FIZIKA

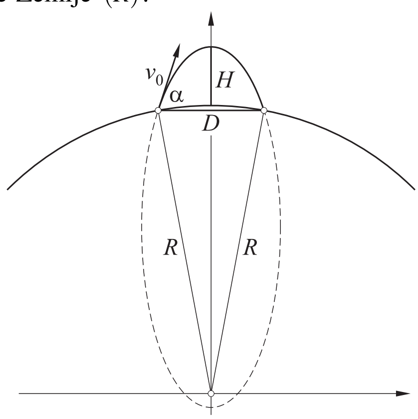
Kosi hitac i Keplerovi zakoni

Milivoj Uroić[1]

Pri rješavanju zadataka s kosim hicem u školi redovito koristimo aproksimacije koje vrlo složen balistički problem pojednostavnjuju do te mjere da ga savladavamo elementarnom matematikom. Takvo pojednostavnjivanje dok ne dobijemo rješiv matematički model vrlo je često u fizici. Podsjetimo se, zadaci redovito zanemaruju otpor zraka, što uopće nije opravdano za brze i lagane projektile. No za projektile koji prevale veliku udaljenost, usporedivu s veličinom Zemlje, javlja se (ili čak dominira) greška zbog pretpostavke homogenog gravitacijskog polja (svugdje istog smjera i iznosa g). Znamo da bi umjesto toga trebali uzeti radijalno polje (uvijek prema središtu Zemlje), jačinu polja koja pada s kvadratom udaljenosti od središta i horizontalnu plohu koja više nije ravnina, nego sfera radijusa veličine Zemlje (R).

Otpor zraka ćemo opet zanemariti (jer je gotovo nemoguće uračunati ga i dobiti bilo kakav elementarno rješiv izraz), a radi jednostavnosti uzet ćemo da je Zemlja kugla radijusa $R = 6\,371\,000$ m, uz ubrzanje sile teže na površini $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Projektil kreće s površine Zemlje ($h = 0$, $r = R$) i pada na površinu kao na slici 1.

Budući da se projektil giba bez pogona nakon dobivanja početne brzine v_0 (što vrijedi i za rakete nakon aktivne faze leta), gibanje se u osnovi ne razlikuje od gibanja Mjeseca ili nekog umjetnog satelita oko Zemlje i određeno je Keplerovim zakonima, prilagođenim gibanju tijela oko Zemlje, a ne planeta oko Sunca. Oni nam govore:



Slika 1.

1. Putanja projektila je dio luka elipse kojoj je jedno žarište u središtu Zemlje.
2. Radijvektor projektila iz središta Zemlje prebriše u jednakim vremenskim intervalima jednake površine. Posebno, unutar jednog ophodnog vremena T_o, radijvektor prebriše površinu cijele elipse, $P_o = ab\pi$.
3. Kvadrat ophodnog vremena proporcionalan je kubu velike poluosi elipse a:

$$\frac{a^3}{T_0^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{gR^2}{4\pi^2}.$$

U zadnjem smo izrazu koristili Newtonov zakon gravitacije, tako da smo ubrzanje na površini izrazili kao

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta, M masa Zemlje i R Zemljin radijus. Bit će nam od velike pomoći i činjenica da i energija (kao i ophodno vrijeme) ovisi samo o a i M, te

[1] Autor je znanstveni suradnik na institutu Ruđer Bošković u Zagrebu; e-pošta: `milivoj.uroic@irb.hr`

da se očuvanje energije može zapisati kao

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a},$$

gdje je m masa projektila.

Iako ovi izrazi nisu pogodni za direktno računanje dometa, vremena leta i maksimalne dosegnute visine projektila, gibanje je njima u potpunosti opisano, pa ih se uz podosta truda i poznavanja svojstava elipse može i izračunati.

No riješimo prvo nešto jednostavno, u homogenom gravitacijskom polju:

Projektil početne brzine $v_0 = 200$ m/s *poleti pod kutom* $\alpha = 30°$ *u odnosu na horizontalnu ravninu. Odredi horizontalni domet* (D)*, vrijeme leta* (T) *i visinu tjemena putanje* (H).

Gibanje prikažemo jednadžbama za horizontalni (x) i vertikalni (y) put, s ishodištem u točki izbačaja $(x = y = 0,\ t = 0)$:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \qquad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Pad projektila određen je uvjetom $y(T) = 0$:

$$0 = v_0 T \sin\alpha - \frac{gT^2}{2}, \qquad T = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha.$$

Za to je vrijeme projektil prevalio horizontalni put

$$D = x(T) = v_0 T \cos\alpha.$$

Tjeme putanje dosegnuto je na polovini vremena leta, pa je njegova visina

$$H = y \cdot \frac{T}{2} = \frac{v_0 T \sin\alpha}{2} - \frac{gT^2}{8} = \frac{gT^2}{8}.$$

Za zadane brojke $(g = 10\ \mathrm{m/s^2},\ \alpha = 30°,\ v_0 = 200\ \mathrm{m/s})$ dobivamo:

$$T = \frac{2 \cdot 200}{10}\sin 30° = 20\ \mathrm{s},$$

$$D = 200 \cdot 20 \cdot \cos 30° = 1000\sqrt{12} = 3464.1\ \mathrm{m},$$

$$H = \frac{gT^2}{8} = \frac{10 \cdot 20^2}{8} = 500\ \mathrm{m}.$$

Kako bismo "ponovili" račun pomoću Keplerovih zakona? Izrazimo ovisnost brzine o radijvektoru iz izraza za energiju (podijeljenog s m):

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = gR^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Uvrstimo početnu brzinu $v = v_0$ i početni radijvektor $r = R$, pa imamo:

$$v_0^2 = gR^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

Odatle izrazimo duljinu velike poluosi a:

$$a = \frac{R}{2 - \frac{v_0^2}{gR}} = \frac{R}{k} = 3\,186\,500.314\ \mathrm{m},$$

gdje smo uveli bezdimenzijsku konstantu k koju ćemo dalje koristiti:

$$k = 2 - \frac{v_0^2}{gR} = 1.999372155.$$

Sada se sjetimo da pomoću a možemo odrediti orbitalni period:

$$\frac{a^3}{T_o^2} = \frac{gR^2}{4\pi^2}, \qquad T_o = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{gk^3}} = 1773.9575 \text{ s.}$$

Taj period nema realnog značenja za let projektila, s obzirom da će hitac završiti nakon kratkog luka elipse, a veći dio je "zakopan" unutar Zemlje, ali nam pomaže pri računu. Sjetimo se drugog Keplerovog zakona, pa iz površine elipse odredimo malu poluos b.

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P_o}{T_o} = \frac{ab\pi}{T_o}.$$

To možemo izraziti pomoću početne brzine "brisanja" površine, npr. u prvoj sekundi (do $t = 1$). Površina u prvoj sekundi je približno jednaka trokutu duljine jedne stranice R, druge $v_0 t$ i kutu između njih $90^\circ + \alpha$. Njegova je površina (za $v_0 t \ll R$) jednaka $\frac{1}{2} R v_0 \cos\alpha$, tako da imamo:

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{R v_0 \cos\alpha}{2} = \frac{ab\pi}{T_o}.$$

Odatle je

$$b = \frac{T_o}{a\pi} \cdot \frac{R v_0 \cos\alpha}{2} = R v_0 \cos\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{gRk}}\right) = R\cos\alpha\sqrt{\frac{2-k}{k}} = 97\,772.7 \text{ m.}$$

Iz iznosa male i velike poluosi izračunamo numerički ekscentricitet putanje e:

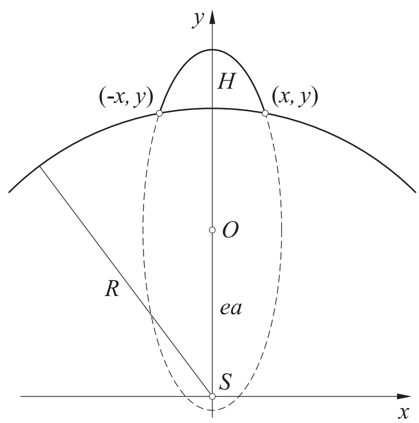
$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{R^2\cos^2\alpha(2-k)}{k} \cdot \frac{k^2}{R^2} = 1 - k(2-k)\cos^2\alpha.$$

Za naš slučaj dobijemo

$$e = 0.999529153.$$

Kada znamo parametre elipse, krenimo računati tražene vrijednosti. Pomoći će nam slika 2 (proporcije putanje su pretjerane), i činjenica da je fokus udaljen ea od središta elipse. Maksimalna je visina H očito dosegnuta u tjemenu (apogeju) putanje, čiju udaljenost od središta Zemlje možemo izraziti kao:

$$\begin{aligned} R + H &= a + ea, \\ H &= a(1+e) - R \\ &= 3\,186\,500.314 \cdot 1.999529153 - 6\,371\,000 \\ &= 500.274 \text{ m.} \end{aligned}$$



Slika 2.

Konačno smo nešto izračunali i vidimo da dobro odgovara "školskom" računu, ali se pitamo da li je dobivenih 27.4 cm razlike vrijedno tolikog truda? No to je posljedica skromne brzine izbačaja za koju *očekujemo* rezultat koji teži vrijednosti u homogenom polju, dakle na pravom smo putu.

Na slici također vidimo da ćemo domet moći izraziti iz koordinata točke izbačaja i točke pada, koje u ovako postavljenom koordinatnom sistemu iznose $(-x, y)$ i (x, y). Ako nas kao domet zanima duljina tetive, ona je jednostavno $D = 2x$, gdje je x rješenje sustava jednadžbi elipse i presjeka Zemljine površine:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y - ea)^2}{a^2} = 1, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Ako ga pokušamo riješiti, vidjet ćemo da je... nezgodno. Uz dosta truda, eliminacijom x^2 dobije se kvadratna jednadžba po y, ali potrebna je velika točnost rješavanja, uz nimalo zgodne brojke. Zato je računski znatno lakše sjetiti se definicijskog uvjeta elipse, tj. da točka (x, y) na elipsi mora imati sumu udaljenosti od žarišta jednaku $2a$. Jedno je žarište u ishodištu, i udaljenost do njega je R. Već znamo da je središte elipse udaljeno ea od žarišta, pa odatle slijedi da su koordinate drugog žarišta $(0, 2ea)$. Naš je uvjet tada

$$2a - R = \sqrt{x^2 + (y - 2ea)^2}.$$

Kvadriranjem dobijemo

$$4a^2 - 4aR + R^2 = x^2 + y^2 - 4eay + 4e^2a^2.$$

Kako je $R^2 = x^2 + y^2$, imamo

$$a - R = -ey + e^2a.$$

Odatle je

$$y = \frac{R - a(1 - e^2)}{e} = 6\,370\,999.764 \text{ m}.$$

Vidimo da x možemo (jedva) izračunati iz razlike kvadrata R i y:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{(R + y)(R - y)} = 1732.859 \text{ m}.$$

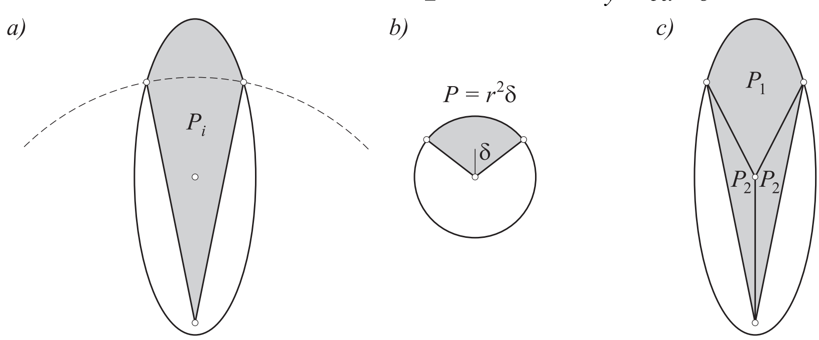
To daje za domet

$$D = 2x = 3465.72 \text{ m}.$$

Uz visoku potrebnu točnost, nije naodmet i provjeriti da dobiveni x i y zadovoljavaju navedenu jednadžbu elipse, no tu ćemo provjeru ipak izostaviti.

Da bismo dobili vrijeme leta, trebat će nam površina isječka elipse P_i iz fokusa označena na slici 3a. Da bismo ju odredili, trebamo početi od jednostavnijeg, recimo isječka kruga (iz središta naravno, slika 3b). Uz polovicu pripadnog kuta označenu s δ, ona iznosi $r^2\delta$, za krug radijusa r i $\operatorname{tg}\delta = \frac{x}{y}$. Ako to primjenimo na isječak elipse, simetričan oko glavne osi, površina je (slika 3c) $P_1 = ab\delta'$, uz $\operatorname{tg}\delta' = \frac{x}{y - ea} \cdot \frac{a}{b}$. Tome još treba dodati dva trokuta jednake površine, čija je osnovka na y osi duljine ea, a visina očito x. Dakle

$$P_i = P_1 + 2P_2 = ab\delta' + 2 \cdot \frac{eax}{2}, \qquad \operatorname{tg}\delta' = \frac{x}{y - ea} \cdot \frac{a}{b}.$$



Slika 3.

Iz omjera površina P_i i P_o konačno dobijemo vrijeme leta T:

$$\frac{T}{T_o} = \frac{P_i}{ab\pi} = \frac{\delta'}{\pi} + \frac{ex}{b\pi}.$$

Za zadane brojke, to je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta' &= 0.017726126 \\ \frac{\delta'}{\pi} &= 0.00564181 \\ \frac{ex}{b\pi} &= 0.005638858 \\ T &= T_o \cdot 0.011280668 = 20.0114 \text{ s.} \end{aligned}$$

Vidimo da je u skladu s računom u homogenom polju.

Kako ne bi ispalo puno truda nizašto, ponovimo ukratko, ali s većom početnom brzinom. Kojom? Brzina za koju je $k = 1$ (prva kozmička brzina) uz g i R kao dosad, iznosi $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 6\,371\,000} = 7981.85$ m/s. Da ne bi ispalo da nešto namještamo, a da ipak bude usporediva, uzmimo $v_0 = 5000$ m/s, uz isti kut izbačaja $\alpha = 30°$. Sjetimo se, kružnu putanju ionako ne bismo dobili čim je $\alpha \neq 0°$.

Izračunajmo parametre elipse istim redom:

$$\begin{aligned} k &= 2 - \frac{v_0^2}{gR} = 1.607597 \\ a &= \frac{R}{k} = 3\,963\,058.1 \text{ m} \\ T_o &= 2\pi\sqrt{\frac{R}{gk^3}} = 2460.47 \text{ s} \\ b &= R\cos\alpha\sqrt{\frac{2-k}{k}} = 2\,725\,937.26 \text{ m} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0.72586536 \\ H &= a(1+e) - R = 468\,704.7 \text{ m} \\ y &= \frac{R - a(1-e^2)}{e} = 6\,193\,986.2 \text{ m} \\ x &= \sqrt{R^2 - y^2} = 1\,491\,367.26 \text{ m} \\ D &= 2x = 2\,982\,734.5 \text{ m} \quad \text{(tetiva)} \\ D' &= 2R \arcsin\frac{D}{2R} = 3\,010\,669.6\text{m} \quad \text{(luk)} \\ \operatorname{tg}\delta' &= \frac{x}{y - ea} \cdot \frac{a}{b} = 0.6535958 \\ T &= T_o\left(\frac{\delta'}{\pi} + \frac{ex}{b\pi}\right) = 764.41 \text{ s.} \end{aligned}$$

Usporedimo to s rezultatom izraza za homogeno polje:

$$T = 500 \text{ s}, \qquad D = 2\,165\,064 \text{ m}, \qquad H = 312\,500 \text{ m}.$$

Sada su odstupanja prilična, a sigurni smo da je rezultat dobiven Keplerovim zakonima točniji. Točniji? Nije točan? Ako želimo veću točnost, ipak ćemo se sjetiti otpora zraka. Uz to, naša vrijednost za g je približna, pa bi ju bilo uputno preračunati iz mase Zemlje M. Zemlja je također spljoštena, pa će nam R ovisiti o položaju, i naša kružnica će postati elipsa. Usto, Zemlja rotira, pa trebamo uzeti u obzir ili centrifugalnu i Coriolisovu silu ili početnoj brzini dodavati brzinu rotacije, uz neprekidno mijenjanje koordinata cilja... Prilično zahtjevan problem, no jedan korak dalje smo napravili.