (2.35) i (2.56)

$$\begin{aligned} M_{R\Gamma} &= N^{-1} \eta_R \eta_\Gamma = \\ &= T_R L_R^{-1/2} Q'_R C P^{-1}C' Q_\Gamma L_\Gamma^{-1/2} T'_\Gamma = \\ &= T_R L_R^{-1/2} Q'_R \Gamma Q_\Gamma L_\Gamma^{-1/2} T'_\Gamma = \\ &= \beta'_R \Gamma \beta_\Gamma = \beta' F_\Gamma \end{aligned} \quad (3.5)$$

Razmotrimo, međutim, matricu

$$\gamma = \psi P^{-1} \psi' \quad (3.6)$$

iz (2.57). Kako je

$$P^{-1} = X_P \Lambda_P^{-1} X'_P \quad (3.7)$$

gdje su X_p i Λ_p matrice svih karakterističnih vektora i korjenova matrice interkorelacija varijabli W_p

$$T = \psi X_P \Lambda_P^{-1} X'_P \psi' = K_P K'_P \quad (3.8)$$

je matrica kvadrata-produkata vektora entiteta S_i u kompletnom prostoru glavnih komponenata varijabli W_p, pa su, naravno, glavne komponente entiteta u sistemu varijabli W_p

$$K_P = \psi X_P \Lambda_P^{-1/2} \quad (3.9)$$

pa pripada skupu taksonomskih matrica. Napisane u obliku

$$\begin{aligned} M_{R\Gamma} &= T_R L_R^{-1/2} Q'_R Z' N^{-1} \gamma N^{-1}Z Q_\Gamma L^{-1/2} T'_\Gamma = \beta'_R Z' N^{-1} \gamma N^{-1}Z \beta_\Gamma = \\ &= \beta'_R R_{ZKP} R'_{ZKP} \beta_\Gamma \end{aligned} \quad (3.10)$$

relacije latentnih dimenzija matrica R i Γ postaju izuzetno zanimljive.

Iz (3.5) se vidi, da su kovarijance latentnih dimenzija izoliranih u realnom prostoru i prostoru omeđenom varijablama W_p definirane kovarijancama varijabli V_j projiciranih u prostor varijabli W_p pre i postmultipliciranih projekcijama realnih faktora na vektore varijabli V i projekcijama faktora izoliranim u prostoru omeđenom varijablama W_p na vektore varijabli $\hat{V}_j$. No jednako je značajna i alternativna definicija (3.10). Kovarijance latentnih dimenzija iz R i Γ prostora određene su ovdje taksonomskom matricom entiteta S_i u prostoru glavnih komponenta matrice P, dakle varijabli W_p, pre i postmultipliciranim projekcijama realnih varijabli V na realne faktore, i realnih varijabli na faktore tih varijabli izoliranih nakon njihove projekcije u prostor varijabli W_p.

I varijable $\tilde{V}_j$ i varijable $\hat{V}_j$ pripadaju klasi image varijabli. Relacije latentnih dimenzija nekog sistema varijabli određene nakon njihove projekcije u vlastiti i neki drugi prostor mogu zato biti od posebnog interesa.

Na temelju (2.43) i (2.57), a vodeći računa o (2.42) i (2.56),

$$\begin{aligned} M_{G\Gamma} &= N^{-1} \eta'_G \eta_\Gamma \\ &= T_G L_G^{-1/2} Q'_G (I-U^2R^{-1}) C P^{-1}C' Q_\Gamma L_\Gamma^{-1/2} T'_\Gamma \\ &= \beta'_G (\Gamma - U^2R^{-1} \Gamma) \beta_\Gamma = \\ &= \beta'_G \Gamma \beta_\Gamma - \beta'_G U^2R^{-1} \Gamma \beta_\Gamma = \\ &= (\beta'_G - U^2R^{-1}) \Gamma \beta_\Gamma \end{aligned} \quad (3.11)$$

što je zanimljivo usporediti sa (3.5); ali, zbog (3.6), (3.8) i (3.9), a vodeći računa o (1.3)

$$\begin{aligned} M_{G\Gamma} &= \beta'_G Z' N^{-1} \psi P^{-1} \psi' N^{-1} Z \beta_\Gamma - \\ &- \beta' U^2R^{-1} \Gamma \beta_\Gamma = \beta'_G Z' N^{-1} \gamma N^{-1} Z \beta_\Gamma - \\ &- \beta'_G U^2R^{-1} \Gamma \beta_\Gamma = \\ &= \beta'_G Z' N^{-1} K_P K'_P N^{-1} Z\beta_\Gamma - \beta'_G U^2R^{-1} \Gamma\beta_\Gamma \\ &= \beta'_G R_{ZKP} R'_{ZKP} \beta_\Gamma - \beta'_G U^2R^{-1} \Gamma \beta_\Gamma \end{aligned} \quad (3.12)$$

Neka je

$$R = X_R \Lambda_R X'_R \quad (3.13)$$

gdje su X_R i Λ_R karakteristični korjenovi matrice R;

komponentne vrijednosti entiteta S_i određene na temelju varijabli V_j bit će

$$K_R = Z\, X_R\, \Lambda_R^{-1/2} \tag{3.14}$$

Sada je

$$M_{G\Gamma} = \beta'_G Z'\; N^{-1}\, \gamma\, N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma - \beta' U^2 X_R\, \Lambda_R^{-1/2}\, K'_R\, N^{-1}\, \gamma\, N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma = \beta'_G\, Z'\; N^{-1}\, \gamma\; N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma -$$
$$- \beta'_G\, U^2 X_R\, \Lambda_R^{-1/2}\, N^{-1}\, K_P\, K'_P\, N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma =$$
$$= \beta'_G\, Z'\, N^{-1}\, K_P\, K'_P\, N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma - \beta'_G\, U^2\, \Lambda_R^{-1/2}\, N^{-1}\, K_P\; K'_P\, N^{-1}\, Z\, \beta_\Gamma = \beta'_G\, R_{ZKP}\; R'_{ZKP}\, \beta_\Gamma -$$
$$- \beta'_G\; U^2\, X_R\, \Lambda_R^{-1/2}\, R_{K_R K_P}\, R'_{K_R K_P}\, \beta_\Gamma =$$
$$= \beta'_G (R_{ZKP}\; R'_{ZKP} - U^2\, X_R\, \Lambda_R^{-1/2}\, R_{K_R K_P}\, R'_{K_R K_P})\, \beta_\Gamma \tag{3.15}$$

Od ne manjeg su interesa kovarijance latentnih dimenzija određenih u realnom prostoru i prostoru ortogonalnom na zajednički prostor varijabli V_j i W_p.

Na osnovu (2.36) i (2.78), zbog (2.35), (2.77), (1.10) i (1.3)

$$M_{R\Phi} = T_R\, L_R^{-1/2}\, Q'_R Z'\, N^{-1}\, (Z - \psi\; P^{-1}\, C')\; Q_\Phi\, L_\Phi^{-1/2}\, T'_\Phi = \beta'_R\, (R - C\; P^{-1}\, C')\, \beta_\Phi =$$
$$= \beta'_R\; R\, \beta_\Phi - \beta'_R\; \Gamma\; \beta_\Phi = \beta'_R\; \Phi\; \beta_\Phi \tag{3.16}$$

Naravno, i ovdje se može pokazati značaj taksonomske strukture entiteta u prostoru varijabli W_p, odnosno značaj kovarijanci komponenata određenih u prostoru varijabli V^j i W_p. Zaista, zbog (3.6), (3.7) i (3.8)

$$M_{R\Phi} = \beta'_R\; R\; \beta_\Phi - \beta'_R\; Z'\; N^{-1}\; \gamma\; N^{-1}\; Z\; \beta_\Phi =$$
$$= \beta'_R\; R\; \beta_\Phi - \beta'_R\, R_{ZKP}\;\; R'_{ZKP}\; \beta_\Phi =$$
$$= F'_R\; \beta_\Phi - \beta'_R\;\; R_{ZKP}\; \beta_\Phi$$

Usporedba image solucija i solucija u prostoru varijabli V_j može biti interesantna osobito kad se varijable W_p mogu tretirati kao remeteće varijable. Kovarijance latentnih dimenzija određenih na temelju matrica G i Φ bit će iz (2.42), (2.43), (2.20) i (2.21)

$$M_{G\Phi} = N^{-1}\; \eta'_G\; \eta_\Phi = (Z\; (I - R^{-1}\; U^2)\; \beta_G)'\; N^{-1}\, (Z - \Psi\; P^{-1}\, C')\; \beta_\Phi$$
$$= \beta'_G (I - U^2\, R^{-1})\;\; Z'\;\; N^{-1} (Z - \Psi\; P^{-1}\, C')\;\; \beta_\Phi$$
$$= \beta'_G\; (I - U^2\, R^{-1})\;\; (R - C\, P^{-1}\, C')\, \beta_\Phi$$
$$= \beta'_G\; (I - U^2 R^{-1})\;\; \Phi\; \beta_\Phi$$
$$= \beta'_G\; (\Phi - U^2 R^{-1}\; \Phi)\;\; \beta_\Phi$$
$$= \beta'_G\; \Phi\;\; \beta_\Phi - \beta'_G\;\;\; U^2 R^{-1}\;\; \Phi\;\; \beta_\Phi$$

Da se matrica Γ ponaša analogno matrici eror kovarijanci, u smislu image teorije, vidi se kad se kovarijance image i rezidualnih faktora napišu u obliku

$$M_{G\Phi} = \beta_G\, (R - U^2 - \Gamma\; +\; U^2 R^{-1}\;\; \Gamma)\;\; \beta_\Phi$$

premda je zanimljiv i oblik

$$M_{G\Phi} = \beta'_G\;\; (\Phi\; - \; U^2\;\; + \;\; U^2\, R^{-1}\;\; \Gamma)\;\; \beta_\Phi$$

Naravno, zbog toga što su varijable iz Ω i χ ortogonalne

$$M_{\Gamma\Phi} = 0$$

Iz (2.57) i (2.71)

$$M_{\Gamma\Phi} = N^{-1}\; \eta'_\Gamma\; \eta_\Phi = \beta'_\Gamma\;\; C\;\; P^{-1}\;\; \Psi'\;\;\; N^{-1}\;\; (Z - \Psi\; P^{-1}\, C')\; \beta_\Phi$$
$$= \beta'_\Gamma (C\;\; P^{-1}\, C' - C\;\; P^{-1}\, C')\beta_\Phi = 0$$

Otuda, da se varijable W_p mogu tretirati kao remeteće varijable koje treba ukloniti tehnikom analize kovarijance, faktorsku strukturu varijabli V_j bit će vjerojatno najpogodnije odrediti na temelju matrice R_Φ, ako redukciju varijabiliteta varijabli V_j treba zanemariti, odnosno Φ, ako je redukcija tog varijabiliteta značajna za strukturu sistema $\{V_j\}$.

Svakako da je relacije latentnih dimenzija moguće napisati i u nekoliko drugih zanimljivih oblika; no očito je, da solucije u realnom, image, prostoru varijabli W_p i prostoru ortogonalnom na varijable V_j i W^*_p, uspoređene pod vidom kovarijanci latentnih dimenzija, mogu dati značajne informacije o strukturi analiziranih sistema.

5. KONGRUENCIJA FAKTORA

Iako su kroskorelacije faktorskih vrijednosti u pravilu dovoljne za određivanje sukladnosti solucija, ponekad će biti korisno da se te solucije direktno usporede.

Kongruencija faktora, definirana u smislu Burtova, Tuckerova ili Wigley i Neuhausova shvaćanja (Harman, 1967), može se za ma koje dvije solucije $A\alpha$ i $A\beta$, napisati, u matričnom obliku

$$K_{\alpha\beta} = dg^{-1/2}\;\; (A'_\alpha\;\;\; A_\beta\;)\;\; A_\alpha\;\;\; A_\beta\, dg^{-1/2}\; (A'_\beta\;\;\; A_\beta\,) \tag{4.1}$$

Definirajmo $\alpha, \beta\; = \; R,\, G,\, g,\, \Gamma, \gamma, \Phi,\;\; \Phi;\;\; \alpha \neq \beta$.

Sada će matrica koeficijenata kongruencije između faktora dobijenih na osnovu različitih inicijalnih matrica biti, ako definiramo

$$k_\alpha = dg^{-1/2}\, (A'_\alpha\, A_\alpha\,) \; = \; dg^{-1/2}\, (\; (T_\alpha^{-1}\;)'\; L_\alpha\, T_\alpha^{-1}\;) \tag{4.2}$$

$$k_\beta = dg^{-1/2}\, (A'_\beta\, A_\beta\,) = (dg^{-1/2}\, (\; (T_\alpha^{-1}\;)'\; L_\alpha\;\;\; T_\alpha^{-1}\;)$$

$$K_{\alpha\beta}\;\; = \;\; k_\alpha\;\;\; (T_\alpha^{-1}\;\;\;)'\;\; L_\alpha^{1/2}\;\; Q'_\alpha\;\; Q_\beta\;\; L_\beta^{1/2}\;\; T_\beta^{-1}\;\; k_\beta \tag{4.3}$$

Koeficijenti u matricama $K_{\alpha\beta}$ su, naravno, koeficijenti sličnosti sklopova. No i koeficijenti kon-

* Relacije dobijene nakon standardizacije varijabli $\tilde{V}_j$, $\hat{V}_j$ i $\dot{V}_j$ analogne su, osim za dijagonalnu matricu standardnih devijacija tih varijabli, izvedenim relacijama.

gruencije faktorskih struktura mogu biti od izvjesnog interesa. Ako su F_α i F_β matrice ortogonalnih projekcija vektora varijabli na faktore, operacija

$$C_{\alpha\beta} = dg^{-1/2} (F'_\alpha F_\alpha) F'_\alpha F_\beta dg^{-1/2} (F'_\beta F_\beta) \tag{4.4}$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\alpha, \beta = R, G, g, \Gamma, \gamma, \Phi, \phi$$

dat će matrice kongruencija faktorskih struktura.

Definirajmo

$$c_\alpha = dg^{-1/2} (F'_\alpha F_\alpha) = dg^{-1/2} (T_\alpha L_\alpha T'_\alpha) \tag{4.5}$$

$$c_\beta = dg^{-1/2} (F'_\beta F_\beta) = dg^{-1/2} (T_\beta L_\beta T'_\beta)$$

Koeficijent kongruencije strukture bit će sadržani u matricama

$$C_{\alpha\beta} = C_\alpha T_\alpha L_\beta^{1/2} Q'_\alpha Q_\beta L_\beta^{1/2} T'_\beta C_\beta \tag{4.6}$$

Problem kongruencije može se tretirati i na ponešto nekonvencionalan način. Analogno definiciji varijanci latentnih dimenzija tipa (2.38), kovarijance dimenzija iz dvije različite solucije α i β bit će

$$H_{\alpha\beta} = F'_\alpha A_\beta = M_\alpha A'_\alpha A_\beta$$
$$= (T_\alpha T'_\alpha (T_\alpha^{-1})' L_\alpha^{1/2} Q'_\alpha Q_\beta L_\beta^{1/2} T_\beta^{-1}$$
$$= T_\alpha L_\alpha^{1/2} Q'_\alpha Q_\beta L_\beta^{1/2} T_\beta^{-1}$$

Koeficijenti sukladnosti dimenzija, normiranih na L bit će

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} = C_\alpha H_{\beta\alpha} k_\beta$$

Može se smatrati izvjesnim, da će analiza koeficijenata u matricama $K_{\alpha\beta}$, $C_{\alpha\beta}$ i/ili $\tilde{H}_{\alpha\beta}$ biti od koristi za određivanje strukture sistema varijabli V_j.

6. USPOREDBA VARIJANCI MANIFESTNIH I LATENTNIH DIMENZIJA

Iz (1.11), (1.12) i (1.13) se vidi, da su u matrici

$$D_G^2 = (d_{Gj}^2)$$

varijance varijabli V_j projiciranih u vlastiti protor, u matrici

$$D_\Gamma^2 = (d_{\Gamma j}^2)$$

varijance varijabli V_j projiciranih u prostor varijabli W_p, a u matrici

$$D_\Phi^2 = (d_{\Phi j}^2)$$

varijance varijabli V_j nezavisnih od njihova kovarijabiliteta sa sistemom varijabli $\{W_p\}$.

Autohtona varijanca sistema $\{V_j\}$, dakako uz pretpostavku da je uzorak varijabli reprezentativan za to područje, je

$$\sigma_V^2 = tr\, D_G^2 = \sum_{j=1}^{n} d_{Gj}^2$$

Autohtonost sistema $\{V_j\}$ u odnosu na sistem $\{W_p\}$ može se izraziti na više različitih načina; no vjerojatno je sasvim pogodno da se definira koeficijentom autohtonosti

$$a_{VW} = 1 - \sigma_{VW}^2 / \sigma_V^2$$

gdje je

$$\sigma_{VW}^2 = tr\, D_\Gamma^2 = \sum_{j=1}^{n} d_{\Gamma j}^2$$

ukupna varijanca sistema $\{V_j\}$ procijenjena na temelju sistema $\{W_p\}$.

Pod korektnim eksperimentalnim uvjetima, ako sistemi $\{V_j\}$ i $\{W_p\}$ pripadaju različitim područjima

$$0 \leq a_{VW} \leq 1$$

Negativni a_{VW} otuda znači, da je $\{V_j\}$ samo subsistem sistema $\{W_p\}$.

Varijanca sistema $\{V_j\}$, nezavisna od sistema $\{W_p\}$ je

$$\sigma_{V(W)}^2 = tr\, D_\Phi^2 = \sum_{j=1}^{n} d_{\Phi j}^2$$

pa se koeficijent nezavisnosti može definirati kao

$$b_{V(W)} = \sigma_{V(W)}^2 / n$$

Za ma koju varijablu V_j d_{Gj}^2 je mjera participacije sistema $\{V_j\}$, a $d_{\Gamma j}^2$ mjera participacije sistema $\{W_p\}$.

Koeficijenti

$$a_{j(W)} = 1 - d_{\Gamma j}^2 / d_{Gj}^2$$
$$j = 1, \dots, n$$

mogu se tretirati kao koeficijenti autonomije varijabli iz sistema $\{V_j\}$ u odnosu na sistem $\{W_p\}$.

Neka je, ma kojim kriterijem, određen broj faktora matrice R. Neka je

$$t = t_R = t_\Gamma = t_\Phi$$

Varijanca latentnog sistema varijabli iz R je

$$\sigma_R^2 = \sum_{j=1}^{t} L_{Rj}$$

dok su varijance sistema latentnih varijabli, izoliranih iz T i Φ

$$\sigma^2_\Gamma = \sum_{j=1}^{t} L_{\Gamma j}$$

i

$$\sigma^2_\Phi = \sum_{j=1}^{t} L_{\Phi j}$$

Koeficijenti

$$\alpha_{\Gamma R} = 1 - \sigma^2_\Gamma / \sigma^2_R$$

i

$$\alpha_{\Phi R} = \sigma^2_\Phi / \sigma^2_R$$

mogu se definirati kao mjera latentne autohtonosti sistema $\{V_j\}$ u odnosu na sistem $\{W_p\}$, odnosno kao mjera latentne autonomije sistema $\{V_j\}$ u odnosu na sistem $\{W_p\}$.

Izvjestan broj zanimljivih mjera međusobnog odnosa latentnih dimenzija mogao bi se izvesti i na temelju varijance latentnih dimenzija određenih iz matrica R_Γ i R_Φ, kao i na temelju unaprijed određenog kriterija za određivanje broja latentnih dimenzija, osnovanog na procjeni realne ili zajedničke varijance sistema $\{V_j\}$, ili varijance sistema $\{\hat{V}_j\}$, pa možda i $\{V_j\}$.

7. LITERATURA

Harman, H. H. Modern factor analysis. 2° Ed. University of Chicago Press. Chicago, 1967.

Horst, P. Relations among m sets of measures. Psychometrika, 1961, 26. pp. 129—149.

Horst, P. Factor analysis of data matrices. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

Guttman, L. Image theory for the structure of quantitative variates. Psychometrika· 1953, 18, pp. 277—296.

Kaiser, H. F. Formulas for component scores. Psychometrika, 1962 27, pp. 83—87.

Kaiser, H. F. A note on Guttman's lower bound for the number of common factors, British Journal of Statistical Psychology, 1961, pp. 1—2.

Hotelling, H. Relations between two sets of variates. Biometrika, 1936, 28, pp. 321—377.

Kaiser, H. F. A second-generation Little Jiffy. Psychometrika, 1970, 35, No 4, pp. 401—415.

Lingoes, J. C. Some boundary conditions for a monotone analysis of symmetric matrices. Psychometrika, 1971, 36, pp. 195—203.

Harriss, C. W. On factors and factor scores. Psychometrika, 1967, 32, No 4, pp. 363—379.

McDonald, R. P. and E. J. Burr A comparison of four methods of constructing factor scores. Psychometrika, 1967, 32, No 4, pp. 381—401.

Veldman, D. J. Fortran programming for the behavioral sciences. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.

Cooley, W.W. and P. R. Lohnes Multivariate data analysis. Willey, New York, 1971,