Anali, sv. 29/1991, str. 233–242

Izvorni znanstveni članak
UDK 514.116(497.13DUB)(091) »1788«
Članak je primljen 12. II. 1991.

Boris Franušić
Pomorski fakultet, Dubrovnik

PROBLEMI RAVNE I SFERNE TRIGONOMETRIJE S AKADEMIJE U DUBROVAČKOM KOLEGIJU 1788. GODINE

Uvod

Poznato je da se koncem 18. stoljeća u Dubrovniku u pijarističkom kolegiju u tečaju filozofije učila matematika. Tečaj filozofije trajao je dvije godine. U prvoj godini su se učili dijelovi elementarne matematike, a u drugoj godini dijelovi više matematike. Također je poznato da se na kraju svake školske godine održavala akademija na kojoj su učenici izlagali određene teme i odgovarali na pitanja i zadatke što su im postavljani iz gradiva koje su učili u tečaju.[1] U biblioteci Male Braće u Dubrovniku sačuvani su tiskani programi počevši od 1787. god., a jedino u programu za 1788. god. tiskani su poučci i zadaci ravne i sferne trigonometrije. Programi su tiskani na talijanskom jeziku.[2]

Ovaj rad bavi se analizom nekim problema iz ravne i sferne trigonometrije, koji su mogli biti primijenjeni na brodu u rješavanju navigacijskih problema.

Neki problemi ravne trigonometrije

Iz ravne trigonometrije tiskano je ukupno 48 poučaka i zadataka. Jedna trećina su praktični zadaci tiskani kurzivom. Svi su poučci i zadaci tekstualni, bez ijednog simbola, slike ili broja. Odgovori i rješenja nisu tiskani. Na akademiji su te 1788. godine poučke tumačili i praktične probleme rješavali učenici Baro Bettera, Miho Zuzzeri, Nikola Brandini i Vlaho Stulli.

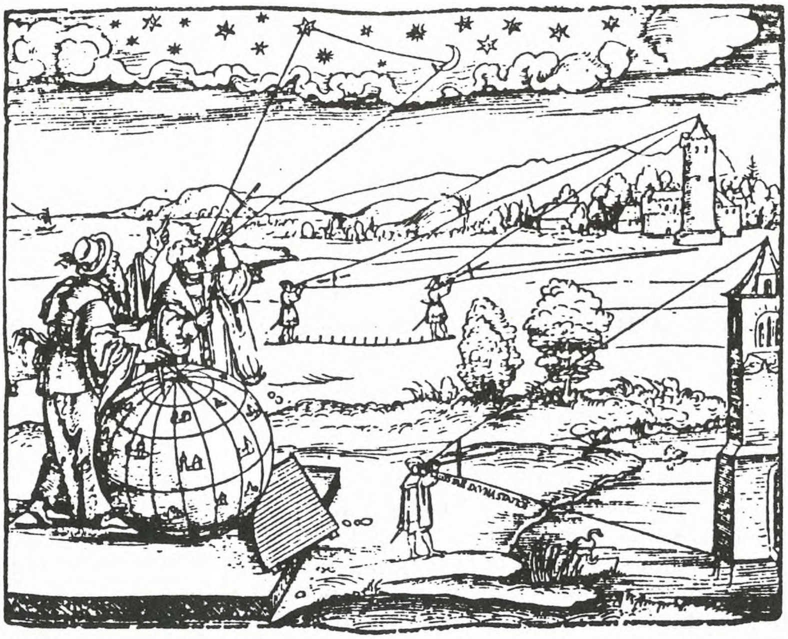
Ima zadataka u kojima se rješavaju udaljenosti tvrđava, duljine jezera i sl. Od zadataka izdvojio sam one koji su mogli biti primijenjeni i u navigacijskoj praksi. Svakom praktičnom zadatku prethodi zadatak općeg trokuta s adekvatno zadanim elementima. Prvo se donose zadaci za pravokutni trokut. Ima ih ukupno 36. Evo nekih:

1. Uz zadanu visinu oka, naći daljinu do koje oko može vidjeti površinu mora i zemlje.

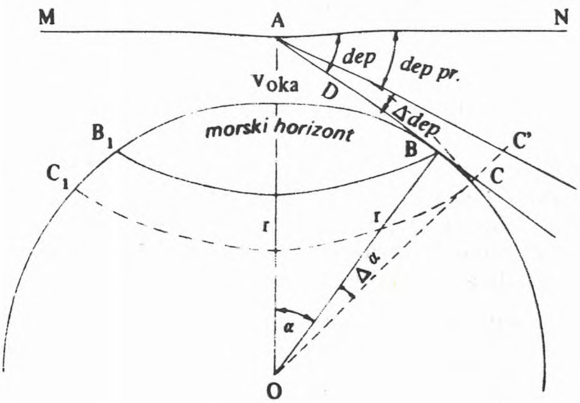
---

[1] Žarko Dadić, »Nastava matematike, fizike i astronomije u Dubrovniku krajem 18. i početkom 19. stoljeća«, *Anali Historijskog instituta u Dubrovniku* 10–11 (1962–3), pp. 333–345; Isti, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata*, sv. I (Zagreb: Liber, 1982), pp. 250–1.

[2] *Esercizio accademico di trigonometria rettilinea, e sferica da tenersi da signori scolari di filosofia, e matematiche il secondo anno del loro corso nel Collegio delle Scuole Pie* (Ragusa, Il dì 15 Aprile 1788), pp. I–XVI.



Slika 1. Mjerenje kutnih veličina na nebu i Zemlji prema jednom starijem udžbeniku



Slika 2.

Ovaj zadatak najjednostavnije se rješava po Pitagorinom poučku tj.

$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{2rv_o} = 3569{,}6\sqrt{v_o}$ (m)

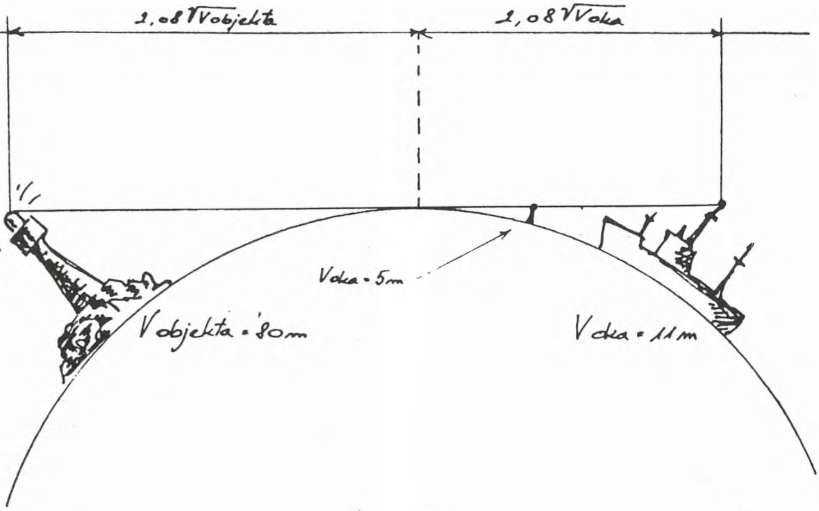
$AB = D$, pa je za npr. $v_o = 9$ m, $D = 10708{,}8$ m $= 5{,}8$ M (M $= 1852$ m)

Oni vjerojatno nisu rješavali po Pitagorinom poučku, već su računali kut u središtu α.

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+v_o} = \frac{6.378.000}{6.378.009} = 0{,}999998; \quad \alpha = 5',8 = 5{,}8\ \mathrm{M}$$

Međutim, danas je poznato da se uslijed terestričke refrakcije vidljivost morskog horizonta povećava do točke C.[3] ($D = 2{,}08 \sqrt{v_o}$)

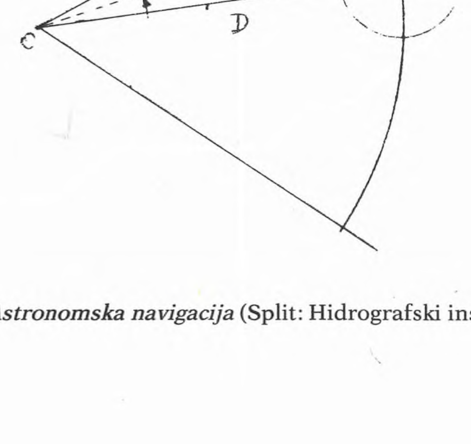
2. Odrediti koliko smo udaljeni od jednog predmeta neke zadane visine, kada otkrijemo vrh.



Slika 3.

Ovaj se zadatak može primijeniti i na kopnu, ali se ipak više rješavao na moru. I ovdje udaljenost ovisi o visini oka. Na slici je pokazan svjetionik koji se s visine oka od 5 m vidi na daljini 4,6 M, a s 11 m na daljini 6,9 M.

3. Uz pomoć nekih prigodnih sredstava može se izmjeriti pravi polumjer Sunca ili nekog drugog planeta.



Slika 4.

[3] Miloš Lipovac, *Astronomska navigacija* (Split: Hidrografski institut JRM, 1981), p. 214.

Ovdje se pod »prigodnim sredstvima« podrazumijeva instrument s kojim bi se izmjerio prividni polumjer (oktant-sekstant), ali se po zadatku koji mu prethodi podrazumijeva i poznavanje udaljenosti. Dovodeći u dodir reflektiranu sliku s pravim likom Sunca, može se na sekstantu pročitati prividni promjer Sunca. Onda je lako izračunati R = D tg r.

$R = 149{,}6 \cdot 10^6 \cdot \text{tg } 16' = 696.275$ km. Danas znamo da je ova vrijednost 696.350 km.

Za kosokutni ravni trokut postoje 4 poučka i 8 zadataka. Samo jedan primjer kosokutnog ravnog trokuta primjenljiv je bio za mjerenje na brodu:

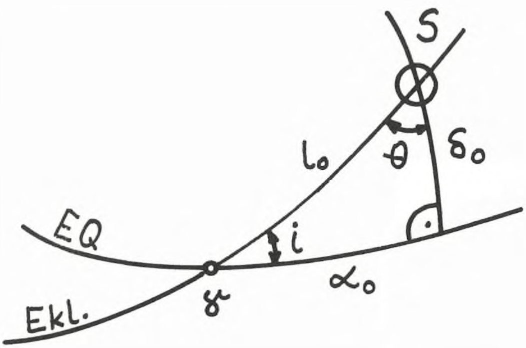
4. Poznavajući udaljenost od dva mjesta i kut pod kojim ih vidimo, odrediti njihovu međusobnu udaljenost.

Ovo se rješava primjenom kosinusovog poučka za ravni trokut.

Problemi sferne trigonometrije

Sferna trigonometrija obuhvaća ukupno 76 zadataka. Veliki dio su poučci, a praktičkih zadataka je 20. I u sfernoj trigonometriji prvo su poučci i zadaci za pravokutni, a onda za kosokutni sferni trokut. Međutim, prvi poučci sadrže sve relacije koje važe općenito za sferne trokute. Ne primjenjuje se Napierovo pravilo za rješavanje pravokutnog sfernog trokuta, već se odnos elemenata pravokutnog sfernog trokuta opisuje u osam zadataka. Ustvari, deset relacija za rješavanje svih slučajeva pravokutnog sfernog trokuta[4], koje inače danas rješavamo jedinstvenim Napierovim pravilom, ovdje je izraženo u šest poučaka. Primjera radi, jedan od njih u slobodnom prijevodu glasi ovako: »u svakom pravokutnom sfernom trokutu pravilo je da je sinus jedne stranice uz pravi kut, skupa s tangensom kuta nasuprot druge stranice, jednak tangensu ove posljednje stranice.« To znači: $\sin a \text{ tg } \beta = \text{tg } b$, što je ista relacija kao i $\sin a = \text{tg } b \text{ ctg } \beta$, koja se dobije pomoću Napierova pravila.

Nekoliko zadataka odnosi se na pravokutni sferni trokut određen s vrhovima u Proljetnoj točci, Suncu i njegovoj projekciji na Ekliptici. Tu se pojavljuje nagib Ekliptike 23° 29′ kao jedini brojčani podatak. Iz tog trokuta određuju se deklinacije Sunca za svaku točku Ekliptike, ili položaj Sunca na Ekliptici po rektascenziji ili ekliptičkoj duljini.

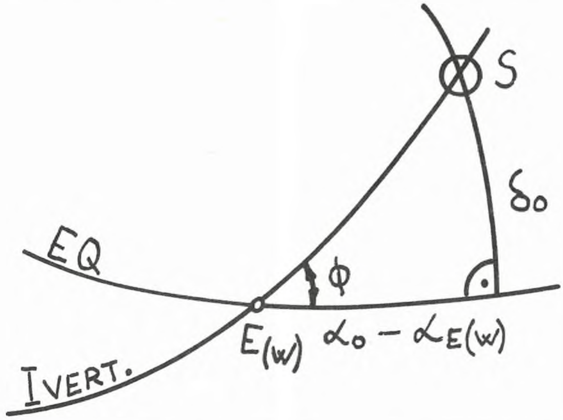


Slika 5.

[4] Juraj Justinijanović, *Sferna trigonometrija* (Zagreb: Tehnička knjiga, 1956), pp. 69–71.

Zanimljiv je jedan zadatak u kojem se kaže da je zadana visina pola bila kojeg zadanog mjesta sa deklinacijom Sunca, a traži se razlika rektascenzija.

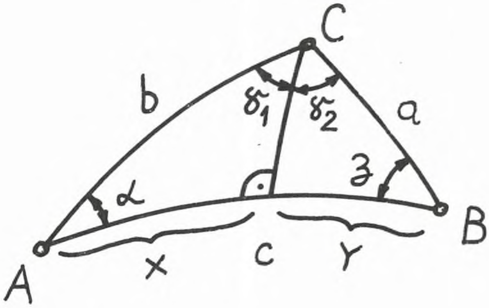
Nigdje se ne spominje da bi se za rješenje ovako postavljenog zadatka morala tražiti razlika rektascenzija od istočne (E) ili zapadne (W) točke na horizontu do položaja Sunca u prvom vertikalu, jer jedino onda se može rješavati pravokutni sferni trokut s vrhovima u E (W) točki, Suncu i njegovoj projekciji na ekvatoru.



Slika 6.

Relacija koja rješava zadatak je sin $\alpha_o - \alpha_{E(W)}$ = ctg Φ tg δ_o Jedan drugi zadatak, za kojeg je naglašeno da nije od male koristi za praksu astronomije (misli se na sastavljanje tablica), jest određivanje kuta Ekliptike s nebeskim meridijanom kroz nebesko tijelo uz poznat nagib Ekliptike i rektascenziju nebeskog tijela. Na slici 5 to je kut θ. Ovakvi zadaci danas se više ne rješavaju.

U posebnim poučcima za kosokutni sferni trokut definirani su neki odnosi koji se ne koriste za rješavanje trokuta. Tako npr. jedno pravilo za kosokutni sferni trokut, unutar kojeg se spusti okomica na jednu stranicu — bazu glasi: »tangens polovice baze stoji prema tangensu poluzbroja ostale dvije stranice, kao što tangens polurazlika ove dvije stranice stoji prema tangensu polurazlika segmenata baze.«



Slika 7.

$$\mathrm{tg}\,\frac{c}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{a+b}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{a-b}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{x-y}{2}$$

To nije poučak o tangensima, a nije ni vidljivo kako bi se mogao primijeniti na rješavanju trokuta.

Neki drugi poučci dobiju se pravilima rješavanja pravokutnih sfernih trokuta nastalih spuštanjem okomice. Iako su ti poučci valjani, oni nisu primjenljivi za rješavanje kosokutnog sfernog trokuta. Evo tih opisanih poučaka napisanih u obliku relacije za elemente sfernog trokuta sa sl. 7.

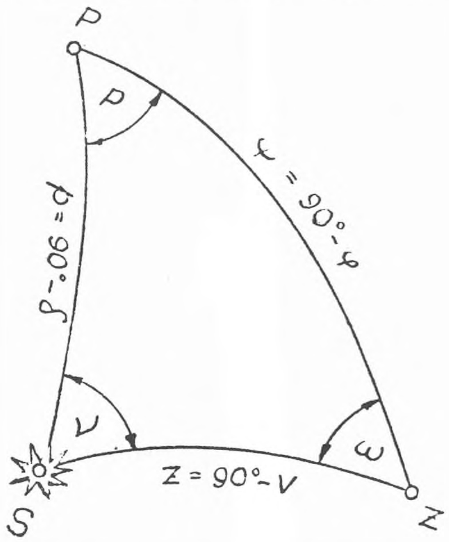
$$\cos x : \cos y = \cos b : \cos a$$

$$\sin \gamma_1 : \sin \gamma_2 = \cos \alpha : \cos \beta$$

$$\cos \gamma_1 : \cos \gamma_2 = \mathrm{tg}\, a : \mathrm{tg}\, b$$

Od 12 praktičnih zadataka iz astronomije rješvaju se zadaci prvog i drugog astronomskog sfernog trokuta, ali i trokuta kojemu su vrhovi dvije zvijezde i pol Ekliptike.

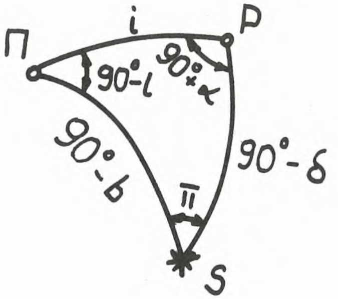
U primjerima iz prvog astronomskog-nautičkog sfernog trokuta nalaze se zadaci u kojima se traži deklinacija zvijezde uz njezinu poznatu visinu, azimuta i satni kut, ili obratno, satni kut uz poznatu visinu, azimut i deklinaciju, a također pomoću visine, azimut i širine motrioca. Satni kut može se izračunati i pomoću sve tri stranice. Ovo su sve zadaci koji se i danas rješavaju u astronomskoj navigaciji.



Slika 8.

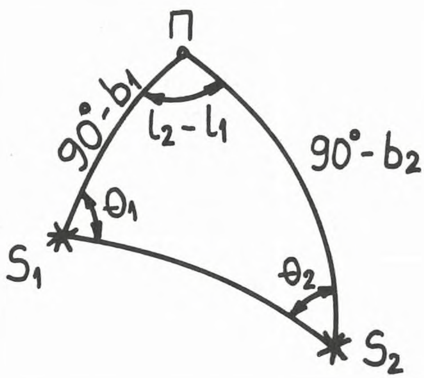
Jedan posebno zanimljiv zadatak za ovaj trokut glasi: »budući je zadano vrijeme izlaska i zalaska Sunca, traži se horizontska refrakcija.« To je specijalni slučaj astronomsko-nautičkog sfernog trokuta kad bi stranica zenitne daljine trebala biti 90°, pa se kosokutni sferni trokut pretvara u kvadrantni. Međutim, ne spominju se kvadrantni sferni trokuti, već je ovo primjer koji slijedi opći zadatak sa zadane dvije stranice i kutem između njih. Zato se pretpostavlja da je uz zadani sitni kut (određen s vremenom izlaska-zalaska Sunca) još poznata deklinacija Sunca i širina motrioca. S tim elementima računa se vrijednost visine pa, zanemarujući visinu oka, to predstavlja horizontsku refrakciju, koja u ono vrijeme još s dovoljnom točnošću nije bila utvrđena.

Od zadataka iz drugog astronomskog trokuta u jednom se traži ekliptička duljina Sunca pomoću nagiba Ekliptike, rektascenzije i deklinacije Sunca, a u drugom se traži ekliptička širina zvijezde uz poznati nagib Ekliptike, ekliptičku duljinu i deklinaciju zvijezde, što su i danas uobičajeni zadaci u astronomiji.



Slika 9.

Postoje i tri zadatka za rješavanje sfernog trokuta s vrhovima u ekliptičkom polu i u dvije zvijezde. U prvom zadatku traži se ekliptička širina druge zvijezde ako se pozna sferna udaljenost od prve, kut kojeg ta udaljenost zatvara s ekliptičkim meridijanom kroz prvu zvijezdu i razlikom ekliptičkih duljina obje zvijezde. Drugi zadatak određuje sfernu udaljenost između dvije zvijezde uz poznate njihove ekliptičke koordinate, dok treći određuje razliku ekliptičkih duljina zvijezda uz poznate njihove ekliptičke širine i njihove međusobne sferne udaljenosti. Ovi zadaci danas se više ne koriste u astronomskoj navigaciji, ali su u ono doba bili itekako aktualni za rješavanje zadataka u tzv. metodi Mjesečevih udaljenosti radi određivanja geografske duljine broda.



Slika 10.

I ovdje ima nekih čudno definiranih zadataka. Tako jedan zadatak, koji slijedi neposredno iza općeg zadatka u kojem su zadana dva kuta i stranica na kojoj stoje, glasi: »Odavde se može lakim načinom znati koja će se točka Ekliptike dići u određenu uru, kao npr. u desetoj uri jutra, samo da bude zadano: visina pola skupa sa položajem Sunca u Ekliptici i nagibom same Ekliptike.« Po ovome što je zadano nejasno je o kojem se sfernom trokutu radi. Visina pola određena je širinom motrioca, a i zadana ura je u vezi s mjesnim satnim kutem. To su elementi prvog astronomskog sfernog trokuta. Položaj Sunca u Ekliptici može biti određen rektascenzijom i deklinacijom, ili ekliptičkom duljinom, a to su, skupa s nagibom Ekliptike, elementi drugog astronomskog sfernog trokuta. Vjerojatno ovaj zadatak treba shvatiti da su u drugom astronomskom trokutu (Sl. 9) poznati nagib, ekliptička duljina i rektascenzija, a traži se deklinacija Sunca. Danas bi se ona našla po prvom kotangensovom poučku, ali se taj poučak ne susreće u ovim zadacima.

Zaključak

Ovo je prvi i jedini program u kojem su tiskani problemi iz ravne i sferne trigonometrije. To je bio svakako znatan napredak u odnosu na dotadašnje predavanje matematike u Dubrovniku, jer V. Adamović će za to vrijeme kasnije napisati: »u osnovnoj školi računice nije ni bilo, a reko bi da donekle je nije bilo ni u višoj školi, ali praktična svijest naše gospode nije mogla pretrpjeti, da se narodu odanu većinom na trgovanje i pomorstvo, ne pruži način kako bi prisvojio potrebite znanosti za svoje stručne poslove . . .«[5] Zato se u Dubrovniku toliko željelo da se otvori i dvogodišnji filozofski tečaj, što se ostvarilo 1787. god., pa je tako počela željena nastava. Njegovim otvaranjem omogućeno je i dubrovačkim đacima da steknu dobra matematička znanja za svoje buduće odgovorne poslove. Za taj napredak još je napisano: »Nego, i ako se matematika učila i u srednjim razredima, to je učenje svakako obuhvatalo samo elemente njezine, biva računicu, dok su se algebra i geometrija učile istom u filozofiji. Na ovom stupnju nauke učila se matematika vrlo ozbiljno i naširoko, jer se učila ne samo tzv. elementarna matematika, nego također diferencijalni i integralni račun i sferična trigonometrija.«[6]

U Historijskom arhivu u Dubrovniku nalazi se između rukopisa Bassegli-Gozze jedan pod naslovom *Problemi Dettati nella Filozofia l'anno 1766. nel' Collegio Tollomeo.* »Pripadao je pijaristima i potječe iz njihova kolegija u Sieni, a upotrebljavan je u nastavi matematike u kolegiju.«[7]

Prema navodu bilješke pokušao sam pronaći taj rukopis, ali nažalost, ili zbog nepotpune preciznosti naznake, ili zbog eventualnog premještanja rukopisa, u tome nisam uspio.[8] Jedino u jednom svežnju (B 8/9—10) našao sam neke geometrijske probleme i jedan kartonski list sa slikom trigonometrijske kružnice i funkcijama nekih kuteva, te jednu sliku koja predstavlja vožnju broda u određenom kursu za određenu udaljenost. Prihvatljiv je zaključak da su ove trigonometrijske probleme donijeli nastavnici pijaristi, pa je zahvaljujući njima u programima ove stare dubrovačke škole, uz poznato dugogodišnje učenje humanističkih predmeta, bio u spomenutim godinama i dobar tečaj iz matematike. Zadaci iz ravne trigonometrije rješavali su se zbog praktičnih potreba grada (premjeravanje, obrana, gradnja i sl.), ali i zbog primjene u navigaciji. Zadaci sferne trigonometrije rješavali su se prvenstveno za upotrebu na brodu. Tada još nema pomorskih škola, niti su još uvedeni ispiti za kapetana duge plovidbe, pa se ovakvim programom spremalo mlade Dubrovčane da mogu, ukoliko se posvete pomorskom zvanju, primjenjivati metode koje su bile korištene na otvorenom moru za određivanje položaja broda. U tom vremenu bez kronometra, dobrih karata i tablica, na jedrenjacima koji su često jedrili s nepoznatim zanosom i nedovoljno poznatom varijacijom kompasa, bilo je veliko umijeće voditi navigaciju na otvorenom moru. Poznavati neku metodu, izvršiti dobro mjerenje, a zatim dugo i komplicirano računanje bila je rijetkost među kapetanima.

---

[5] Vicko Adamović, *Građa za istoriju dubrovačke pedagogije*, sv. I (Zagreb, 1885), pp. 125—6.

[6] Josip Posedel, *Povijest gimnazije u Dubrovniku*, sv. II (Dubrovnik, 1902), p. 10.

[7] Žarko Dadić, »Položaj matematike, fizike i astronomije u kulturnoj prošlosti Dubrovnika i doprinos Dubrovčana tim znanostima (do početka 19. stoljeća)«, *Rasprave i građa za povijest nauka* 3 (1969), 5—73, na str. 62—63.

[8] Pregledao sam svežnjeve: 5 A 10—13, 9 B 8/3—4, 10 B 8/5—8, 10 C 1—3, 11 B 8/9—10, 12 B 8/11—15, 13 B 9—10.

Dubrovčani su, očito, pomoću ovakvog programa pripremali svoj pomladak da mogu i te zadatke uspješno rješavali. Zbog toga vjerujem da se i kroz kasnije vrijeme trajanja kolegija filozofije predavao ovakav program, iako ga kasniji izvještaji više ne spominju.

Boris Franušić

PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY PROBLEMS FOR FINAL EXAMINATION AT THE PIARIST COLLEGE IN DUBROVNIK FOR THE YEAR 1788

Summary

Philosophy course syllabus at the Piarist College in Dubrovnik for the year 1788, published in *Esercizio accademico di trigonometria rettilinea, e sferica,* contained plane and spherical trigonometry theorems and problems. There were 48 plane trigonometry theorems and problems, one third of whice were practical ones applicable for the measurement both on land and at sea. Spherical trigonometry was presented with 76 theorems and problems. Twenty of them were from the astronomy. They could be solved on land but their application was meant for use at sea.

All theorems and problems were expressed in words without symbols, figures or numbers except for the angle between ecliptic and equator stated as $23° 29'$. Answers and solutions were not printed. Some theorems of plane and spherical trigonometry are analysed in this paper and compared with modern methods for solving the problems. A few practical problems are also discussed here as well as their application to the navigational practice in the 18th century and today.