Izvorni znanstveni članak
UDK 51(091)(497.13 DUB-GETALDIĆ) »15/16«
Članak je primljen 12. II. 1991.

Radmila Žarković

Novi Beograd, II bulevar 121/6

MARIN GETALDIĆ, RESTITUTOR APOLONIJEVOG DELA O DODIRIMA

Marin Getaldić (Dubrovnik 1568–1626) je bio i još uvek je jedan od poznatijih matematičara kako u nas tako i širom Evrope, matematičar koji svojim radovima stoji uz bok Fransoa Vijetu i Galileo Galileju. Pojavio se u evropskoj naučnoj misli na prelazu šesnaestog u sedamaesti vek, u vreme kada je Dubrovnik bio u punom zamahu svog kulturnog prosperiteta.

Pojava Marina Getaldića nije bila slučajna. Postojali su vrlo povoljni uslovi u kojima je on mogao izgrađivati svoj naučni pogled na svet i postati ne samo jedan od najistaknutijih stvaralaca veličine i slave starog Dubrovnika, već i znameniti matematičar svoga vremena skoro cele Evrope. Naime, dok su se sve jugoslovenske zemlje nalazile pod vlašću tuđina, mala Dubrovačka republika, nalazeći se između Mletačke Republike s jedne strane i Turskog carstva s druge, trgujući intenzivno sa oboma, ostvarila je vrlo čvrstu materijalnu osnovu i mogućnost za razvitak nauke i umetnosti. Posebna pažnja u Durovniku posvećuje se školi. Tako je Getaldić imao mogućnosti da od 1575. do 1588. godine stekne u Dubrovniku vrlo široko znanje koje mu je omogućilo da se uključi u savremene tokove tadašnje evropske naučne misli.

U želji da produbi i proširi svoja znanja Getaldić je krenuo na studijsko putovanje po zapadnoj Evropi. Boravio je u Italiji, Engleskoj, Belgiji, Holandiji, Nemačkoj i Francuskoj, upoznao se sa mnogim poznatim matematičarima toga vremena: Vijetom (Fançois Viète, 1540–1603), Klavijem (Christiphorus Clavius, 1538–1612), Grinbergerom (Christiphorus Grinbergerus, 1564–1636), Kaunjeom (Michael Goignetus, 1549–1623), Galilejom (Galilei Galileo 1564–1642), sprijateljio sa njima i nastavio saradnju po povratku u Dubrovnik. Prijateljstvo i saradnja sa Vijetom, najpoznatijim matematičarem toga vremena, bitno su uticali na Getaldića. Getaldić je snagom svoga uma odmah shvatio mogućnosti koje su pružale Vijetova dela za dalji razvitak matematike. Takav naučni senzibilitet kakav je imao Getaldić privilegija je izuzetno obdarenih učenih ljudi, jer je u određenim slučajevima razumevanje određenih naučnih misli, njihova dalja nadgradnja i produbljivanje gledanja sa šireg stanovišta naučne koristi, ravna i njihovoj samoj formulaciji.

Getaldić se upoznao i sa Vijetovim radovima u oblasti restitucije. Naime, u to vreme pojavilo se veliko interesovanje mnogih matematičara za dela Euklida, Arhimeda i Apolonija.

Kako su mnoga njihova dela bila izgubljena, to su oni pokušavali da ih restituišu oslanjajući se na navode u sačuvanim delima drugih antičkih matematičara, Papa (Pappus, 250–300), Serena (Serenus, IV vek), Hipatije (Hypatia, 370–515), i kasnijim prevodima nekih od tih dela. Papov Matematički Zbornik izlazi na latinskom jeziku sredinom XVI veka u Italiji u redakciji i s komentarima Komandina (Federigo Commandino, 1509–1575), a krajem XVI veka u Engleskoj u redakciji i s komentarima Haleja (Edmund Halley, 1656–1742).

U sedmoj knjizi Papovog Matematičkog Zbornika nalazi se formulacija problema Apolonijevog dela O dodirima (De Tactionibus). Na osnovu te formulacije problema Vijet je uspeo da restituiše Apolonijevo delo O dodirima. Restituciju je izložio u delu Apolonije Galski ili Oživela geometrija dodira Apolonija Pergejskog (Apollonius Gallus, seu exuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometri, Paris, 1600). Vijet je restituisao deset problema koji se na savremen način mogu izraziti: Konstruisati krug koji prolazi kroz m tačaka, dodiruje n krugova i p pravih ali tako da je $m+n+p = 3$ a $m, n, p \in \{0,1,2,3\}$. Najpoznatiji je problem: Konstruisati krug koji dodiruje tri data kruga. To je i naopštiji problem iz te grupe problema a u literaturi je poznat kao Apolonijev problem. On je bio predmet interesovanja mnogih kasnijih autora. Rešavali su ga Adrija Romen, Rene Dekart (René Descartes 1596–1650) i njegova učenica princeza Elizabeta i Isak Njutn (Isaak Newton 1642–1727).

Vietova restitucija dela O dodirima izašla je iz štampe 1600 godine. Te iste godine u Pariz je stigao Marin Getaldić. Getaldić se upoznao sa Vijetom i njegovim radom u oblasti matematike. Proučivši Vijetovu restituciju Getaldić je pokazao i širi interes za Apolonijevo delo O dodirima. Uvideo je da se neki problemi koje je restituisao Vijet mogu i jednostavnije rešiti, pa je to i učinio. Naime, Vijetov osmi problem je rešio na svoj način. Ali, proučivši i Komandinijev prevod Papovog Matematičkog Zbornika otkrio je da se Apolonijevo delo O dodirima sastojalo iz dve knjige, a da su se u jednoj obrađivale neke vrste dodira koji mogu da se obuhvate stavom »za bilo koja dva zadata elementa od tačaka, pravih i krugova, opisati krug date veličine, koji prolazi kroz datu tačku ili date tačke a dodiruje svaku od pojedinih datih linija.« Ovaj stav sadrži šest problema. Getaldić se zainteresovao za te probleme. Uspeo je da ih restituiše. Restituciju je izložio u delu; Dopuna Apoloniju Galskom ili Oživeli preostali deo gemetrije dodira Apolonija Pergejskog (Marini Ghetaldi, Patritii Ragusini, Supplementum Apollonii Galli seu exuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometriae pars reliqua, Venetiis 1607).

U uvodu dela Getaldić se obraća čitaocu: »Deset problema velikog geometričara Apolonija Pergejskog sretno je restituisao ne manji geometričar Fransoa Vijet ili Apolonije Galski. Ali u knjizi O dodirima Apolonija Pergejskog bilo je šesnaest problema kako kaže Papos Aleksandrinac u sedmoj knjizi Matematičkog zbornika. Prema tome Apolonije Galski nije oživeo svu geometriju dodira Apolonija Pergejskog. Ali mi ćemo to dopuniti i tako Apolonije Galski neće bez Apolonija Ilirskog (kako je sebe nazivao) oživeti Apolonija Pergejskog, koji je ležao ugasnuvši nepravdom vremena ili pokopan od varvara«.

Delo je posvetio Markizu Pavlu Emiliju Ćeziju.[1] U posveti Getaldić se zahvaljuje Ćeziju za dobročinstva koja je učinio za njega: »Dopuna Apolonija Galskog želim da bude svedok tvojih zasluga prema meni. Mnogo je spomenika plemenitosti, mudrosti i drugih tvojih vrlina, a naročito susretljivosti, kojom grlim učene ljude. Što ja pišem tvoje je.«

---

[1]Ćezi je bila čuvena rimska plemićka porodica u čijem se društvu Getaldić nalazio kad je boravio u Rimu. Frederiko Ćezi (Frederico Cesi) je osnovao Akademiju nauka u Rimu – Akademiju dei Lincei.

Problemi koje je restituisao Getaldić mogu se na savremen način izraziti: Konstruisati krug datog poluprečnika koji prolazi kroz m tačaka, dodiruje n pravih i p krugova ali tako da je $m+n+p=2$ a $m, n, p \in \{0,1,2\}$.

Problem 1. Konstruisati krug datog poluprečnika koji sadrži dve date tačke.

Problem 2. Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje dve date prave.

Problem 3. Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje dva data kruga.

Problem 4. Konstruisati krug datog poluprečnika koji sadrži datu tačku i dodiruje datu pravu.

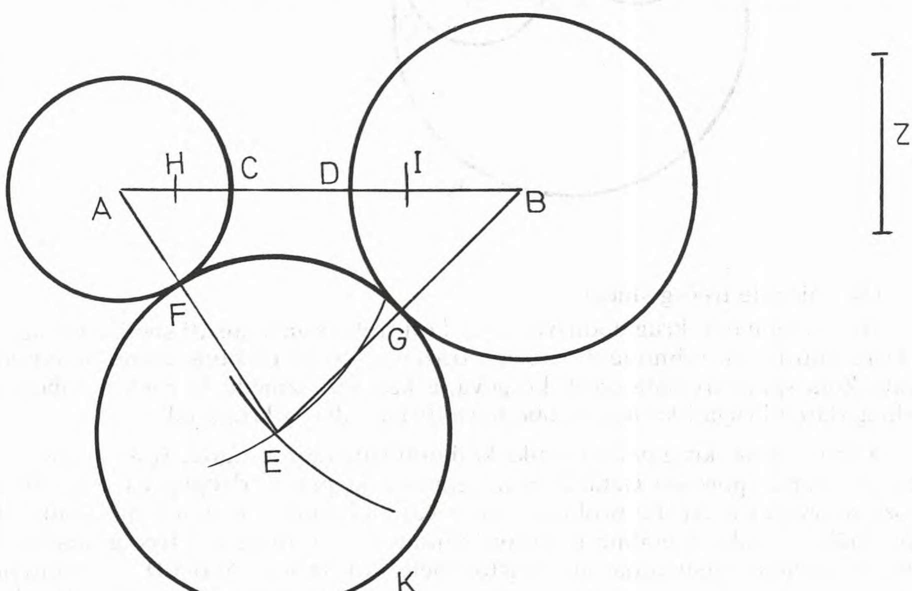
Problem 5. Konstruisati krug datog poluprečnika koji sadrži datu tačku i dodiruje dati krug.

Problem 6. Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje datu pravu i dati krug.

Getaldićevo delo sadrži na kraju još jedan problem. To je Vijetov osmi problem. Getaldić nije bio zadovoljan njegovom restitucijom, pa ga je rešavao sam i izložio u svom delu. To je problem: Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje dati krug.

Getaldić je delo pisao u okviru starogrčke geometrijske metode. Želeo je da restitucija bude što vernija originalu, pa je i u metodološkom pogledu, ugledajući se na Vijeta, uspeo da pogodi duh i stil Apolonijeve geometrije O dodirima.

Getaldić prvo formuliše problem. Zatim, kako se u mnogim slučajevima može desiti da se na osnovu datih elemenata ne može konstruisati traženi krug, oni uvodi ograničenja. Ograničenja uvodi i zbog načina konstruisanja traženog kruga. Naime, on razlikuje slučajeve kada dati krug dodiruje traženi krug spolja i kada ga dodiruje iznutra. Za sve slučajeve konstruiše samo po jedan traženi krug. Dakle,



Sl. 1.

njega interesuje samo jedno rešenje, što je karakteristika vremena u kojem je živeo. Međutim, on je otišao i dalje. On uvodi ograničenja da ne bi došlo do nemogućnosti rešenja problema, a iz njih se eksplicitno može zaključiti da ima slučajeva kada problem ima i više rešenja.

Getaldićeva ograničenja za sve probleme mogu se iskoristiti da se izvrši diskusija problema. Pokazaćemo to na problemu 3.: Konstruisati krug datog poluprečnika koji dodiruje dva data kruga.

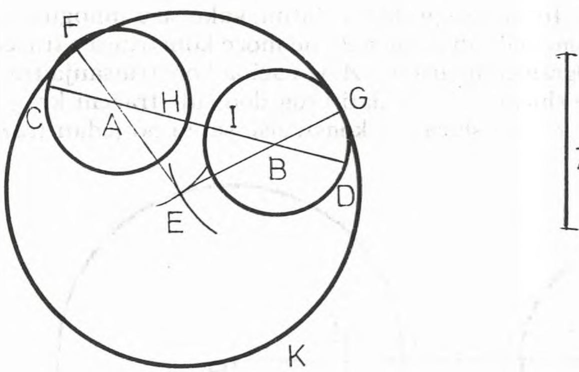
Prva tri ograničenja koja Getaldić uvodi kod ovog problema odnose se na slučaj kada su krugovi spoljašnji i nemaju zajedničkih tačaka.

Ograničenje prvog slučaja:

Da bi dati krugovi dodirivali spolja krug koji treba konstruisati, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude manji od odsečka na pravoj koja spaja središta datih krugova, a koji leži između konveksne obodnice jednog i drugog datog kruga (sl. 1.).

Ograničenje drugog slučaja:

Da bi dati krugovi dodirivali iznutra krug koji treba konstruisati, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude manji od one dužine koja, spajajući središta datih krugova, leži između konkavne obodnice jednog i drugog datog kruga (sl. 2.).



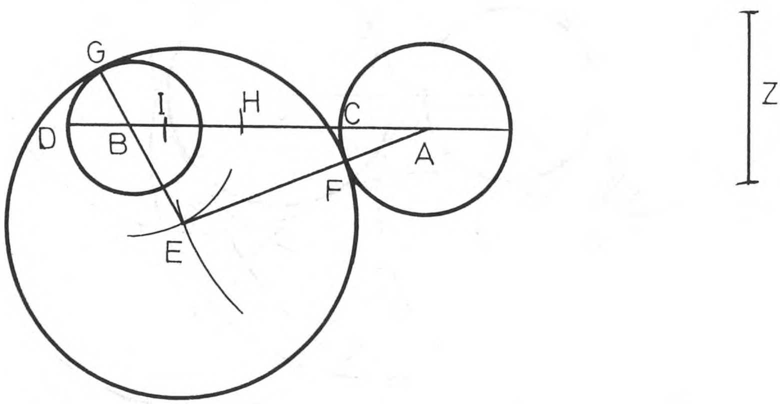
Sl. 2.

Ograničenje trećeg slučaja:

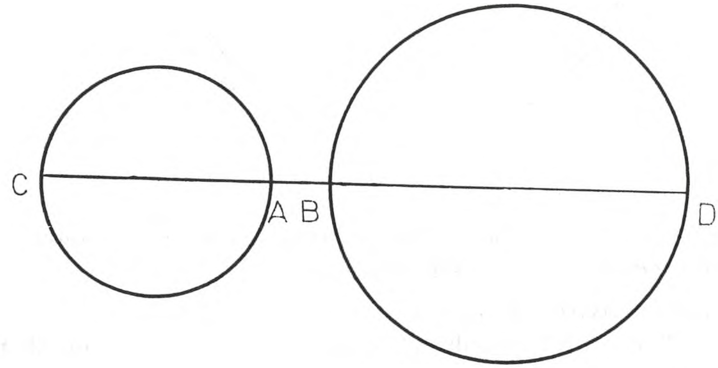
Da bi jedan dati krug dodirivao krug koji treba konstruisati spolja, a drugi dati krug iznutra, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude manji od odsečka prave koja spaja središta datih krugova, a koji leži između konveksne obodnice jednog datog kruga i konkavne obodnice drugog datog kruga (sl. 3.).

Kako je svaki krug poluprečnika koji dodiruje date krugove rešenje postavljenog problema, pomoću Getaldićevih ograničenja prvog, drugog i trećeg slučaja može se izvršiti diskusija problema za slučaj kad su dati krugovi spoljašnji i bez zajedničkih tačaka. Getaldić u ograničenjima prvog, drugog i trećeg slučaja posmatra različita rastojanja, ali ih isto obeležava sa CD. Ako CD u ograničenju prvog slučaja obeležimo sa AB, a u ograničenju trećeg slučaja sa AD i BC (sl. 4.) diskusija problema se može prikazati sledećom tabelom.

2R > CD 8 reš.			
2R = CD 7 reš.			
2R < CD	2R > BC	2R > AD 6 reš.	
		2R = AD 5 reš.	
		2R < AD 4 reš.	
	2R = BC	2R > AD 5 reš.	
		2R = AD 4 reš.	
		2R < AD 3 reš.	
	2R < BC	2R > AD 4 reš.	
		2R = AD 3 reš.	
		2R < AD	2R > AB 2 reš.
			2R = AB 1 reš.
			2R < AB nema reš.

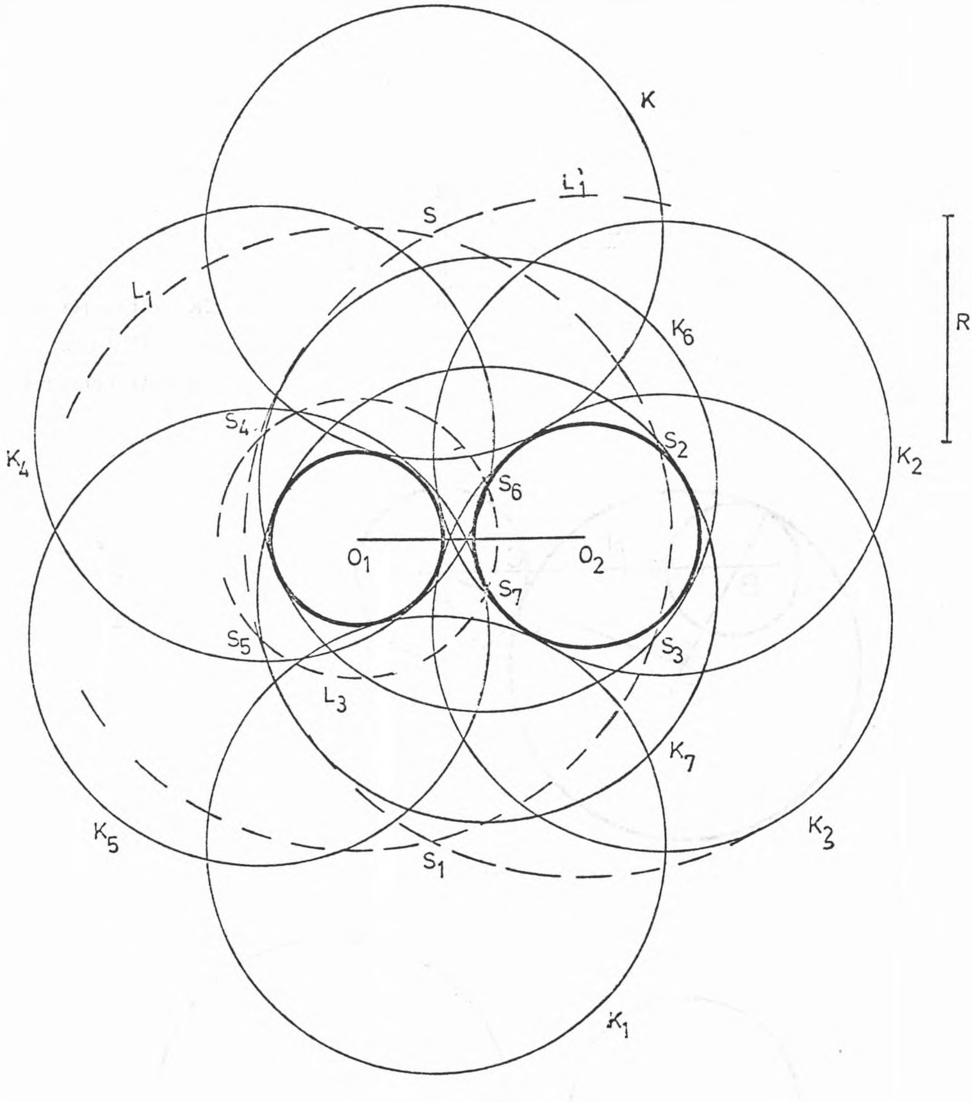


Sl. 3.



Sl. 4.

Najinteresantniji je slučaj kada je 2R > CD, tj. kada problem ima 8 rešenja (sl. 5.).

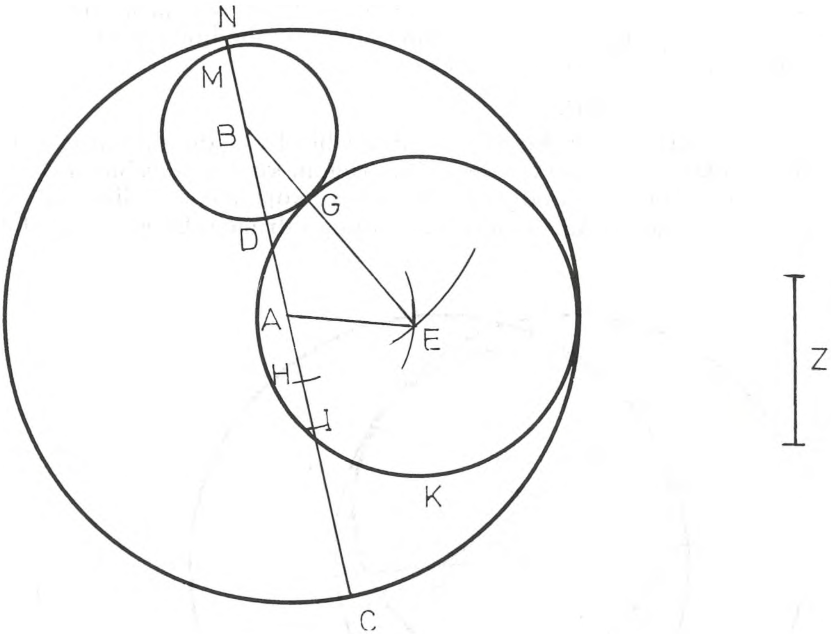


Sl. 5.

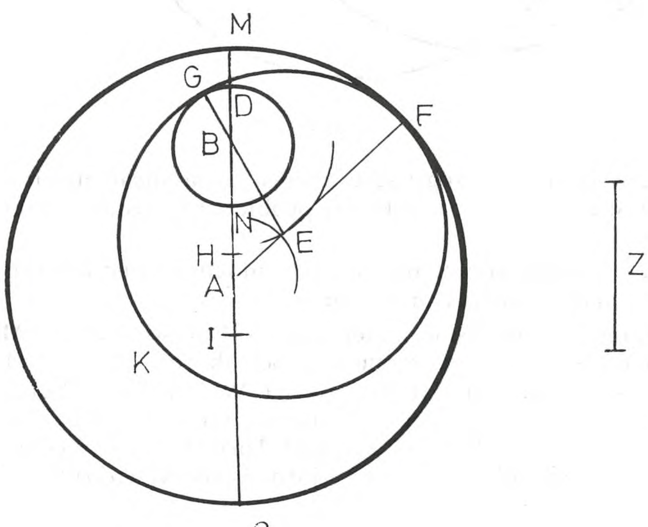
Ograničenja četvrtog i petog slučaja odnose se na slučaj kada se jedan dati krug nalazi u oblasti drugog datog kruga.

Ograničenje četvrtog slučaja:

Ako je jedan dati krug u oblasti drugog datog kruga, da bi oni dodirivali krug koji treba konstruisati spolja, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude veći od većeg odsečka na pravoj koja spaja središta dvaju datih krugova, a koji leži između konveksne obodnice jednog i konveksne obodnice drugog kruga, niti manji od manjeg odsečka (sl. 6.).



Sl. 6.



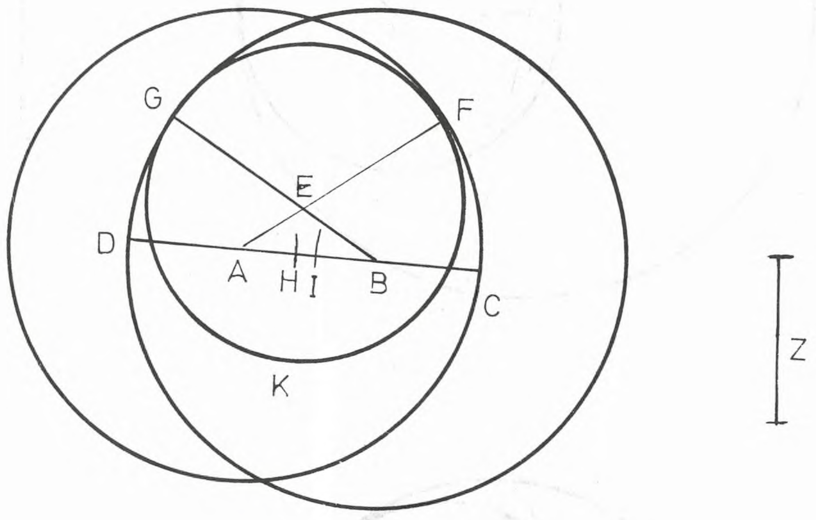
Sl. 7.

Ograničenje petog slučaja:

Ako je jedan dati krug u oblasti drugog datog kruga, da bi jedan dati krug dodirivao krug koji treba konstruisati spolja, a drugi iznutra, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude ni veći od većeg odsečka na pravoj koja spaja središta dvaju datih krugova, koji leži odsečen između konkavne obodnice jednog i drugog datog kruga, niti manji od manjeg odsečka (sl. 7.).

Ograničenje šestog slučaja:

Ako se dati krugovi međusobno seku, da bi oba dodirivala krug koji treba konstruisati, a koji se nalazi i u jednom i u drugom krugu, potrebno je da prečnik traženog kruga ne bude veći od osečka na pravoj koja spaja središta datih krugova, a koji leži između konkavne obodnice jednog i drugog datog kruga (sl. 8.).



Sl. 8.

Ograničenja četvrtog, petog i šestog slučaja, na sličan način kao prethodni, mogu se iskoristiti da se izvrši diskusija problema za ostale međusobne odnose datih krugova.

Ograničenja i drugih problema takođe se mogu iskoristiti da se izvrši diskusija i da se problemi reše na savremen način.

Zaslugom dvojice vrhunskih matematičara, Fransoa Vijeta i Marina Getaldića, Apolonijevo delo O dodirima otrgnuto je od zaborava. Delo je vrlo brzo postalo vrlo aktuelno. Neki matematičari, Kamerer (J. W. Camerer), Danijel Šventer (Daniel Schwenter) i Pjer Erigon (Pierre Herigone), unose ga u svoje kurseve matematike, dok se drugi, Ferma (Pierre de Fermat), Toričeli (E. Torricelli), Simson (Thomas Simpson), Loson (John Lawson) i Njutn (Isaak Newton) bave šire problemima dodira.

Getaldićeva restitucija Apolonijeog dela O dodirima inspirisala je engleskog matematičara Džona Losona (John Lawson) da probleme proširi. Naime, Loson je u delu Dve knjige Apolonija Pergejskog O dodirima koje su restituisali Fransoa Vijet i Marin Getaldić (The two books of Apollonius Pergaeus, concerning Tangencies as they have been restored by Franciscus Vieta and Marino Ghetaldus with a supplement), štampanim u Kembridžu 1764 g., priključio i svoj dodatak. U dodatku Loson je obradio Getaldićeve probleme ali bez date veličine za poluprečnik traženog kruga.

Probleme koje je Loson obradio možemo da izrazimo na savremen način: Konstruisati geometrijsko mesto središta krugova koji sadrže m tačaka, dodiruju n pravih i p krugova, ali tako da je $m+n+p=2$ a $m, n, p \varepsilon \{0,1,2\}$. Problema ima šest.

Neki matematičari koji su se bavili restitucijom Apolonijevih dela nazivali su sebe Apolonijima, ili su ih drugi tako zvali. Među svim tim Apolonijima Marin Getaldić (Apollonius Iliricus) zauzima značajno mesto i švajcarski matematičar Gulden (Paul Gulden) je bio u pravu kada je rekao da je »Apolonijima glava«.

Getaldićeva restitucija Apolonijevog dela O dodirima aktuelna je još uvek i inspiriše i savremene matematičare da se bave problemima geometrije dodira.

Problemi koje je restituisao Getaldić obuhvaćeni su programom srednje škole. Zbog toga su oni predmet proučavanja mnogih autora i uneti su u pojedine udžbenike. Međutim, u svim tim udžbenicima ili problemi nisu formulisani na ispravan način ili rešenja ne odgovaraju postavljenom problemu. Getaldićeva restitucija se može iskoristiti da se problemi reše na savremen način, a Getaldićeva ograničenja da se diskusija problema u potpunosti pravilno izvede.

LITERATURA

[1] Marin Getaldić, Opera Omnia, Zagreb, 1968.

[2] Marin Getaldić, Sabrana djela, Zagreb, 1972.

[3] Francisci Vieta, Opera Mathematica, recognita Francisci a Schooten, Vorwort und Register von Joseph E. Hofman 1970, Georg Olma Verlag Hildesheim New York

[4] Oenvres de Fermat, publiees pars les soins de Paul Tannery et Charles Henry, Paris 1896.

[5] Pierre Fermat, Det contacts spherique, Paris, 1896.

[6] John Lawson, The two books of Apollonins Pergaens, conserning Tangencies as they have been restored by Franciscus Vieta and Marino Ghetaldus with a supplement, the second edition, London 1771.

[7] E. Torricelli, De Tactionibus in Opere, Vol I. Part I. 1919.

[8] Isaak Newton, The mathematical papers, edited by D. T. Wlifeside Cambrige University press. 1967.

[9] Dr Ernest Stipanić, Marin Getaldić i njegovo mesto u matematici i naučnom svetu, Beograd 1961.

[10] Dr Ernest Stipanić, Marin Getaldić i njegov rad u matematici i fizici, Institut za povijest prirodnih, matematičkih i medicinskih nauka Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, Zagreb 1969.

[11] Dr Ernest Stipanić, Marin Getaldić i njegovo delo, Dijalektika br. 4 1968.

[12] Dr Žarko Dadić, Getaldićeve restitucije Apolonijevih dela i uticaj na kasnije restauratore, Dijalektika 1972.

[13] Josip Balabanić i Žarko Dadić, Pismo švicarskog matematičara Paula Guldina Marinu Getaldiću, JAZU, Dubrovnik 1978.

[14] Radovi Međunarodnog simpozijuma »Geometrija i algebra početkom XVII stoleća« povodom 400 godišnjice rođenja Marina Getaldića, Dubrovnik 1968.

[15] Oton Kučera, O Marinu Getaldiću, patriciju dubrovačkom, znamenitom matematiku i fiziku na početku XVII veka, JAZU knj. CXVII Zagreb 1893.

Radmila Žarković

MARIN GETALDIĆ, RESTITUTOR OF APOLLONIUS WORK OF CONTACTS

Summary

Marin Getaldić appeared in the world of the European scientific mind, especially in the field of mathematics, in the late XVI and the early XVII century; that was the time when cultural prosperity florished over Dubrovnik.

Mathematicians all around Europe were, at that time, greatly interested in the works of antique mathematicians like Euclid, Archimedes and Apollonius.

Since many of their works were lost they were making effort to restitute them, relying upon some quotations in the works of other antique mathematicians.

Francois Viéte, Marin Getaldić and John Lawson dealt with the restitution of the lost Apollonius work of constacts. French mathematician, Francois Viéte, was the first to get down to work on the Apollonius work of contacts. He restituted the problems which, in modern terms, could be expressed in this way: to draw a circle which falls through m points, it touches n lines and p circles so that $m+n+p=3$ and m, n, p $\in\{0,1,2,3\}$.

Marin Getaldić, a citizen of Dubrovnik, showed some greater interest for the work of contacts. He had solved one of Viéte's problems in the most cenvenient way and discovered that the work of contacts contained also the problems which could be expressed, in modern terms, as following: to draw a circle of the given radius which falls though m points, it touches n lines and p circles in the way that $m+n+p=2$ and m, n, p$\in\{0,1,2\}$. There are six problems. The most interesting among them is this one: to draw a circle of the given radius that touches two other given circles. The restitution of these problems was expressed in the work of Marini Ghetaldi, patritii Ragusini, Supplementum Apollonii Galli seu exucitata Apollonii pergaei tactionum geometriae pars reliqua, Venetiis apud Vencentium Fiorinam MDCVII.

By solving problems Getaldić first formulated a problem in his restitution. Then he introduced limitations, as in many cases can happen that you cannot draw a circle on the basis of some given elements. He introduced those limitations because of different ways of drawing the circle. Getaldić's limitations are important because they help to do the discussion of the problem. Getaldić, by his restitution, showed himself as an extraordinary geometrician. He wanted his restitution to be true to the original and he succeeded in guessing the spirit and style of Apollonius geometry of contacts.

Thanks to two top mathematicians, Francois Viéte and Marin Getaldić, Apollonius work of contacts cannot be forgotten. The work has soon become very up-to-date. Some mathematicians (Camerer, Schwenter) use it in their courses of mathematics whereas others inspired by their works (Fermat, Toricelli, Simson, Lawson and Newton) deal more with the contact problems.

In the restitution of Apollonius work of contacts Marin Getaldić takes an important place so that Paul Guldman had real reasons to call him »Apollonius Head«.

The problems which were restituted by Marin Getaldić do not go over elementary geometrics in current sense of the subject, and are included in the program of the secondary school so that the same problems have been studied by many authors. They are included into some textbooks but very incomplete. In fact, the problems are given mainly for some special examples.

Getaldić's restitution can contribute to adequate solutions to problems in some current way and the problems could be discussed thoroughly.