math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Topološka semantika modalne logike

matematičke osnove računarstva **modalna logika**

Bojan Pažek, Tin Perkov

Sažetak

Modalna logika prvenstveno je formalizacija relacijskih struktura, što se može reći i za logiku prvog reda, ali nasuprot njoj ima jednostavniju sintaksu koja omogućuje odlučivost, te specifični lokalni pogled iznutra na relacijske strukture. U ovom radu[1] predstavit ćemo alternativnu, topološku semantiku modalne logike. Formule modalnog jezika interpretirat ćemo kao topološke objekte, razmotriti adekvatnost i potpunost modalne logike u odnosu na odgovarajuće topološke prostore, kao i njenu izražajnu snagu, odnosno razmotriti koja svojstva topoloških prostora možemo definirati modalnim formulama.

1 Uvod

Navest ćemo tri slogana iz predgovora knjige [1] koji odlično opisuju ulogu modalne logike:

(1) Modalni jezici su jednostavni, ali izražajni jezici za opis relacijskih struktura.
(2) Modalni jezici omogućuju interni, lokalni pogled na relacijske strukture.
(3) Modalni jezici nisu izolirani formalni sistemi.

Standardni uvod u modalnu logiku stoga mora opisati njen jezik, interpretaciju u relacijskim strukturama i vezu s drugim formalizmima, prije svega s logikom prvog reda. No, slogani su primjenjivi i na alternativni pogled na modalnu logiku, jer lokalna perspektiva iz drugog slogana asocira na topološke pojmove, dok nas treći slogan upućuje da alternativnu semantiku ne moramo graditi od nule, već je možemo povezati s već uspostavljenom relacijskom semantikom.

Topološka semantika modalne logike nije jednoznačna. Jedan pristup, pogodan za logiku dokazivosti, već je opisan u članku [3]. U tom članku su prezentirani i osnovni pojmovi modalne logike, pa ćemo ih ovdje samo ukratko ponoviti.

Jezik modalne logike proširuje jezik logike sudova modalnim operatorima. Ako je potrebno, kao podsjetnik na osnovne pojmove logike sudova može poslužiti npr. udžbenik [6]. Mi ćemo promatrati samo osnovni modalni jezik, koji u alfabetu uz propozicionalne varijable i logičke veznike ima modalni operator $\Box$, uz dodatno pravilo izgrađivanja formula: ako je φ formula, onda je i $\Box\varphi$ formula. Koristit ćemo i dualni modalni operator $\Diamond$, no nećemo smatrati da je u alfabetu, nego $\Diamond\varphi$ definiramo kao pokratu za $\neg\Box\neg\varphi$.

Okvir za osnovni modalni jezik je relacijska struktura (W, R), gdje je $W \neq \emptyset$ skup koji zovemo *nosač*, a R binarna relacija na W koju zovemo *relacija dostiživosti*. Elementi nosača obično se zovu *svjetovi*, no u topološkoj interpretaciji prirodnije ih je zvati *točke*.

Model je uređena trojka (W, R, V), gdje je (W, R) okvir, a V valuacija, funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli p pridružuje podskup nosača $V(p)$. Kažemo da je propozicionalna varijabla p *istinita* u svijetu $w \in W$ i pišemo $w \Vdash p$ ako je $w \in V(p)$. Definicija istinitosti se na prirodan način proširuje na formule nastale primjenom logičkih veznika, a posebno ćemo navesti samo dio definicije koji se odnosi na formule nastale primjenom modalnog operatora: $w \Vdash \Box\varphi$ ako za svaki $v \in W$ takav da je wRv vrijedi $v \Vdash \varphi$. Lako se vidi da vrijedi $w \Vdash \Diamond\varphi$ ako i samo ako postoji $v \in W$ takav da je wRv i $v \Vdash \varphi$.

U topološkoj semantici ulogu okvira igrat će topološki prostor $(W, \mathcal{T})$, a valuacija se definira kao i kod relacijske semantike. Razlika je u definiciji istinitosti formule oblika $\Box\varphi$, koja će biti istinita u w ako postoji otvoreni skup U koji sadrži w takav da je φ istinita u svakoj točki skupa U. Drugim riječima, w je u interioru skupa točaka u kojima je istinita formula φ. Lako se vidi da je $w \Vdash \Diamond\varphi$ ako i samo ako je w u zatvaraču tog skupa.

Kažemo da je formula *valjana* na okviru (W, R), odnosno $(W, \mathcal{T})$, ako je istinita u svakom svijetu za svaku valuaciju na tom okviru.

Nije teško dokazati:

- $\Box p \to p$ je valjana na (W, R) ako i samo ako je R refleksivna relacija,
- $\Box p \to \Box\Box p$ je valjana na (W, R) ako i samo ako je R tranzitivna.

Možemo reći da formula $\Box p \to p$ definira refleksivnost, a $\Box p \to \Box\Box p$ definira tranzitivnost, te da su stoga refleksivnost i tranzitivnost primjeri modalno definabilnih svojstava relacija. S druge strane, te formule su valjane na svakom topološkom okviru.

Na kraju uvoda vratit ćemo se napomeni o razlozima korištenja različitih topoloških semantika. U već citiranom članku [3] promatrana je logika dokazivosti, za koju je ključna formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$, koja je valjana točno na okvirima čije su pripadne relacije dostiživosti tranzitivne i inverzno dobro fundirane, tj. ne postoji beskonačan niz $w_0 R w_1 R w_2 \ldots$ Posebno, R je tada irefleksivna (u suprotnom bismo imali $wRwRw\ldots$ za neki $w \in W$). Stoga formula $\Box p \to p$, koja definira refleksivnost, nije valjana ni na jednom takvom okviru. Međutim, valjana je na svakom topološkom okviru. To znači da topološku semantiku za logiku dokazivosti moramo drukčije definirati. Modifikacija se sastoji u tome da se formula $\Box\varphi$ definira istinitom u w ako postoji otvoreni skup U koji sadrži w takav da je φ istinita u svakoj točki skupa U *različitoj* od w. Lako je provjeriti da je uz takvu definiciju $\Diamond\varphi$ istinita u w ako i samo ako je w *gomilište* skupa točaka u kojima je istinita φ. No, mi ćemo u nastavku ovog članka promatrati ranije definiranu semantiku, po kojoj $\Box\varphi$ i $\Diamond\varphi$ korespondiraju s topološkim pojmovima interiora i zatvarača. U članku pretpostavljamo poznavanje osnovnih pojmova topologije (po potrebi v. [4]).

2 Interpretacija modalnih operatora

Neka je $\mathcal{W} = (W, \mathcal{T}, V)$ topološki model, a φ proizvoljna modalna formula. Označimo s A_φ skup svih točaka iz W u kojima je formula φ istinita. Zapišimo istinitost modalne formule $\Box\varphi$ u točki $w \in W$ topološkog modela $\mathcal{W}$ pomoću kvantifikatora:

$$\mathcal{W}, w \Vdash \Box\varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \exists\, U \in \mathcal{T} \,\Big(w \in U \ \wedge \ U \subseteq A_\varphi\Big).$$

Kako je za proizvoljan podskup A skupa W po definiciji interiora skupa A ispunjeno:

$$w \in \operatorname{Int}(A) \quad \text{ako i samo ako} \quad \exists\, U \in \mathcal{T} \,\Big(w \in U \ \wedge \ U \subseteq A\Big),$$

to možemo uočiti da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} A_{\Box\varphi} &= \Big\{ w \in W \mid \exists\, U \in \mathcal{T} \,\Big(w \in U \ \wedge \ U \subseteq A_\varphi\Big)\Big\} \\ &= \operatorname{Int}(A_\varphi)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dakle, formuli oblika $\Box\varphi$ odgovara interior skupa A_φ i obratno, pa je na očit način uspostavljena korespondencija između modalnog operatora $\Box$ i topološkog operatora Int. Budući da je po definiciji zatvarača

$$\operatorname{Cl}(A) := X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)\,,$$

a znamo da je modalni operator $\Diamond$ definiran kao pokrata

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi,$$

to odmah imamo da operatoru $\Diamond$ korespondira topološki operator Cl. Nadalje, kako za proizvoljne modalne formule φ i ψ jednostavno vrijedi:

$$\begin{aligned} &A_\top = W,\ A_\bot = \emptyset, \\ &A_{\neg\varphi} = A_\varphi^c, \\ &A_{\varphi\wedge\psi} = A_\varphi \cap A_\psi \text{ i } A_{\varphi\vee\psi} = A_\varphi \cup A_\psi, \end{aligned}$$

zaključujemo da svaka formula modalnog jezika opisuje određen podskup topološkog prostora. Prirodno se stoga nameće da pokušamo neka važna topološka svojstva kodirati modalnim formulama. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1. *Neka je* $\mathcal{W} = (W, \mathcal{T}, V)$ *topološki model. U topološkom prostoru* $(W, \mathcal{T})$ *vrijedi*

$$W \subseteq \mathrm{Int}\,(W)\,. \tag{2}$$

Uočimo da se relacija (2) može opisati modalnom formulom $\top \to \Box\top$. *Zaista, ta formula je istinita u svim točkama topološkog modela:*

$$A_{\top \to \Box\top} = A_{\neg\top \vee \Box\top} = A_{\bot} \cup A_{\Box\top} = \emptyset \cup W = W. \tag{3}$$

Naš je idući korak promotriti doseg ovako definirane topološke semantike. U uvodnom dijelu smo naglasili da postoje razni pristupi definiranju topološke semantike i svaki je pristup pogodan za opis nekog svojstva. U nastavku pokazujemo da je logika svih topoloških prostora u kojoj modalni operator $\Box$ čitamo kao operator Int zapravo jednaka logici **S4**, koju ćemo definirati u sljedećoj točki.

3 Adekvatnost i potpunost logike S4 u odnosu na topološku semantiku

U nastavku s **Top** označavamo klasu svih topoloških prostora. Neka je $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ proizvoljan element klase **Top**. Nadalje, za modalnu formulu φ koja je valjana na $\mathbf{W}$ pišemo

$$\mathbf{W} \Vdash \varphi.$$

Definiramo:

$$\Lambda_{\mathbf{Top}} := \{\varphi \mid \ \forall\, \mathbf{W} \in \mathbf{Top}\ (\mathbf{W} \Vdash \varphi)\}\,.$$

Drugim riječima, $\Lambda_{\mathbf{Top}}$ predstavlja skup svih modalnih formula koje su valjane na svim topološkim prostorima, tj. elementima klase **Top**. Stoga, $\varphi \in \Lambda_{\mathbf{Top}}$ ako i samo ako za proizvoljan prostor $(W, \mathcal{T}) \in$ **Top**, proizvoljnu valuaciju V i svaki element $w \in W$ imamo da je

$$(W, \mathcal{T}, V)\,, w \ \Vdash \varphi.$$

Označimo s (K) formulu

$$\Box\,(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)\,.$$

Riječ je aksiomu sistema **K**, za koji vrijedi teorem adekvatnosti i potpunosti u odnosu na relacijsku semantiku, tj. svaka formula je teorem sistema **K** ako i samo ako je valjana na svim okvirima. Detaljniju definiciju sistema **K** ispuštamo, jer je već dana u članku [3].

Zadatak 2. *Dokažite da je formula (K) valjana na svakom topološkom prostoru.*

Pokušajte zadatak riješiti samostalno, a tek po potrebi pogledati rješenje. Za ostale zadatke u članku nećemo navoditi rješenja.

Rješenje. Neka je $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T}) \in \mathbf{Top}$ i neka je $\mathcal{W} = (\mathbf{W}, V)$ proizvoljan topološki model baziran na $\mathbf{W}$. Neka je $w \in W$ po volji odabran element skupa W, takav da vrijedi:

$$\mathcal{W}, w \Vdash \Box (p \to q) \,. \tag{4}$$

Želimo pokazati da vrijedi sljedeće:

$$\mathcal{W}, w \Vdash (\Box p \to \Box q) \,.$$

Iz relacije (4) odmah imamo da postoji neki element $U_1 \in \mathcal{T}$, takav da je $w \in U_1$ i za sve elemente $v \in U_1$ vrijedi

$$\mathcal{W}, v \Vdash \; p \to q. \tag{5}$$

Pretpostavimo da vrijedi:

$$\mathcal{W}, w \Vdash \; \Box p.$$

Tada po definiciji postoji neki element $U_2 \in \mathcal{T}$, takav da je $w \in U_2$ i za sve elemente $u \in U_2$ vrijedi

$$\mathcal{W}, u \Vdash \; p. \tag{6}$$

Prirodno je sada definirati skup $U \subseteq W$ na sljedeći način:

$$U := U_1 \cap U_2.$$

Tada očito imamo da je $w \in U \in \mathcal{T}$. Nadalje, za proizvoljan element $u \in U$ imamo da je:

$$\mathcal{W}, u \Vdash p \quad \text{i} \quad \mathcal{W}, u \Vdash p \to q.$$

Dakle, za proizvoljan element $u \in U$ vrijedi $\mathcal{W}, u \Vdash q$. Stoga jednostavno zaključujemo:

$$\mathcal{W}, w \Vdash \; \Box q.$$

Ovime smo pokazali da je formula

$$\Box (p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

valjana na svim elementima klase **Top**, to jest da vrijedi $(\mathrm{K}) \in \Lambda_{\mathbf{Top}}$ ■

Odavde lako slijedi da je $\Lambda_{\mathbf{Top}}$ proširenje sistema **K**, tj. sadrži sve njegove teoreme. U nastavku ćemo točno odrediti o kojem proširenju se radi.

Označimo sa **S4** proširenje sistema **K** aksiomima

$$\Box p \to p,$$

za koji smo već u uvodu napomenuli da definira refleksivnost, te

$$\Box p \to \Box\Box p,$$

koji, kako je već napomenuto, definira tranzitivnost. Pokazuje se da je sistem **S4** adekvatan i potpun u odnosu na refleksivne i tranzitivne okvire, tj. svaka formula je teorem sistema **S4** ako i samo ako je valjana na svim refleksivnim i tranzitivnim okvirima.
Naš je cilj pokazati da je logika **S4** adekvatna i potpuna i u odnosu na topološku semantiku, tj. da vrijedi sljedeće:

$$\mathbf{S4} = \Lambda_{\mathbf{Top}}.$$

Razmotrimo najprije adekvatnost, tj. inkluziju $\mathbf{S4} \subseteq \Lambda_{\mathbf{Top}}$.

Zadatak 3. *Dokažite da su formule $\Box p \to p$ i $\Box p \to \Box\Box p$ valjane na svakom topološkom prostoru.*

Iz prethodnog zadatka lako slijedi teorem adekvatnosti.

Teorem 4. *[adekvatnost] Neka je φ modalna formula. Ako je φ teorem sistema **S4**, onda je φ valjana na svakom topološkom prostoru.*

U nastavku pokazujemo da vrijedi i potpunost, tj. obratna inkluzija

$$\Lambda_{\mathbf{Top}} \subseteq \mathbf{S4}.$$

U dokazu potpunosti poslužit ćemo se takozvanim konačno generiranim topološkim prostorima koje je uveo Pavel Sergejevič Aleksandrov, poznati ruski matematičar.

Definicija 5. *Za topološki prostor $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ kažemo da je konačno generiran ako je presjek proizvoljne familije otvorenih skupova u W također otvoren skup u W.*

Uočimo da konačna generiranost zapravo zahtijeva da svaka točka $w \in W$, posjeduje *najmanju* otvorenu okolinu, naime presjek svih otvorenih skupova koji sadrže w. Označimo s **Fin** klasu svih konačno generiranih topoloških prostora. Kao ključnu tvrdnju za dokaz potpunosti pokazat ćemo:

$$\Lambda_{\mathbf{Fin}} \quad = \quad \mathbf{S4}.$$

Neka je $\mathbf{W} = (W, R)$ refleksivan i tranzitivan okvir. Kratko ćemo reći da je R *kvaziuređaj*. Za $A \subseteq W$ definiramo:

$$\uparrow A = \{w \in W \mid \exists\, v \in A \,:\, vRw\}.$$

Uočavamo da je $\uparrow A$ skup svih elemenata nosača W koji su dostiživi iz A. Također, očito je:

$$A = \ \uparrow A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \forall y\,(x \in A \,\wedge\, xRy \,\to\, y \in A)\,. \tag{7}$$

Za element $w \in W$, definiramo i takozvani *bazni skup*, u oznaci $R[w]$, na sljedeći način:

$$R[w] = \{v \in W \mid wRv\}\,.$$

Sada možemo na skupu W definirati familiju $\mathcal{T}_R$ stavljajući:

$$\mathcal{T}_R := \{A \subseteq W \mid A = \ \uparrow A\}\,.$$

Jasno je da $\mathcal{T}_R$ definira topologiju na skupu W i time smo propisali otvorene skupove u W.

Uočimo da je topološki prostor $(W, \mathcal{T}_R)$ konačno generiran. Naime, neka je $\{A_i\}_{i\in I}$ proizvoljan podskup od $\mathcal{T}_R$. Neka je $w \in \cap_{i\in I} A_i$ i $v \in W$ takav da vrijedi wRv. Kako je za sve $i \in I$, $w \in A_i$ i $A_i \in \mathcal{T}_R$, to je i $v \in A_i$ za sve $i \in I$ (vidi relaciju (7)). Dakle, $v \in \cap_{i\in I} A_i$, to jest $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_R$.

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je svaki kvaziuređaj (W, R), na prirodan način povezan s klasom **Fin**, pomoću relacije:

$$(W, \mathcal{T}_R) \in \mathbf{Fin}.$$

Nadalje, na tom promatranom topološkom prostoru $(W, \mathcal{T}_R)$, možemo sada, na prirodan način, izgraditi relaciju *kanonskog uređaja*, koju ćemo označiti s $R_{\mathcal{T}_R}$, tako da za proizvoljne elemente $v, w \in W$ definiramo:

$$vR_{\mathcal{T}_R}w \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \mathrm{Cl}\left(\{w\}\right).$$

Vrlo se lagano, koristeći osnovna svojstva zatvarača, može provjeriti da je ovako definirana relacija $R_{\mathcal{T}_R}$ refleksivna i tranzitivna. Drugim riječima, kanonski uređaj ima svojstva kvaziuređaja.

Stoga, polazeći od proizvoljnog refleksivnog i tranzitivnog okvira $\mathbf{W} = (W, R)$ dolazimo do činjenice da je $(W, \mathrm{Cl}T_R) \in \mathbf{Fin}$, koja nas nadalje vodi k novom kvaziuređaju $(W, R_{\mathrm{Cl}T_R})$. Pritom vrijedi:

$$R = R_{\mathrm{Cl}T_R}. \tag{8}$$

Uočimo da je relacija (8) jednostavna posljedica sljedeće tvrdnje:

$$\mathrm{Cl}(\{w\}) \;=\; \{v \in W \mid \; vRw\}\,. \tag{9}$$

Relacija (9) je posljedica refleksivnosti i tranzitivnosti relacije R. Naime, za svaki element $v \in W$, skup $R[v]$ je otvoren u topologiji $\mathcal{T}_R$, što proizlazi iz tranzitivnosti relacije R te (7). Ako je $v \in \mathrm{Cl}(\{w\})$, onda svaka okolina točke v mora sjeći skup $\{w\}$. Refleksivnost relacije R nam daje da je $v \in R[v]$, a time imamo da je i $w \in R[v]$, to jest imamo vRw. Obratno, ako vrijedi vRw, onda je po definiciji $w \in R[v]$. Budući je $R[v]$ zapravo najmanja otvorena okolina točke v, to svaka okolina točke v siječe skup $\{w\}$. Dakle imamo da je $v \in \mathrm{Cl}(\{w\})$.

Krenimo sada od proizvoljnog topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$ koji je konačno generiran, to jest pretpostavimo $(W, \mathcal{T}) \in \mathbf{Fin}$. Tom konačno generiranom topološkom prostoru pridružimo kvaziuređaj $(W, R_{\mathcal{T}})$ na sljedeći način:

$$vR_{\mathcal{T}}w \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \mathrm{Cl}(\{w\}).$$

Na ovako definiranom kvaziuređaju, promatramo topologiju

$$\mathcal{T}_{R_{\mathcal{T}}} := \{A \subseteq W \mid \; A = \; \uparrow A\}\,.$$

Komentirali smo ranije da je topološki prostor $(W, \mathcal{T}_{R_{\mathcal{T}}})$ konačno generiran. U ovom slučaju, kada smo krenuli od konačno generiranog topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$, vrijedi:

$$\mathcal{T} \;=\; \mathcal{T}_{R_{\mathcal{T}}}. \tag{10}$$

Inkluzija koja je u relaciji (10) zaista zanimljiva je

$$\mathcal{T}_{R_\mathcal{T}} \;\subseteq\; \mathcal{T}. \tag{11}$$

Naime, za proizvoljan topološki prostor imamo da je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{R_\mathcal{T}}$. No, pretpostavka konačne generiranosti topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$ potrebna je upravo za dokaz inkluzije (11). Neka je V proizvoljan otvoren skup u topološkom prostoru $(W, \mathcal{T}_{R_\mathcal{T}})$. Neka je $v \in V$. Tvrdimo da postoji neki skup $U \in \mathcal{T}$, takav da je:

$$v \in U \subseteq V.$$

Prirodni kandidat za skup U je skup $\{u \in W \mid \; vR_\mathcal{T}u\}$. Zaista, iz same definicije zatvarača imamo:

$$\{u \in W \mid \; vR_\mathcal{T}u\} \;=\; \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{T}\\ v \in A}} A.$$

Sada konačna generiranost topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$ povlači da je skup $\{u \in W \mid \; vR_\mathcal{T}u\}$ otvoren u W. Također, vrijedi:

$$\{u \in W \mid \; vR_\mathcal{T}u\} \subseteq V,$$

jer je za $u \in \{u \in W \mid \; vR_\mathcal{T}u\}$ ispunjeno da je $v \in \mathrm{Cl}(\{u\})$, što povlači da svaka otvorena okolina točke v nužno sadrži u sebi i točku u, to jest $u \in V$.

Zadatak 6. *Neka je (W, R) kvaziuređaj. Neka je φ proizvoljna modalna formula. Tada vrijedi:*

$$(W, R) \Vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad (W, \mathcal{T}_R) \Vdash \varphi. \tag{12}$$

Kao posljedicu dobivamo potpunost sistema **S4** u odnosu na konačno generirane topološke prostore, tj.

$$\Lambda_{\mathbf{Fin}} \;=\; \mathbf{S4}. \tag{13}$$

Naime, krenuvši od konačno generiranog topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$, izgradimo kvaziuređaj $(W, R_\mathcal{T})$, a onda tvrdnja prethodnog zadatka povlači da je za svaku modalnu formulu φ ispunjeno

$$(W, R_\mathcal{T}) \Vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad (W, \mathcal{T}_{R_\mathcal{T}}) \Vdash \varphi.$$

Međutim, kako smo krenuli od topološkog prostora $(W, \mathcal{T})$ koji je konačno generiran, imamo da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{R_\mathcal{T}}$, iz čega zaključujemo (??).

No, naš cilj je bila potpunost u odnosu na sve topološke prostore, koja je također posljedica prethodnog zadatka. To iskazujemo u sljedećem teoremu.

Teorem 7. *[potpunost] Neka je φ modalna formula. Ako je φ valjana na svakom topološkom prostoru, onda je φ teorem sistema **S4**.*

Dokaz. Neka je $\varphi \in \Lambda_{\mathbf{Top}}$. Kako bismo dokazali da je φ teorem sistema **S4**, koristimo potpunost u odnosu na relacijsku semantiku: dovoljno je dokazati da je φ valjana na svakom refleksivnom i tranzitivnom okviru. Neka je (W, R) takav okvir. Tada znamo da je (W, R) u korespondenciji s konačno generiranim topološkim prostorom $(W, \mathcal{T}_R)$. Kako je $(W, \mathcal{T}_R)$ topološki prostor, a $\varphi \in \Lambda_{\mathbf{Top}}$, to je

$$(W, \mathcal{T}_R) \Vdash \varphi.$$

Prema tvrdnji prethodnog zadatka odmah dobivamo:

$$(W, R) \Vdash \varphi.$$

■

4 Izražajna snaga modalne logike u odnosu na topološke prostore

Označimo s $\mathcal{K}$ neku klasu topoloških prostora. Kažemo da je klasa $\mathcal{K}$ *modalno definabilna*, ako postoji skup modalnih formula Γ takav da za proizvoljan topološki prostor $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ vrijedi:

$$\mathbf{W} \in \mathcal{K} \iff \mathbf{W} \Vdash \Gamma.$$

Kako je sistem **S4** potpun u odnosu na topološku semantiku, imamo da je klasa $\mathcal{K} = \mathbf{Top}$ modalno definabilna i to formulom $\varphi := \top$. Možemo kazati da formula φ definira klasu $\mathbf{Top}$. Navedimo i jedan netrivijalan primjer.

Primjer 8. *Lagano se vidi da modalna formula*

$$\varphi := p \to \Box p$$

definira klasu svih diskretnih topoloških prostora, to jest prostora kod kojih su svi podskupovi otvoreni (odnosno zatvoreni). Naime, za topološki prostor $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ vrijedi sljedeće: $\mathbf{W} \Vdash \varphi$ ako i samo ako je svaki podskup od W otvoren. Ključna je ovdje činjenica da su svi jednočlani podskupovi od W otvoreni u W. Tako, naprimjer, za proizvoljnu valuaciju V, te proizvoljan element $w \in W$, trivijalno vidimo da, ako vrijedi $(W, \mathcal{T}, V), w \Vdash p$, onda za sve elemente v iz skupa $A := \{w\} \in \mathcal{T}$ vrijedi $(W, \mathcal{T}, V), v \Vdash p$, to jest $(W, \mathcal{T}, V), w \Vdash \Box p$.

Ipak, neke važne klase topoloških prostora, kao što je klasa povezanih ili pak klasa kompaktnih topoloških prostora, nisu modalno definabilne.

Kako bismo to pokazali, koristimo neke operacije na topološkim prostorima koje čuvaju valjanost modalnih formula.

Definicija 9. *Neka je $\{\mathbf{W}_i = (W_i, \mathcal{T}_i) \mid i \in I\}$ familija disjunktnih topolo\-ških prostora. Definiramo novi topološki prostor $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$:*

$$W = \bigcup_{i \in I} X_i \ \text{ i } \ \mathcal{T} = \{A \subseteq W \mid \forall i \in I \ (A \cap W_i \in \mathcal{T}_i)\}.$$

Ovako definiran topološki prostor zovemo suma topoloških prostora.

Indukcijom po složenosti modalne formule jednostavno se vidi da za svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeće:

$$\mathbf{W} \Vdash \varphi \iff \forall i \in I \ (\mathbf{W}_i \Vdash \varphi). \tag{14}$$

Primjer 10. *Klasa povezanih topoloških prostora i klasa kompaktnih topoloških prostora nisu modalno definabilne.*

Naime, za svaki prirodan broj i, promotrimo jednočlan skup $W_i := \{i\}$. Na skupu W_i definiramo topologiju $\mathcal{T}_i := \{\emptyset, \{i\}\}$. Primijetimo da je za svaki $i \in \mathbb{N}$ topološki prostor $\mathbf{W}_i = (W_i, \mathcal{T}_i)$ kompaktan i povezan. Neka je nadalje $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ topološka suma familije $\{\mathbf{W}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Uočimo da je zapravo $W = \mathbb{N}$, a $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tada $\mathbf{W}$ nije povezan jer skup $\mathbb{N}$ možemo separirati pomoću skupova $\{1\}$ i $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, koji su očito otvoreni u topologiji $\mathcal{T}$, međusobno disjunktni i neprazni. Također, $\mathbf{W}$ nije niti kompaktan, budući je $\{\{i\} \mid i \in \mathbb{N}\}$ familija otvorenih skupova u W, koja prekriva W, ali je nikako ne možemo reducirati na konačan potpokrivač. Stoga (14) povlači da klasa povezanih topoloških prostora i klasa kompaktnih topoloških prostora ne mogu biti modalno definabilne.

Definicija 11. *Neka je $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ topološki prostor. Svaki par oblika $\mathcal{A} = (A, \mathcal{T}_A)$, gdje je $A \in \mathcal{T}$, a topologija $\mathcal{T}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$ inducirana topologijom $\mathcal{T}$, zovemo otvoreni potprostor od $\mathbf{W}$.*

Indukcijom po stupnju složenosti modalne formule pokazuje se da za svaku modalnu formulu φ iz $\mathbf{W} \Vdash \varphi$ nužno slijedi $\mathcal{A} \Vdash \varphi$.

Primjer 12. *Klasa topoloških prostora koji nisu povezani nije modalno definabilna. Naime, na skupu $W := \{1, 2\}$, možemo promatrati topologiju $\mathcal{T} = \mathcal{P}(W)$. Očito, topološki prostor $\mathbf{W} = (W, \mathcal{T})$ nije povezan, jer se npr. skup W može separirati pomoću skupa $\{1\}$ i skupa $\{2\}$. No, otvoreni potprostor $\left(\{1\}, \mathcal{T}_{\{1\}}\right)$ je povezan.*

Nadalje, koristeći činjenicu da otvorena preslikavanja, tj. funkcije koje otvorene skupove iz domene preslikavaju u otvorene skupove u kodomeni, čuvaju valjanost modalnih formula (v. teorem 36 u [5]), može se zaključiti da ni topološki *aksiomi separacije* T_i, za $i \in \{0, D, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5\}$ također nisu modalno definabilni. Navedimo protuprimjer.

Primjer 13. *Promotrimo skup $W = \{1, 2\}$ i na njemu tzv. indiskretnu topologiju $\mathcal{T} = \{\emptyset, W\}$. Promotrimo funkciju koje sve racionalne brojeve preslikava u broj 1, a sve iracionalne brojeve u broj 2. Lako se vidi da je to otvoreno preslikavanje iz prostora $\mathbb{R}$, koji zadovoljava sve aksiome separacije, u prostor $(W, \mathcal{T})$, koji ne zadovoljava niti jedan.*

Iako nismo definirali sve potrebne pojmove, jer bismo time nadišli okvire ovog članka, na kraju ćemo iskazati opći teorem o modalnoj definabilnosti topoloških svojstava, koji predstavlja analogon Goldblatt-Thomasonovog teorema (v. teorem 43 u [5]).

Teorem 14. *[Gabelaia [2]] Neka je $\mathcal{K}$ klasa topoloških prostora zatvorena na ultafilterska Alexandroffova proširenja. Tada je klasa $\mathcal{K}$ modalno definabilna ako i samo ako je zatvorena na otvorene potprostore, topološke sume, surjektivna otvorena preslikavanja te ako reflektira ultrafilterska Alexandroffova proširenja.*

{00}

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema: *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[2] D. Gabelaia: Modal definability in topology, MScaster's thesis, ILLC, Amsterdam, 2001.

[3] L. Mikec, T. Perkov: Topološka semantika logika dokazivosti, *Math.e* 32 (2017) \url{http://e.math.hr/Vol32/Perkov} (pristupljeno 29. 10. 2018.)

[4] J. R. Munkres: *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[5] B. ten Cate, D. Gabelaia, D. Sustretov: Modal languages for topology: expressivity and definability, *Annals of Pure and Applied Logic* 159 (2009) 146–170.

[6] M. Vuković: *Matematička logika*, Element, Zagreb 2009.

[1]Ovaj pregledni članak je nastao na osnovi seminarskog rada i predavanja koja je Bojan Pažek održao na Seminaru za matematičku logiku i osnove matematike u sklopu ispita iz naprednog kolegija Teorija modela modalne logike na doktorskom studiju matematike.

ISSN 1334-6083