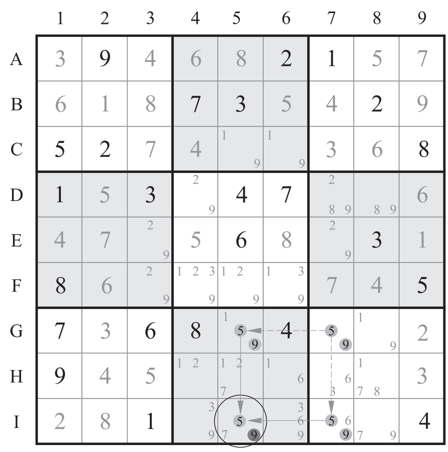
Sudoku – napredne metode rješavanja (2.2)

Žarko Čulić[1]

U prošlom broju smo započeli s grupom metoda pod nazivom *jednoznačnost (Uniqueness)* i obradili *jednoznačne pravokutnike* u svih šest varijanti (tip 1 do tip 6) te *jednoznačne pravokutnike s nepotpunim kandidatima*. U ovom ćemo se nastavku baviti sa *skrivenim pravokutnicima* (*Hidden Rectangles*), *izbjegnutim pravokutnicima* (*Avoidable Rectangles*) i *BUG* metodom.

Skriveni pravokutnici su zapravo jedna posebna metoda bazirana na definiciji jednoznačnih pravokutnika (*Unique Rectangles*, *UR*) kojeg čine četiri polja s istim parom kandidata (osnovni *UR* kandidati) u točno dva retka, dva stupca i dva kvadrata. Za razliku od *jednoznačnog pravokutnika*, *skriveni pravokutnik* mora u samo jednom polju (polazno polje) imati jedino osnovne *UR* kandidate dok u preostala tri polja može biti proizvoljan broj dodatnih kandidata (koji uopće nisu važni). Upravo ga to čini pogodnom metodom za rješavanje sudokua. No postoji drugi uvjet. U polju koje je smješteno dijagonalno polaznom polju treba naći osnovnog kandidata koji ima jaku povezanost u *UR* poljima retka i stupca. U tom slučaju možemo eliminirati drugog osnovnog kandidata iz tog dijagonalnog polja.

Prisjetimo se: jaka povezanost (*strong link*) između istih kandidata u poljima povezanog područja (retku, stupcu ili kvadratu) znači da postoje samo dva ista kandidata u poljima tog područja. Po definiciji, ako kod jake povezanosti nije točan kandidat u prvom polju, tada mora biti točan isti kandidat u drugom polju povezanog područja. Jaka povezanost se na slikama prikazuje punom linijom. Slaba povezanost (*week link*) znači da može postojati više istih kandidata u poljima povezanog područja, odnosno ako je kandidat u jednom polju tog područja točan, tada nisu točni isti kandidati u svim ostalim poljima tog područja. Slaba povezanost se prikazuje crtkanom linijom. Svaka jaka povezanost je ujedno i slaba povezanost što se i koristi kod pojedinih metoda.



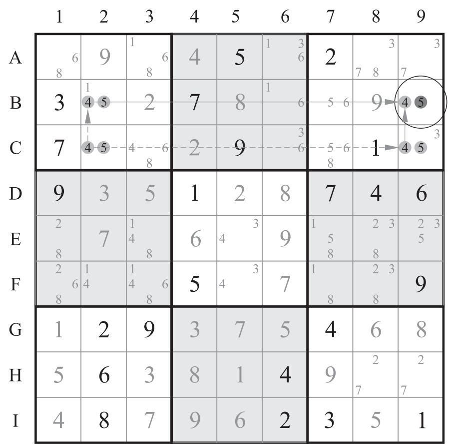
Slika 1.

Pogledajmo primjer na slici 1. *UR* čine četiri polja GI57, a osnovni *UR* kandidati su 5 i 9 i polazno polje je G7. Vidimo da ovdje sva ostala *UR* polja imaju dodatne

[1] Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `zculic@math.hr`

kandidate i da su oni različiti. U dijagonalnom polju I4 u odnosu na polazno polje G7, pretražujemo postoji li na jednom od osnovnih kandidata jaka povezanost sa susjednim *UR* poljima. U primjeru vidimo da broj 5 ima jaku povezanost u *UR* poljima retka (I5 i I7) i stupca (I5 i G5). Stoga možemo eliminirati drugog osnovnog kandidata, odnosno broj 9 iz polja I5. Analiza je jednostavna. Pretpostavimo da je u I5 točan broj 9. Tada je zbog jake povezanosti na broju 5, u I7 i G5 točan broj 5, a u polaznom polju G7 je točan broj 9 (jedini preostali broj). Na taj bi način dobili *UR* polja s istim otiskom (*footprintom*) za brojeve 5 i 9, što znači da bi u svako od ta četiri polja mogli staviti i 5 i 9 i imali bi dva moguća rješenja takvog sudokua. Da bi izbjegli takvu situaciju trebamo eliminirati broj 9 iz I5.

Ako imamo *UR* s više polja sa samo osnovnim kandidatima, tada treba istražiti sve mogućnosti u odnosu na moguća polazna polja. Pogledajmo primjer na slici 2.

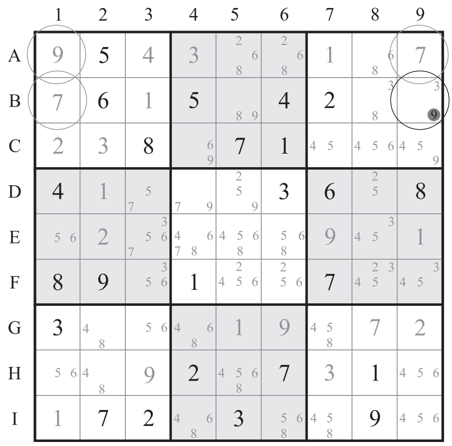


Slika 2.

Vidimo da u ovom primjeru *UR* polja B9 i C2 sadrže samo osnovne kandidate 4 i 5. Ako odaberemo da je polazno polje *skrivenog pravokutnika* B9, tada vidimo da njegovo dijagonalno polje C2 nema jaku povezanost niti na jednom osnovnom kandidatu u *UR* poljima. Zapravo ima jaku povezanost samo u stupcu 2 na broju 5, ali to nije dovoljno jer trebaju biti ispunjena oba uvjeta jake povezanosti na istom kandidatu sa susjednim *UR* poljima. Ako odaberemo C2 za polazno polje, vidimo da njegovo dijagonalno polje B9 ima jaku povezanost na osnovnom kandidatu 4 sa susjedna dva *UR* polja. Na taj način su zadovoljeni uvjeti metode i možemo eliminirati broj 5 iz polja B9.

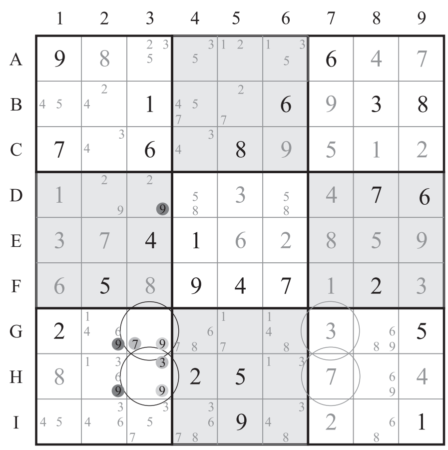
Izbjegnuti pravokutnici su još jedna metoda bazirana na definiciji jednoznačnih pravokutnika s jednom razlikom što su neka *UR* polja već riješena i u njih su upisani (točni) brojevi. Zbog tih riješenih i upisanih brojeva, ponekad ostaje neriješeno samo jedno *UR* polje sa samo jednim *UR* kandidatom što može biti zbunjujuće, ali logika i nadalje vrijedi. Jedini uvjet je da niti jedan riješeni i upisani broj u *UR* poljima nije početno zadani broj (*givens*). Postoje dva tipa *izbjegnutih pravokutnika*. Prva varijanta (tip 1) je slična metodi *UR*1 gdje imamo jednog dodatnog kandidata u jednom polju *UR*-a. Pogledajte sliku 3.

Na slici 3 vidimo da su riješena i upisana polja AB1 i A9 i niti jedno nije početno zadano. Da bi izbjegli *UR* polja s istim otiskom (*footprintom*) za brojeve 7 i 9, u polju B9 ne smije biti točan broj 9, pa ga možemo eliminirati.



Slika 3.

Druga varijanta (tip 2) je slična metodi *UR*2 gdje imamo jednog dodatnog kandidata u dva polja *UR*-a. Pogledajte sliku 4.

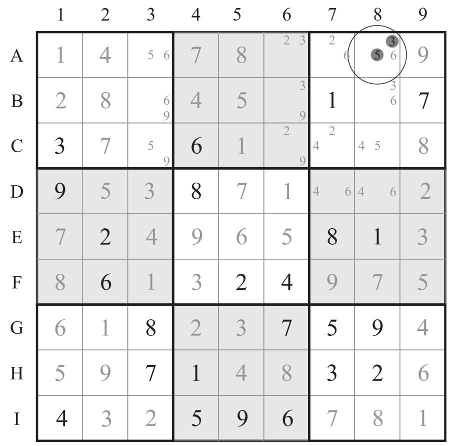


Slika 4.

Na slici 4 vidimo da su riješena polja GH7 i među njima nema početno zadanih brojeva. U poljima GH3 imamo kandidate 3 i 7 s dodatnim brojem 9, što znači da broj 9 mora biti rješenje u barem jednom od ta dva polja jer bi u protivnom imali *UR* polja s istim otiskom (*footprintom*) za brojeve 3 i 7 s dva moguća rješenja. Stoga možemo eliminirati broj 9 iz svih polja koja vide polja GH3. To su u ovom primjeru polja D3, G2 i H2.

BUG metoda je još jedna metoda koja rješava moguća višestruka rješenja sudokua. *BUG* je skraćenica od *Bivalue* (*Binary*) *Universal Grave* i označava poziciju u mreži u kojoj sva neriješena polja imaju samo dva kandidata i svaki se kandidat pojavljuje točno dva puta u svakom retku, stupcu i kvadratu. Takav sudoku ima točno dva rješenja.

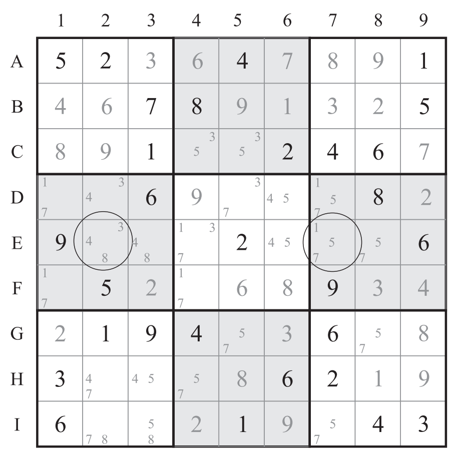
BUG+1 je metoda s *BUG* pozicijom gdje jedno polje ima jednog dodatnog kandidata. Upravo taj dodatni kandidat predstavlja rješenje tog polja da bi se izbjegla *BUG* pozicija s dva rješenja. Pogledajmo primjer na slici 5.



Slika 5.

U neriješenim poljima imamo po dva kandidata i to tako da se svaki kandidat pojavljuje točno dva puta u svakom retku, stupcu i kvadratu, osim u polju A8 gdje imamo jednog dodatnog kandidata. Upravo taj dodatni kandidat mora biti rješenje tog polja jer bi u protivnom imali dva rješenja sudokua. Analizom odmah vidimo da je broj 6 taj dodatni kandidat jer se nalazi tri puta u retku, tri puta u stupcu i tri puta u kvadratu. Zaključak je da imamo $BUG+1$ metodu i rješenje polja A8 je broj 6.

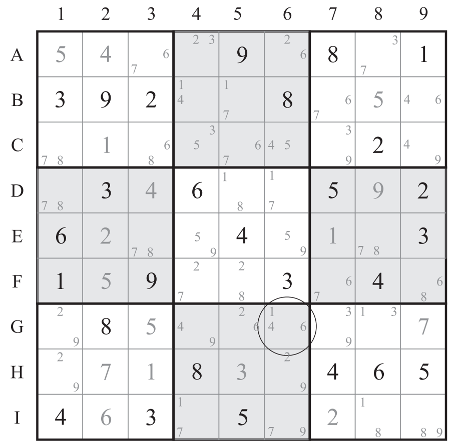
$BUG+k$ je poopćena metoda s BUG pozicijom uz k dodatnih kandidata raspoređenih u k polja (kandidati u tim poljima mogu, ali i ne moraju biti isti). Takav sudoku rješavamo koristeći činjenicu da barem jedan od tih dodatnih kandidata mora biti točan da bi se izbjegla BUG pozicija. Pogledajmo primjer na slici 6.



Slika 6.

Ako maknemo 4 iz E2 i 7 iz E7, sva bi neriješena polja imala točno po dva kandidata i svaki kandidat bi se pojavljivao točno dva puta u svakom retku, stupcu i kvadratu. Dakle imali bi BUG poziciju s dva rješenja. Da bi to izbjegli, barem jedan od ta dva dodatna kandidata u ta dva polja mora biti točan (imamo $BUG+2$). Nadalje, te dodatne kandidate 4 i 5 možemo smatrati kao podset (jedno polje s kandidatima 4 i 5) koji zajedno s poljem E6 u kojem su također kandidati 4 i 5 čini zaključani set, odnosno *par brojeva* (slično kao kod *UR*3 metode). Stoga možemo eliminirati sve brojeve 4 i 5 iz svih polja koja vide sva tri polja E2, E6 i E7, konkretno možemo eliminirati 4 iz E3 i 5 iz E8.

Kod *BUG* metode treba biti oprezan. Pogledajte primjer na slici 7.



Slika 7.

Vidimo da u svim neriješenim poljima mreže imamo po dva kandidata, osim u polju G6 gdje imamo 3 broja i očekujemo da je jedan od ta tri broja rješenje tog polja. No, vidimo da se svi kandidati iz tog polja pojavljuju točno dva puta u povezanom retku, stupcu i kvadratu. Nadalje, svi kandidati u mreži se pojavljuju točno dva puta u mreži, osim broja 9 koji se pojavljuje tri puta u retku G, stupcu 6 i kvadratu VIII. Nažalost, broj 9 se ne nalazi u polju G6 koje jedino ima tri kandidata i stoga to nije *BUG* pozicija i ne možemo je riješiti s *BUG*+1 metodom.

U sljedećem nastavku ćemo pisati o preostalim metodama vezanim za jednoznačnost rješenja.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				2				3	7
B							8	6	
C			9	4	7	6		1	
D						7			2
E			8	6	9	3	7		
F	4			1					
G		8		7	3	4	1		
H		4	1						
I	3	2				8			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	6	4	2	8	1	9	3	7
B	1	7	2	3	5	9	8	6	4
C	8	3	9	4	7	6	2	1	5
D	6	1	3	8	4	7	5	9	2
E	2	5	8	6	9	3	7	4	1
F	4	9	7	1	2	5	6	8	3
G	9	8	5	7	3	4	1	2	6
H	7	4	1	9	6	2	3	5	8
I	3	2	6	5	1	8	4	7	9

Slika 8.