ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2016. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/267.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3539. Nađi sva rješenja jednadžbe
$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9.$$

3540. Ako je
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$
dokaži
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

3541. Dokaži da za svaki prirodan broj $n \geq 1$ vrijedi jednakost
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

3542. Ako su a, b, c duljine stranica i t_a, t_b, t_c duljine težišnica trokuta, dokaži nejednakost
$$\frac{t_a^2}{b^2+c^2}+\frac{t_b^2}{c^2+a^2}+\frac{t_c^2}{a^2+b^2}\leq\frac{9}{8}.$$

3543. Riješi nejednadžbu
$$\log_2^3(x-1)-\log_{0.5}(x-1)>5-\log_2(x-1)^3,$$
za $x>1$.

3544. Nađi parametar λ za koji sustav linearnih jednadžbi
$$4x+2y-3z=-8$$
$$2x-3y+z=1$$
$$6x-9y+3z=\lambda$$
ima rješenje.

3545. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC s vanjske strane je konstruiran kvadrat $ABPQ$. Neka je $\alpha=\sphericalangle ACQ$, $\beta=\sphericalangle QCP$, $\gamma=\sphericalangle PCB$. Dokaži $\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma$.

3546. Kružnica k_1 dodiruje k_2 iznutra. Pravac prolazi kroz središte manje kružnice i siječe veliku u točkama A i D, a manju u B i C. Odredi omjer polumjera veće i manje kružnice ako je $|AB|:|BC|:|CD|=2:4:3$.

3547. Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ su visine šiljastokutnog trokuta ABC. Ako su F i G nožišta okomica iz vrhova B i C na pravac DE, dokaži jednakost $|DG|=|EF|$.

3548. Iz točke A izvan kružnice polumjera R povučene su tangente AB i AC, gdje su B i C točke dodira. Neka je $|BC|=a$. Dokaži jednakost $4R^2=r^2+r_a^2+\dfrac{a^2}{2}$, gdje su r i r_a polumjeri upisane i pripisane kružnice trokuta ABC.

3549. U trokutu ABC je $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ i $2\sphericalangle ACB=3\sphericalangle BAC$. Dokaži da vrijedi
$$a^2b^2=(c^2-a^2)(bc+c^2-a^2).$$

3550. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$. Odredi kut između ravnina ACA' i $A'BC$.

3551. Dokaži da je funkcija $f(x)$ zadana s
$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{3}f(x)$$
periodička.

3552. U ravnini je dano 25 točaka pri čemu između svake tri postoje dvije koje su na udaljenosti manjoj od 1. Dokaži da postoji krug radijusa 1 koji sadrži barem 13 danih točaka.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 410. U odrasloj životnoj dobi udio vode u ljudskom tijelu iznosi oko 60 posto. Koliko je kilograma vodika u vodi sadržanoj u čovjeku mase 70 kilograma? Masa jedne molekule vode je $2.99\cdot10^{-26}$ kg, a masa jednog atoma kisika $2.657\cdot10^{-26}$ kg. Molekula vode ima jedan atom kisika i dva atoma vodika.

OŠ – 411. Učenici žele napraviti paralelan spoj tri otpornika u kojem će ukupan otpor biti 5 oma. Imaju otpornike od 10 Ω i 15 Ω. Koliki mora biti otpor trećeg otpornika? Ako s tom paralelom učenici serijski spoje žarulju snage 5 vata za koju je maksimalna struja 0.5 ampera, koliki smije biti najveći napon izvora?

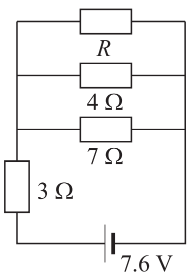
OŠ – 412. Koliko kockica leda brida 2 centimetra treba uzeti da se dobije 200 cm^3 vode? Gustoća leda je 900 kg/m^3, a gustoća vode 1000 kg/m^3.

OŠ – 413. Saturnov je polumjer oko 8.55 puta veći od Zemljinog, a njegova je masa 95.15 puta veća od Zemljine. Prosječna gustoća Zemlje je 5515 kg/m^3. Kolika je prosječna gustoća Saturna? Pretpostavite da su ova tijela u obliku kugle.

1623. Pri kosom hicu tijelo padne na tlo brzinom 21% većom od brzine izbačaja, te 12 metara niže od visine izbačaja. Ako je vrijeme leta 3.2 sekunde, odredi brzinu i kut izbačaja, te domet.

1624. Matematičkom njihalu mase 0.4 kg energija njihanja iznosi 0.08 J. Ako je period njihanja 1.2 sekunde, odredi kut maksimalnog otklona i akceleraciju njihala pri tom kutu.

1625. Odredi otpor R na shemi ako je ukupna struja u strujnom krugu 1.6 A.



1626. Bakar ima dva stabilna izotopa, ^{63}Cu i ^{65}Cu, s masama i učestalostima zadanim tablicom. Ako je gustoća prirodnog bakra 8.96 g/cm^3, kolika je gustoća izotopski čistog ^{65}Cu?

I	M	P
^{63}Cu	62.929601	69.17%
^{65}Cu	64.927794	30.83%

1627. Zbog otpora atmosfere međunarodna svemirska postaja (ISS) u niskoj orbiti oko Zemlje u 15 dana izgubi prosječno 1 kilometar visine. Uzmimo da je početna orbita kružna, radijusa 6774 km, te da je masa postaje 450 tona. Odredi snagu kojom atmosfera djeluje na postaju. Objasni zašto otpor *povećava* brzinu satelita.

1628. Pripremljeni radioaktivni uzorak sadrži samo izotop silicij 32 (^{32}Si). Taj se silicij beta raspadom raspada u fosfor 32 (^{32}P), a on ponovo beta raspadom u sumpor 32 (^{32}S). Godinu dana nakon izrade uzorka, omjer izotopa je sljedeći:

^{32}Si	99.539%
^{32}P	0.026%
^{32}S	0.435%

Odredi vrijeme poluživota ^{32}Si i ^{32}P. Sumpor 32 (^{32}S) je stabilan.

1629. Izotropni izvor svjetlosti snage 60 W nalazi se 60 cm iznad ravnog stola. Točno ispod izvora na stolu osvijetljenost vidljivom svjetlosti iznosi 4.5 W/m^2. Odredi efikasnost izvora, tj. postotak snage koji otpada na vidljivu svjetlost.

C) Rješenja iz matematike

3511. *Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe* $x + y + z + xyz = xy + yz + zx + 2$.

Rješenje. Jednadžbu zapišimo u obliku

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = 1$$
$$\iff (x-1)(y-1)(z-1) = 1$$

Odavde imamo sljedeće moguće slučajeve:

$$x-1 = y-1 = z-1 = 1 \implies (x,y,z) = (2,2,2);$$
$$x-1 = 1,\ y-1 = z-1 = -1 \implies (x,y,z) = (2,0,0);$$
$$x-1 = -1,\ y-1 = 1,\ z-1 = -1 \implies (x,y,z) = (0,2,0);$$
$$x-1 = -1,\ y-1 = -1,\ z-1 = 1 \implies (x,y,z) = (0,0,2).$$

Zlatko Petolas (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3512. *Odredi sve parove cijelih brojeva* (x, y) *takve da je*

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

Rješenje. Odmah se vidi da je $x,\ y \geq 0$ i $x > y$. Kvadriranjem obje strane jednakosti

$$(x+y)\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\sqrt{xy} = 6\sqrt{5} - 10.$$

Dijeljenjem obje strane ove jednakosti s $\sqrt{5}$ dobivamo

$$x + y - 2\sqrt{xy} = 6 - 2\sqrt{5}.$$

Kako su $x,\ y,\ x+y$ cijeli brojevi, jedina je mogućnost

$$x + y = 6, \quad xy = 5.$$

Rješenja ovog sustava su rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - 6t + 5 = 0$ tj.

$$(x, y) \in \{(5,1),\ (1,5)\}.$$

Zbog $x > y$ jedino rješenje polazne jednadžbe je $x = 5,\ y = 1$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3513. *Dokaži da za nenegativne realne brojeve $a,\ b,\ c$ vrijedi nejednakost*

$$\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{bc} + \sqrt[4]{ca} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Kada vrijedi jednakost?

Prvo rješenje. Na svaki od sumanada $\sqrt[4]{ab},\ \sqrt[4]{bc},\ \sqrt[4]{ca}$ primijenimo nejednakost $2xy \leq x^2 + y^2$:

$$\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{bc} + \sqrt[4]{ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Dovoljno je dokazati

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Posljednja nejednakost je ekvivalentna

$$a + b + c - 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + 3 \geq 0$$

tj.

$$(\sqrt{a} - 1)^2 + (\sqrt{b} - 1)^2 + (\sqrt{b} - 1)^2 \geq 0.$$

Jednakost očito vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Prema AG nejednakosti za četiri broja je

$$\sqrt[4]{ab \cdot 1 \cdot 1} \leqslant \frac{a+b+1+1}{4},$$

$$\sqrt[4]{ac \cdot 1 \cdot 1} \leqslant \frac{a+c+1+1}{4},$$

$$\sqrt[4]{bc \cdot 1 \cdot 1} \leqslant \frac{b+c+1+1}{4}.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{ac} + \sqrt[4]{bc} \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c) + \frac{3}{2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Ur.

3514. *Ako pozitivni realni brojevi $a,\ b,\ c$ zadovoljavaju uvjet $a+b+c+2 = abc$, dokaži nejednakost*

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq 2.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Uvjet $a + b + c + 2 = abc$ je ekvivalentan

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$$

Nejednakost

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq 2$$

je sada ekvivaletna

$$\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right) \geq 3$$

tj.

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \geq 3.$$

Po AG nejednakosti je

$$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{b+1}{c+1} \cdot \frac{c+1}{a+1}} = 3.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{b+1}{c+1} = \frac{c+1}{a+1}.$$

Iz ova tri uvjeta dobivamo

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0.$$

Dakle, $a = b = c$. Tada uvjet $a + b + c + 2 = abc$ postaje $a^3 - 3a - 2 = 0$ tj. $(a-2)(a+1)^2 = 0$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 2$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3515. *Riješi jednadžbu*

$$i^{2016}x^2 - (5-3i)x = 12 + (6-x^2)i\,.$$

Rješenje. Prvo $i^{2016} = (i^4)^{504} = 1$ i uz grupiranje rješavamo jednadžbu:

$$(1+i)x^2 - (5-3i)x - (12+6i) = 0.$$

Njezina rješenja su

$$x_{1,2} = \frac{5-3i \pm \sqrt{(5-3i)^2+4(1+i)(12+6i)}}{2(1+i)} = \frac{5-3i \pm \sqrt{40+42i}}{2(1+i)}.$$

Odredimo a, $b \in \mathbf{R}$ tako da je

$$(a+ib)^2 = 40 + 42i.$$

Time dobivamo sustav

$$a^2 - b^2 = 40, \quad 2ab = 42$$

Zbog $a^2 + b^2 = |40 + 42i| = 58$ i iz $a^2 - b^2 = 40$ imamo

$$a^2 = 49, \quad b^2 = 9 \implies a = \pm 7, \quad b = \pm 3.$$

Zbog $ab = 21$ dobivamo $(a,b) = (7,3)$ ili $(a,b) = (-7,-3)$. Sada imamo

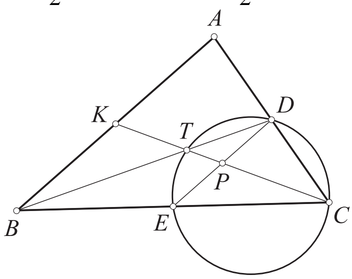
$$x_{1,2} = \frac{5-3i \pm (7+3i)}{2(1+i)} \quad \text{tj.}$$

$$x_1 = 3 - 3i, \quad x_2 = -2 - i.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3516. *U trokutu ABC, D i E su polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, tim redom. Kružnica opisana trokutu CDE prolazi težištem trokuta ABC. Kolika je duljina težišnice $\overline{CK}$ trokuta ABC, ako je $|AB| = c$?*

Rješenje. Označimo $t_c = |CK|$ duljinu težišnice iz vrha C. $\overline{DE}$ je srednjica trokuta ABC pa su trokuti CDE i ABC slični s faktorom $\frac{1}{2}$. Dakle, $|CP| = \frac{1}{2}t_c$, $|DE| = \frac{1}{2}c$.



S druge strane $|CT| = \frac{2}{3}t_c$ pa je $|PT| = \frac{2}{3}t_c - \frac{1}{2}t_c = \frac{1}{6}t_c$. Korištenjem potencije točke P s obzirom na opisanu kružnicu $\triangle CDE$:

$$|CP| \cdot |PT| = |DP| \cdot |PE| \qquad \text{tj.}$$

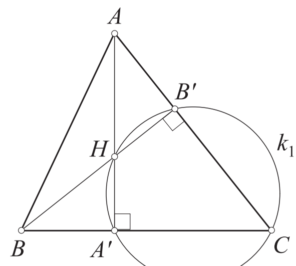
$$\frac{1}{2}t_c \cdot \frac{1}{6}t_c = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{4}c \implies t_c = \frac{\sqrt{3}c}{2}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

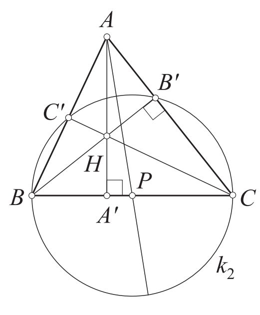
3517. *Dokaži da je zbroj triju produkata od po dvije duljine: duljine visine šiljastokutnog trokuta i udaljenosti od ortocentra do vrha iz kojeg izlazi ta visina, jednak polovici zbroja kvadrata duljina stranica trokuta.*

Rješenje. Iz potencije točke A s obzirom na kružnicu k_1:

$$|AA'| \cdot |AH| = |AC| \cdot |AB'|. \qquad (*)$$



Trokuti BCC' i BCB' su pravokutni iste hipotenuze pa je središte zajedničke opisane kružnice k_2 polovište P stranice $\overline{BC}$.



Iz potencije točke A s obzirom na kružnicu k_2:

$$|AC| \cdot |AB'| = \left(t_a - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(t_a + \frac{a}{2}\right) = t_a^2 - \frac{a^2}{4}, \qquad (**)$$

gdje je t_a duljina težišnice na stranicu $\overline{BC}$ i poznato je

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Sada $(*)$ i $(**)$ zajedno daju

$$|AA'| \cdot |AH| = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Posve analogno je

$$|BB'| \cdot |BH| = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{2},$$

$$|CC'| \cdot |CH| = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

odakle je

$$|AA'| \cdot |AH| + |BB'| \cdot |BH| + |CC'| \cdot |CH| = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3518. *Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke M_n i N_n za koje je $|CM_n| = \frac{1}{n}|AC|$ i $|CN_n| = \frac{1}{n+1}|BC|$ za $n \geq 2$. Dokaži da svi pravci M_nN_n prolaze istom točkom. Koja je to točka?*

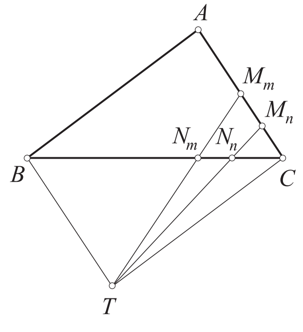
Prvo rješenje. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, te neka su m, $n \geq 2$, $m \neq n$ proizvoljni.

Neka se pravci M_nN_n i M_mN_m sijeku u točki T. Vektori $\overrightarrow{M_nT}$ i $\overrightarrow{M_nN_n}$ su kolinearni $\Longrightarrow$ $\exists k_1 \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{M_nT} = k_1 \overrightarrow{M_nN_n} = k_1 \left(\frac{1}{n+1}\vec{a} - \frac{1}{n}\vec{b} \right).$$

Slično, $\exists k_2 \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{M_mT} = k_2 \overrightarrow{M_mN_m} = k_2 \left(\frac{1}{m+1}\vec{a} - \frac{1}{m}\vec{b} \right).$$



S druge strane

$$\overrightarrow{M_nT} = \overrightarrow{M_nM_m} + \overrightarrow{M_mT} \qquad \text{tj.}$$

$$\frac{k_1}{n+1}\vec{a} - \frac{k_1}{n}\vec{b} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)\vec{b} + \frac{k_2}{m+1}\vec{a} - \frac{k_2}{m}\vec{b}.$$

Grupiranjem i izjednačavanjem komponenti uz $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobivamo $k_1 = n+1$, $k_2 = m+1$, dakle

$$\overrightarrow{M_nT} = \vec{a} - \frac{n+1}{n}\vec{b}.$$

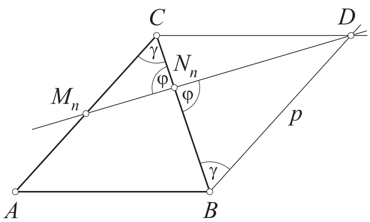
Sada računamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TB} &= \overrightarrow{TM_n} + \overrightarrow{M_nA} + \overrightarrow{AB} \\
&= \left(-\vec{a} + \frac{n+1}{n}\vec{b} \right) + \left(1 - \frac{1}{n} \right)\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \vec{b}.
\end{aligned}$$

Prema tome $\overrightarrow{TB} = \vec{b}$ ne ovisi o m i n što znači da svi pravci M_nN_n prolaze točkom T. Kako je $\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{CA} = \vec{b}$, vidimo da je T vrh paralelograma kojemu su $\overline{BC}$ i $\overline{AT}$ dijagonale.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Povucimo pravac p usporedan stranici $\overline{AC}$ kroz točku B i neka je točka D presjek pravca p i pravca M_nN_n.



Kutovi $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CBD$ su jednaki (naizmjenični kutovi), a također i $\sphericalangle CN_nM_n$ i $\sphericalangle DN_nB$ (vršni) pa su trokuti CN_nM_n i BN_nD slični. Stoga vrijedi $\frac{|CM_n|}{|BD|} = \frac{|CN_n|}{|BN_n|}$. Uvrstimo li poznate vrijednosti, dobivamo

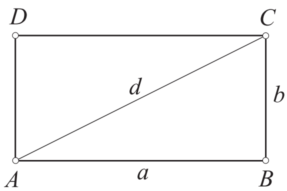
$$|BD| = \frac{|CM_n| \cdot |BN_n|}{|CN_n|} = \frac{|CM_n| \cdot (|BC| - |CN_n|)}{|CN_n|} = \frac{\frac{1}{n}|AC| \cdot \left(|BC| - \frac{1}{n+1}|BC| \right)}{\frac{1}{n+1}|BC|} = |AC|$$

pa je $ABDC$ paralelogram. Svi pravci M_nN_n prolaze vrhom D paralelograma $ABDC$.

Ur.

3519. *Dijagonala pravokutnika dijeli jedan njegov kut u omjeru $m:n$. Koliki je omjer opsega pravokutnika i duljine njegove dijagonale?*

Rješenje. Pretpostavimo $\sphericalangle CAB : \sphericalangle CAD = m:n \implies \sphericalangle CAB = \frac{m}{n+m}\frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle CAD = \frac{n}{n+m}\frac{\pi}{2} = \sphericalangle BCA$.



Iz pravokutnog trokuta ABC slijedi

$$\frac{a}{d} = \cos\left(\frac{m}{n+m}\frac{\pi}{2}\right),\quad \frac{b}{d} = \cos\left(\frac{n}{n+m}\frac{\pi}{2}\right).$$

Traženi omjer je:

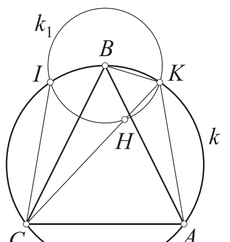
$$\begin{aligned}\frac{2(a+b)}{d} &= 2\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)\\ &= 2\left[\cos\left(\frac{m}{n+m}\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n}{n+m}\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &= 4\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{(m-n)\pi}{4(n+m)} = 2\sqrt{2}\cos\frac{(m-n)\pi}{n+m}.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3520. *Kružnica je opisana jednakokračnom trokutu ABC ($|AB| = |BC|$). Na luku $\overparen{AB}$ dana je bilo koja točka K. Dokaži jednakost*

$$|AK|\cdot|CK| = |AB|^2 - |BK|^2.$$

Prvo rješenje. S centrom u B opišimo kružnicu k_1 radijusa $|BK|$, koja siječe pravac CK u točki H.



Neka je dužina $\overline{CI}$ osnosimetrična dužini $\overline{AK}$ s obzirom na visinu trokuta ABC vrhom B. Zato je $\sphericalangle ICB = \sphericalangle BAK$. S druge strane $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BAK$ (obodni kutovi). Prema tome $\overline{CB}$ je simetrala kuta $\sphericalangle ICH$ pa je

$$|CH| = |CI| = |AK|. \qquad (*)$$

Iz potencije točke C s obzirom na kružnicu k_1

$$|CB|^2 - |BK|^2 = |CH|\cdot|CK|. \qquad (**)$$

Sada je

$$\begin{aligned}|AB|^2 - |BK|^2 = |CB|^2 - |BK|^2 &\overset{**}{=} |CH|\cdot|CK|\\ &\overset{*}{=} |AK|\cdot|CK|.\end{aligned}$$

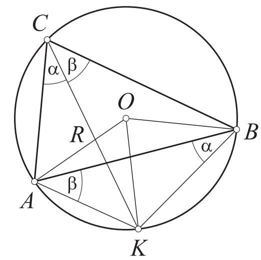
Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $\alpha = \sphericalangle KCA$, $\beta = \sphericalangle BCK$. Tada je $\sphericalangle CAB = \alpha+\beta$, $\sphericalangle CAK = \alpha + 2\beta$. O je središte opisane kružnice. Danu jednakost možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}&2R\sin\alpha\cdot 2R\sin(\alpha+2\beta)\\ &\quad = (2R\sin(\alpha+\beta))^2 - (2R\sin\beta)^2\end{aligned}$$

tj. dobivamo ekvivalentnu trigonometrijsku jednakost

$$\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta) = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\beta.$$



Sada imamo

$$\begin{aligned}&\sin\alpha(\sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta)\\ &\quad = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 - \sin^2\beta\\ &\sin^2\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\beta\cos\beta\\ &\quad = \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\\ &\qquad + \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta\\ &\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta\\ &\quad = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta\\ &\sin^2\beta = \sin^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\\ &\sin^2\beta = \sin^2\beta,\end{aligned}$$

čime je trigonometrijska jednakost dokazana.

Ur.

3521. *Dan je trokut ABC. Na pravcima BC, CA, AB su po dvije točke D, D'; E, E'; F, F' tako da je $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD'}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE'}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF'}$. Dokaži da se pravci kroz točke A, B, C, paralelnih redom s pravcima $E'F$, $F'D$, $D'E$, sijeku u istoj točki.*

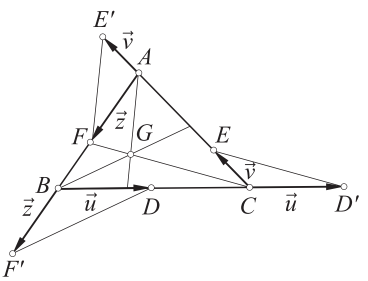
Prvo rješenje. Označimo $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD'}$, $\vec{v}=\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE'}$, $\vec{z}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF'}$. Tada postoje k_1, k_2, $k_3\in\mathbf{R}$ takvi da je

$$\vec{u}=k_1\vec{a},\quad \vec{v}=k_2\vec{b},\quad \vec{z}=k_3\vec{c}.$$

Neka se zadani pravci kroz vrh A odnosno B sijeku u točki G. Zadatak će biti riješen ako pokažemo da su pravci CG i ED' paralelni.

Po pretpostavci zadatka $\overrightarrow{AG}=k(\vec{z}-\vec{v})$, $\overrightarrow{BG}=m(\vec{u}-\vec{z})$, za neke k, $m\in\mathbf{R}$. Slijedi

$$\overrightarrow{AG}=\vec{c}+\overrightarrow{BG}$$
$$\Longrightarrow\ k(\vec{z}-\vec{v})=\vec{c}+m(\vec{u}-\vec{z})$$
$$\Longrightarrow\ kk_3\vec{c}-kk_2\vec{b}=\vec{c}+mk_1\vec{a}-mk_3\vec{c}$$
$$\Longrightarrow\ kk_3\vec{c}-kk_2\vec{b}=\vec{c}+mk_1(-\vec{b}-\vec{c})-mk_3\vec{c}$$
$$\Longrightarrow\ kk_3\vec{c}-kk_2\vec{b}=(1-mk_1-mk_3)\vec{c}-mk_1\vec{b}.$$



Izjednačavanjem komponenti uz nekolinearne vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dobivamo linearni sustav u varijablama k, m čije je rješenje

$$k=\frac{k_1}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3},$$
$$m=\frac{k_2}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}.$$

Sada je

$$\overrightarrow{CG}=-\vec{a}+\overrightarrow{BG}=-\vec{a}+m(\vec{u}-\vec{z})$$
$$=-\vec{a}+\frac{k_2}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}(k_1\vec{a}-k_3\vec{c})$$
$$=-\vec{a}+\frac{k_2}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}(k_1\vec{a}+k_3(\vec{a}+\vec{b}))$$
$$=-\frac{k_1k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\vec{a}+\frac{k_2k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}\vec{b}$$
$$=\frac{k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}(-\vec{u}+\vec{v})$$

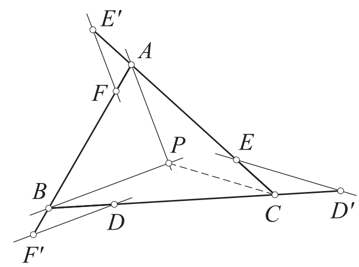
Dakle vektor $\overrightarrow{CG}$ je kolinearan vektoru $-\vec{u}+\vec{v}$ tj. pravci CG i ED' su paralelni.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je P sjecište prva dva pravca. Tada za površine imamo jednakosti

$$P(PCE)=P(PAE')\overset{AP\|E'F}{=}P(PAF)$$
$$=P(PBF')\overset{BP\|F'D}{=}P(PBD)$$
$$=P(PCD'),$$

a iz $p(PCE)=p(PCD')$ slijedi $PC\|D'E$, pa točka P leži i na trećem pravcu.



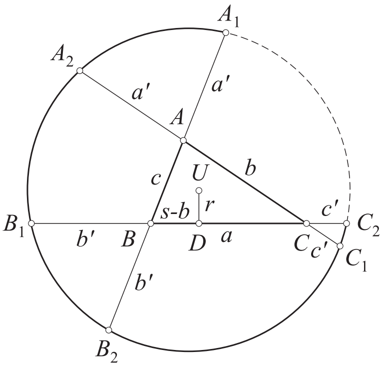
Ur.

3522. *Dan je trokut ABC. Točke A_1, A_2 spojene su kružnim lukom sa središtem A, točke A_2, B_1 spojene kružnim lukom sa središtem C, točke B_1, B_2 spojene kružnim lukom sa središtem B, točke B_2, C_1 spojene kružnim lukom sa središtem A, i točke C_1, C_2 spojene kružnim lukom sa središtem C.*

1) Dokaži da se točke C_2, A_1 mogu spojiti kružnim lukom sa središtem B.

2) Dokaži da su sve točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 na kružnici. Gdje je njezino središte?

Prvo rješenje. 1) Neka je $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, $|AA_1|=|AA_2|=a'$, $|BB_1|=|BB_2|=b'$, $|CC_1|=|CC_2|=c'$. Tada iz $|CA_2|=|CB_1|$ slijedi $b+a'=a+b'$, tj. $a'-a=b'-b$, a iz $|AB_2|=|AC_1|$ slijedi $c+b'=b+c'$, tj. $b'-b=c'-c$. Zato je $a' - a = c' - c$, tj. $a + c' = c + a'$ ili $|BC_2| = |BA_1|$.



2) Neka je $a' - a = b' - b = c' - c = t$, $a + b + c = 2s$. Ako je D polovište dužine $\overline{B_1C_2}$, tada je

$$\begin{aligned}|B_1D| &= \frac{1}{2}|B_1C_2| = \frac{1}{2}(b' + a + c')\\ &= \frac{1}{2}(t + b + a + t + c)\\ &= \frac{1}{2}(2s + 2t) = s + t,\end{aligned}$$

$$|BD| = |B_1D| - |B_1B| = s + t - b' = s - b,$$

pa je D diralište upisane kružnice (U, r) trokuta ABC sa stranicom $\overline{BC}$. Zato je

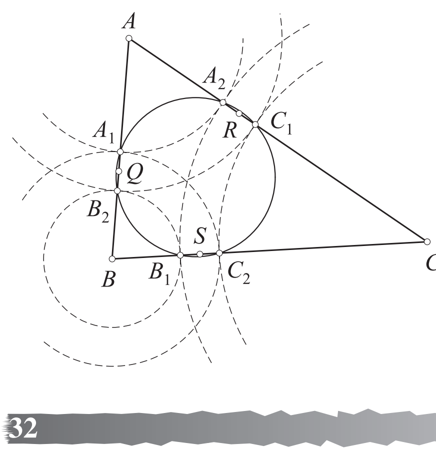
$$|UB_1| = \sqrt{|UD|^2 + |DB_1|^2} = \sqrt{r^2 + (s+t)^2},$$

pa točka B_1 leži na kružnici $(U, \sqrt{r^2+(s+t)^2})$, a isto vrijedi i za točke C_2, C_1, A_2, A_1, B_2.

Ur.

Drugo rješenje. Po konstrukciji

$$|A_1B_2| = |A_2C_1| = |B_1C_2|. \qquad (*)$$



Kako je $|BB_1| = |BB_2|$, to znači $|BC_2| = |BA_1|$ i prvi dio tvrdnje je pokazan.

Također, $(*)$ povlači da je četverokut $A_1B_2C_1A_2$ jednakokračni trapez pa je onda i tetivni četverokut kojem je centar opisane kružnice O_1 presjek simetrale kuta vrha A i simetrale dužine $\overline{A_1B_2}$ čije je polovište Q, odnosno simetrale dužine $\overline{C_1A_2}$ čije je polovište R. Analogno, $B_1C_2A_1B_2$ i $B_1C_2C_1A_2$ su tetivni četverokuti središta O_2 i O_3, te je S polovište dužine $\overline{B_1C_2}$.

Označimo

$$\begin{aligned}x &= |AQ| = |AR|\\ y &= |BQ| = |BS|\\ z &= |CS| = |CR|.\end{aligned}$$

Sada je

$$x + y = c, \quad x + z = b, \quad y + z = a \qquad (**)$$

i točke Q, R, S su projekcije točaka sa simetrala kutova trokuta ABC. Kako svojstvo $(**)$ imaju i projekcije središta upisane kružnice U trokuta ABC, a rješenje od $(**)$ je jedinstveno ($x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$) to je $O_1 = O_2 = O_3 = U$, tj. sve točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 su na istoj kružnici kojoj je centar u središtu upisane kružnice U trokuta ABC i drugi dio je pokazan.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3523. *Površina baze pravilne trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ jednaka je P. Točke D i E su redom polovišta bridova $\overline{BC}$ i $\overline{A_1B_1}$. Promatrajmo trokute čiji su vrhovi presjeci ravnina paralelnih s bazom prizme s dužinama $\overline{A_1B}$, $\overline{DE}$ i $\overline{AC_1}$. Odredi najmanju od površina tih trokuta.*

Prvo rješenje. Postavimo vrhove prizme u trodimenzionalni, pravokutni sustav: trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ su jednakostranični trokuti s vrhovima

$$A = (a, 0, 0), \quad B = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$A_1 = (a, 0, v), \quad B_1 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, v\right),$$

$$C_1=\left(-\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{2},v\right),$$

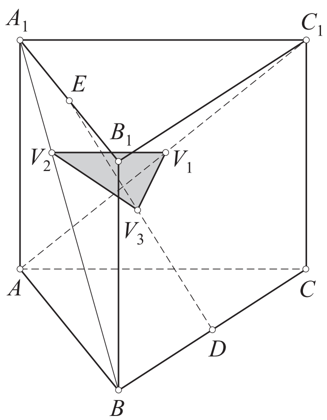
$$D=\left(-\frac{a}{2},0,0\right),\quad E=\left(\frac{a}{4},\frac{a\sqrt{3}}{4},v\right),$$

gdje je v visina prizme i $P=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Pravci (dužine) koji određuju trokut:

$$p_{A_1B}\cdots\frac{x+\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{z}{v}$$

$$p_{DE}\cdots\frac{x+\frac{a}{2}}{\frac{3a}{4}}=\frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{4}}=\frac{z}{v}$$

$$p_{AC_1}\cdots\frac{x-a}{-\frac{3a}{2}}=\frac{y}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{z}{v}.$$



Ako označimo $x=\dfrac{z}{v}$, onda je $0\le x\le 1$ i vrhovi trokuta su:

$$V_1=\left(a-\frac{3a}{2}x,-\frac{\sqrt{3}a}{2}x,vx\right),$$

$$V_2=\left(-\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}x,\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{2}x,vx\right),$$

$$V_3=\left(-\frac{a}{2}+\frac{3a}{4}x,\frac{a\sqrt{3}}{4}x,vx\right).$$

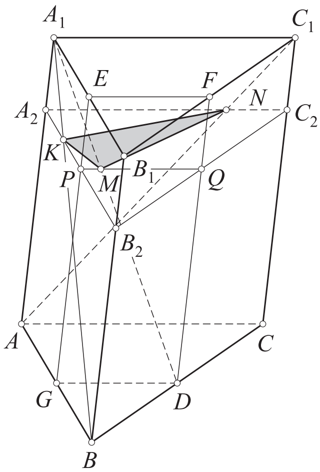
Kako sva tri vrha leže u ravnini paralelnoj s xy ravninom, možemo iskoristiti formulu za površinu trokuta u xy-ravnini poznatih koordinata:

$$\begin{aligned}P_\triangle&=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|\\&=\frac{a^2\cdot 3\sqrt{3}}{8}(3x^2-3x+1)=\frac{P}{2}(3x^2-3x+1)\\&=\frac{P}{2}\left[3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].\end{aligned}$$

Dakle minimum površine trokuta se postiže za $x=\dfrac{1}{2}$ i iznosi $\dfrac{P}{8}$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Promatrajmo ravninu α paralelnu bazi prizme. Ona siječe pravce AA_1, BB_1, CC_1, A_1B, AC_1 i DE redom u točkama A_2, B_2, C_2, K, N i M. Stavimo $\dfrac{|A_1A_2|}{|A_1A|}=x$. Dovoljno je promatrati samo slučaj $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$.



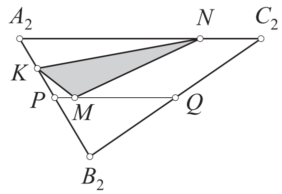
Neka je F polovište brida $\overline{B_1C_1}$, a G polovište od $\overline{AB}$. Točke E, F, D i G leže u istoj ravnini. Točka M također pripada toj ravnini. Nadalje, ona se nalazi na srednjici trokuta $A_2B_2C_2$. Iz sličnosti trokuta A_1A_2K i BB_2K, AA_2N i C_1C_2N te PME i QMD dobivamo

$$\frac{|A_2K|}{|A_2B_2|}=\frac{|NC_2|}{|A_2C_2|}=\frac{|PM|}{|PQ|}=x.$$

Odredimo sada površinu trokuta KMN:

$P_{KMN}=P_{A_2C_2QP}-P_{A_2NK}-P_{PMK}-P_{MNQ}-P_{NC_2Q}$.

Kako je površina trokuta PB_2Q, $P_{PB_2Q}=\dfrac{1}{4}P_{A_2B_2C_2}=\dfrac{1}{4}P$, dobivamo $P_{A_2C_2QP}=\dfrac{3}{4}P$.



Da bismo odredili površine trokuta koji se pojavljuju kod određivanja P_{KMN} koristit ćemo se činjenicom da je omjer površina trokuta koji imaju jedan zajednički kut, jednak omjeru produkata njihovih stranica između kojih je promatrani kut (to proizlazi iz formule $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$). Prema tome:

$$P_{A_2NK} = \frac{|A_2K| \cdot |A_2N|}{|A_2B_2| \cdot |A_2C_2|} P = x(1-x)P,$$

$$P_{PMK} = \frac{|PK| \cdot |PM|}{|PA_2| \cdot |PQ|} P_{A_2PQ} = (1-2x)x \cdot \frac{1}{4}P,$$

$$P_{MNQ} = P_{MA_2Q} = \frac{|MQ|}{|PQ|} P_{PA_2Q} = (1-x) \cdot \frac{1}{4}P,$$

$$P_{NC_2Q} = \frac{|NC_2| \cdot |C_2Q|}{|A_2C_2| \cdot |C_2B_2|} P = x \cdot \frac{1}{2}P.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} P_{KMN} &= \frac{3}{4}P - x(1-x)P - \frac{1}{4}x(1-2x)P \\ &\quad - \frac{1}{4}(1-x)P - \frac{1}{2}xP \\ &= \frac{1}{2}(3x^2 - 3x + 1)P. \end{aligned}$$

Promatrajmo funkciju $y = 3x^2 - 3x + 1$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$y(x) = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Minimum se dostiže za $x = \frac{1}{2}$. Prema tome, najmanja moguća površina trokuta KMN se dostiže za $x = \frac{1}{2}$ i jednaka je $P_{KMN} = \frac{1}{8}P$.

Ur.

3524. *Odredi maksimalnu vrijednost funkcije* $f(x)$ *za* $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\log x \cdot \log x^2 + \log x^3 + 3}{\log^2 x + \log x^2 + 2}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\log x \cdot \log x^2 + \log x^3 + 3}{\log^2 x + \log x^2 + 2} \\ &= \frac{2\log^2 x + 3\log x + 3}{\log^2 x + 2\log x + 2} \\ &= 2 - \frac{\log x + 1}{\log^2 x + 2\log x + 2} \\ &= 2 + \frac{-(\log x + 1)}{(\log x + 1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Za sve x takve da je $\log x + 1 > 0$ slijedi $f(x) < 2$.

Promatrajmo zato slučaj $\log x + 1 \leq 0$ i stavimo $u = -(\log x + 1) \geq 0$.

Sada je

$$2 + \frac{-(\log x + 1)}{(\log x + 1)^2 + 1} = 2 + \frac{u}{u^2 + 1} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

jer je $u^2 + 1 \geq 2u$. Dakle, maksimalna vrijednost funkcije $f(x)$ je $\frac{5}{2}$ i postiže se za $1 = u = -(\log x + 1)$ tj. $x = 10^{-2}$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 402. *Istražujući gibanje tijela na kosini učenik je napravio kosinu dugačku 60 i visoku 20 centimetara. Izmjerio je da kvadar mase 300 grama može vući uz kosinu silom od 1.6 njutna. Koliku bi akceleraciju imao taj kvadar kad bi klizao niz kosinu?*

Rješenje.

$L = 60$ cm

$h = 20$ cm

$m = 300$ g

$\underline{F_1 = 1.6 \text{ N}}$

$a = ?$

Sila kojom se tijelo može vući po kosini ili koja djeluje na tijelo kad kliže na kosini, ako nema trenja, je onoliko puta manja od težine tijela koliko je kosina dulja od svoje visine.

$$G = m \cdot g = 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3 \text{ N}.$$

Sila na kosini bi bila 1 N da nema trenja. Zaključujemo da trenje iznosi 0.6 N.

Kad se tijelo giba niz kosinu ubrzava ga sila od 1 N i usporava sila trenja, jer trenje uvijek djeluje u suprotnom smjeru od smjera gibanja. Rezultantna će sila iznositi 0.4 N.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0.4\ \mathrm{N}}{0.3\ \mathrm{kg}} = 1.3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ur.

OŠ – 403. *Ivan i Petar se pripremaju za natjecanje u atletici i svaki dan trče na stazi dugoj 5 kilometara. Petar trči brzinom od 4 m/s i krenuo je 3 minute prije Ivana. Ivan dok trči u deset sekundi napravi 30 koraka duljine 1.6 metara. Koji će od njih prije doći na cilj? Kolika bi trebala biti duljina Ivanovog koraka da na cilj stignu istovremeno?*

Rješenje.

$s = 5$ km

$v_P = 4$ m/s

$$v_I = \frac{30 \cdot 1.6\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{s}} = 4.8\ \mathrm{m/s}$$

$\underline{t_P = t_I + 3\ \mathrm{min}}$

$$t_P = \frac{s}{v_P} = \frac{5000\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m/s}} = 1250\ \mathrm{s}$$

$$t_I = \frac{s}{v_I} = \frac{5000\ \mathrm{m}}{4.8\ \mathrm{m/s}} = 1041.67\ \mathrm{s}$$

$$t_P - t_I = 1250\ \mathrm{s} - 1041.67\ \mathrm{s} = 208.33\ \mathrm{s}.$$

Petar ima prednost od samo 180 sekundi, što znači da će na cilj prvi stići Ivan.

Da bi stigli istovremeno Ivanovo vrijeme mora biti 180 sekundi kraće od Petrovog.

$$t_I = t_P - 180\ \mathrm{s} = 1250\ \mathrm{s} - 180\ \mathrm{s} = 1070\ \mathrm{s}$$

$$v_I = \frac{5000\ \mathrm{m}}{1070\ \mathrm{s}} = 4.67\ \mathrm{m/s}.$$

Ako u 10 sekundi Ivan napravi 30 koraka, u sekundi bi morao raditi 3 koraka duljine 4.67 metara.

$$l_{1\ \mathrm{korak}} = \frac{4.67\ \mathrm{m}}{3} = 1.557\ \mathrm{m}.$$

Maja Drmač (8),
OŠ Malešnica, Zagreb

OŠ – 404. *Dvije bakrene žice imaju istu masu, ali jedna je četiri puta dulja od druge. Koliko je puta otpor kraće žice manji od otpora dulje žice?*

Rješenje.

$\rho_1 = \rho_2$

$l_1 = 4l_2$

$\underline{m_1 = m_2}$

$\dfrac{R_1}{R_2} = ?$

Ako su mase bakrenih žica iste i obujmovi su im jednaki.

$V_1 = V_2$

$l_1 \cdot S_1 = l_2 \cdot S_2$

$4l_2 \cdot S_1 = l_2 \cdot S_2$

$S_2 = 4S_1$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1 \cdot \frac{l_1}{S_1}}{\rho_2 \cdot \frac{l_2}{S_2}} = \frac{\frac{4l_2}{S_1}}{\frac{l_2}{4S_1}} = 16.$$

Otpor kraće žice je 16 puta manji od otpora dulje žice.

Maja Drmač (8), Zagreb

OŠ – 405. *Učenik zna da se period jednostavnog matematičkog njihala može izračunati po formuli $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ pri čemu je l duljina niti, a g ubrzanje sile teže. Želi napraviti tri njihala čiji se periodi odnose $1:2:3$, a zbroj duljina njihovih niti treba biti 1.5 metara. Kolike će biti duljine niti tih njihala?*

Rješenje.

$T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 2 : 3$

$\underline{l_1 + l_2 + l_3 = 1.5\ \mathrm{m}}$

$l_1,\ l_2,\ l_3 = ?$

$$2\pi\left(\frac{l_1}{g}\right)^{\frac{1}{2}} : 2\pi\left(\frac{l_2}{g}\right)^{\frac{1}{2}} : 2\pi\left(\frac{l_3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = 1:2:3$$

$$\left(\frac{l_1}{g}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{l_2}{g}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{l_3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = 1:2:3\ /^2\ /\cdot g$$

$$l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 4 : 9$$

$$l_1 = \frac{l_2}{4}, \qquad l_3 = \frac{9l_2}{4}$$

$$\frac{l_2}{4} + l_2 + \frac{9l_2}{4} = 1.5\ \mathrm{m}$$

$$\frac{14l_2}{4} = 1.5\ \mathrm{m}$$

$l_2 = 0.429$ m

$l_1 = 0.107$ m

$l_3 = 0.964$ m.

Maja Drmač (8), Zagreb

1609. *U trenutku prolaza kroz ravnotežni položaj, brzina njihala je 35 cm/s, a 0.2 sekunde kasnije brzina iznosi 22 cm/s u istom smjeru. Odredi period njihanja, duljinu njihala i kut maksimalnog otklona.*

Rješenje. Brzina njihala, uz ravnotežni položaj u trenutku $t = 0$ se mijenja po funkciji

$$v(t) = v_m \cos(\omega t).$$

Za $t = 0$ imamo $35 \text{ cm/s} = v_m \cdot \cos(0)$, te $v_m = 35 \text{ cm/s}$. Za $t = 0.2$ s imamo

$$22 = 35 \cdot \cos(0.2\omega),$$

pa rješavanjem dobijemo $\omega = 4.4554 \text{ rad/s}$. Odatle su period i duljina njihala

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.41 \text{ s},$$

$$l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.81}{4.4554^2} = 0.4942 \text{ m}.$$

Kut maksimalnog otklona određen je dosegnutom visinom (u odnosu na ravnotežni položaj) koja iznosi

$$h = \frac{v_m^2}{2g} = \frac{0.35^2}{2 \cdot 9.81} = 0.006244 \text{ m}.$$

Kako je $h = l(1 - \cos(\alpha_m))$, kut maksimalnog otklona iznosi

$$\alpha_m = 9.12^\circ = 9^\circ 7'.$$

Ur.

1610. *Oko asteroida oblika kugle kruži satelit neposredno uz površinu. Odredi gustoću asteroida ako je ophodno vrijeme satelita 120 minuta.*

Rješenje. Radijus asteroida r i ophodno vrijeme $T = 120 \text{ min} = 7200$ s povezani su s masom asteroida trećim Keplerovim zakonom:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm}{4\pi^2}.$$

Masu asteroida izrazimo preko gustoće i uvrstimo:

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi,$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\rho 4 r^3 \pi}{3 \cdot 4\pi^2}.$$

Nakon dokidanja faktora ostaje

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = \frac{3 \cdot 3.1416}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 7200^2} = 2724 \text{ kg/m}^3.$$

Ur.

1611. *Radioaktivni izotop barija, ^{133}Ba raspada se u stabilni ^{133}Cs. Nastala pobuđena jezgra cezija emitira gama zračenje sljedećih energija (u keV): 53.16, 79.61, 81.00, 160.61, 223.24, 276.40, 356.01, 383.85. Odredi energije četiri pobuđena stanja jezgre, ako znamo da emisijom najveće energije (383.85 keV) jezgra završi u osnovnom stanju (energije pobuđenja 0 keV).*

Rješenje. Promotrimo razlike energija i pogledamo pojavljuju li se ponovo energije linija (Rydberg-Ritzov princip kombinacije). Dobivamo sljedeće relacije:

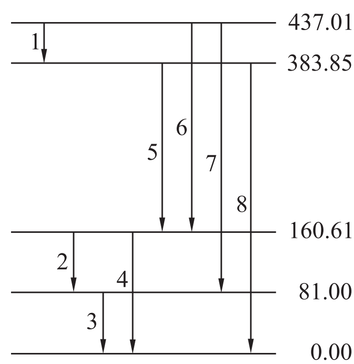
$$160.61 - 81.00 = 79.61$$

$$276.40 - 223.24 = 53.16$$

$$356.01 - 276.40 = 79.61$$

$$383.85 - 223.24 = 160.61$$

Ako posložimo nivoe kao na slici, dobit ćemo zadane energije i relacije:



Osam zadanih energija su redom navedeni prijelazi, pa su energije četiri pobuđena stanja 81.00, 160.61, 383.85 i 437.01 keV.

Ur.

1612. *Unutar sante leda nalazi se granitni kamen. Santa pliva po površini mora, topi* *se u vodi i potone kada joj je ukupna masa (leda i kamena) 890 kg. Kolika je masa kamena? Gustoća leda je 920 kg/m^3, kamena 2750 kg/m^3, a morske vode 1030 kg/m^3.*

Rješenje. Sklop sante i kamena potonut će kada mu gustoća dosegne gustoću morske vode. Uvjet je, dakle

$$1030\ \mathrm{kg/m^3} = \frac{m_k + m_l}{V_k + V_l} = \frac{890\ \mathrm{kg}}{V_k + V_l}.$$

Odatle imamo

$$V_k + V_l = \frac{m_k}{2750} + \frac{m_l}{920} = \frac{890}{1030}$$

za masu leda stavimo $m_l = 890 - m_k$ i dobijemo

$$\frac{m_k}{2750} + \frac{890 - m_k}{920} = \frac{890}{1030}.$$

Odatle je

$$m_k = 890 \cdot \frac{\frac{1}{920} - \frac{1}{1030}}{\frac{1}{920} - \frac{1}{2750}} = 142.83\ \mathrm{kg}.$$

Ur.

1613. *Na gornjoj plohi aluminijske kocke duljine brida 6 cm izdubljena je polukugla maksimalnog radijusa (3 cm). Odredi masu kocke prije i nakon izdubljivanja. Odredi visinu težišta prije i nakon izdubljivanja. Gustoća aluminija je 2.7 g/cm^3.*

Rješenje. Masa kocke prije izdubljivanja je

$$m = \rho V = 2.7 \cdot 6^3 = 583.2\ \mathrm{g}.$$

Nakon izdubljivanja, masa je umanjena za masu izdubljene polukugle, koja iznosi

$$m_P = \rho V_P = 2.7 \cdot \frac{2}{3} 3^3 \pi = 152.68\ \mathrm{g},$$

pa je masa nakon izdubljivanja

$$m' = m - m_P = 430.52\ \mathrm{g}.$$

Težište je prije izdubljivanja bilo u središtu kocke, tj. na visini $h = 3$ cm od dna kocke. Da bismo odredili težište nakon izdubljivanja, treba nam izraz za težište polukugle. On glasi $z = \frac{3}{8} r$, gdje je r radijus polukugle, a z udaljenost težišta od baze polukugle, u našem slučaju od gornje plohe kocke prema dolje. Traženo težište kocke nakon izdubljivanja h' mora biti takvo da zajedno s polukuglom daje težište kocke prije izdubljivanja, tj:

$$mh = m'h' + m_P(6 - z)$$

$$583.2 \cdot 3 = 430.52 \cdot h' + 152.68 \cdot 4.875.$$

Odatle je $h' = 2.335$ cm.

Ur.

1614. *Baterija za mobitel ima napon 3.7 V i kapacitet 1700 mAh. Ako bi napunjenu bateriju iskoristili za grijanje jedne litre vode, koliko bismo podigli temperaturu vode (uz idealnu iskoristivost i bez gubitaka topline)? Specifični toplinski kapacitet vode je 4190 J/kgK.*

Rješenje. Uz idealnu iskoristivost, baterija kapaciteta 1.7 Ah i napona 3.7 V pohranjuje

$$E = Pt = UIt = 3.7 \cdot 1.7 \cdot 3600 = 22644\ \mathrm{J}$$

energije. Bez gubitaka topline $(E = Q)$, odgovarajući porast temperature 1 kg(= 1 l) vode iznosi

$$\Delta T = \frac{Q}{m_v c_v} = \frac{22644}{1 \cdot 4190} = 5.404\ \mathrm{K} = 5.404\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ur.

1615. *Tijelo se giba jednoliko ubrzano (kočenje) od $t = 0$ do zaustavljanja. U prvoj sekundi gibanja tijelo prevali 11.4 puta veći put nego u posljednjoj. Odredi početnu brzinu, ubrzanje i vrijeme zaustavljanja ako je zaustavni put 67.27 m.*

Rješenje. Označimo traženo ubrzanje s a $(a < 0)$, početnu brzinu s v_0 i vrijeme s t. Vrijedi $v_0 = -at$. Put u prvoj sekundi iznosi $s_1 = \frac{a}{2} + v_0$, a u posljednjoj $s_2 = -\frac{a}{2}$. Imamo

$$\frac{a}{2} - at = 11.4 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right),$$

dijeljenjem s $-a$ dobivamo $t = 6.2$ s. Ukupan zaustavni put je

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = -\frac{a}{2} t^2$$

$$67.27 = -a \cdot \frac{6.2^2}{2},$$

pa je $a = -3.5\ \mathrm{m/s^2}$. Početna brzina je onda $v_0 = -at = 3.5 \cdot 6.2 = 21.7$ m/s.

Ur.