



Paradoks Sancha Panze

Miloš Babović¹, Vukota Babović²

U svijetu se ove godine obilježava 400 godina od smrti slavnog pisca Miguela de Servantesa (1547. – 1616.). Njegov roman *Don Quijote de la Mancha* smatra se prvim modernim romanom svjetske literature i najprevođenija je knjiga nakon Biblije. Danas je teško naći obrazovanu osobu koja nije čula za ovog pravdoljubivog i hrabrog viteza i za njegovog vjernog štitonošu Sancho Panza. U svako bismo ih doba mogli i nacrtati, toliko je taj književni par prisutan u našoj mašti. Don Quijote je visok, živahan vitez, a Panza nizak i debeljuškast štitonoša. Tako ćemo ih ovdje i skicirati, bez umjetničkih pretenzija, slika 1.

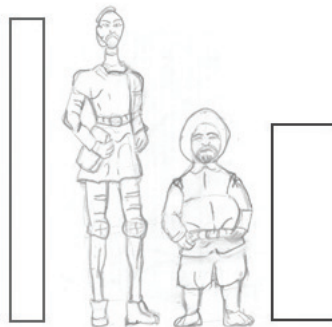
Za potrebe našeg članka moramo ući u još veće stilizacije. U izračunavanjima, viteza ćemo prikazati valjkom debljine δ i visine h , a njegovog suputnika valjkom debljine 2δ i visine $\frac{3h}{4}$.

Zamislimo sada Quijota i Panzu kako hodaju utabanom stazom, koja se pruža po prostranoj, horizontalnoj ravnici, i gledaju na zapad. Dan je vedar i dva putnika vide Sunce na samom zalasku. Iza njih se prostiru njihove sjene. Koliko je dugačka svaka od njih? I koliko je sjena viteza veća od sjene štitonoše? Odgovorit ćemo na ova pitanja nešto kasnije; prvo pogledajmo kako je u jednom drugom romanu došlo do slične situacije koju je komentirao sam autor.

Djelo Tomasa Hardyja *Tess of the D'Urbervilles – The pure woman* [1] smatra se jednim od najboljih romana engleske književnosti. Ovo djelo preveo je na hrvatski jezik Berislav Grgić 1965. godine [2]. Osim svojih velikih i priznatih umjetničkih kvaliteta, roman pruža zadovoljstvo čitatelju fizičaru da stručno obrati pozornost na nekoliko odlomaka u kojima pisac koristi fiziku za uspješniji opis okolnosti u kojima se odvija određena književna radnja. Mi smo se ovdje opredijelili za možda najinteresantniji primjer te vrste. Prvo ćemo dati citat koji nam je privukao pozornost [3]:

Sunce je bilo toliko blizu Zemlji, a tratina tako plosnata, da bi se sjene Clarea i Tesse protezale po četvrt milje ispred njih, kao dva dugačka prsta, koji su pokazivali u daljinu, tamo gdje su zeleni aluvijalni prostori dodirivali kose obronke doline.

Svakako je točno, svako od nas to može potvrditi, da se sjena čovjeka koji stoji na horizontalnoj podlozi, na tratini, znatno izduži u trenucima kad Sunce zalazi. Ali, koliko je dugačka takva sjena? Možda je neograničena? Ovisi li sjena o visini čovjeka? Možda ovisi linearno? Ova pitanja traže odgovore koji nisu nezanimljivi.



Slika 1. Najslavniji par svjetske književnosti: Don Quijote i Sancho Panza uz modele njihovih figura.

¹ Autor je diplomirani inženjer mašinstva iz Beograda; e-pošta: milos.babovic@gmail.com

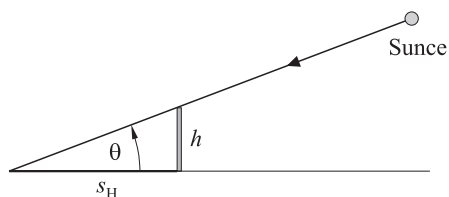
² Autor je profesor elektromagnetizma i optike u mirovini iz Beograda; e-pošta: bvukot@sezampro.rs

Hardy smatra da je sjena ograničena. On čak daje i procjenu dužine sjene: četvrtina milje. Postoje razne vrste mjera za duljinu koje se sve zovu milja; mi ćemo uzeti da se misli, kao obično [4], na *statute mile*, duljinu od (vrlo) približno 1600 metara. Tako, možemo uzeti da četvrtina milje iznosi 400 metara. Mi smatramo da pisac nije slučajno rekao da *ispred* njegovih književnih junaka vidimo tog vedrog, tihog dana na smiraju sjenu od četiri stotine metara. (Mladić i djevojka gledaju s nadom prema istoku, ali tamo se zloslutno proteže njihova duga sjena.) On se baš htio, vjerujemo, poslužiti donekle egzaktnim podatkom, što se savršeno uklapa u poetiku njegovog pričanja. Inače, majstor riječi njegovog ranga mogao je na mnogo načina izbjeći uplitanje u konkretnu mjeru sjene. Nije rijetka stvar, i savršeno je razumljivo da je tako, da pisci koriste znanja iz fizike kako bi dobili na uvjerljivosti pripovijedanja. (Jules Verne je općepoznati primjer, no samo jedan od mnogih.)

Danas su učenicima bliske televizijske istraživačke tehnike, oličene u popularnim serijalima *Mythbusters* ili *Galileo*. U razvijanju priče, tamo se često zahtijeva gradacijski princip, gdje se istini pristupa postupno. Stoga se i mi ovdje na početku pitamo pod kojim bi uvjetima Hardyjev zaključak bio znanstveno korektan? Hardyjevo rješenje bi moglo biti točno ako bismo shvatili Sunce kao *točkasti* izvor svjetlosti pod nekim kutom θ nad horizontom. Pogledajmo sliku 2. Sunce, kao točkasti izvor svjetlosti, obasjava osobu visine h . Hardyjeva duljina sjene je očito

$$r_H = \frac{h}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (1)$$

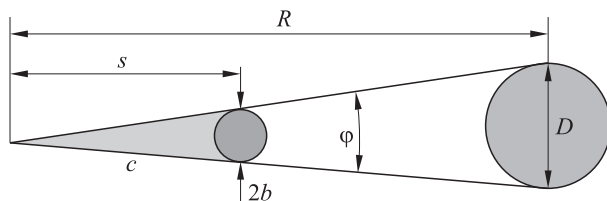
Odavde bismo dobili $r_H = 400$ metara ako bi bilo $\theta \approx 0.0045$ radijana, odnosno $\theta \approx 0.26^\circ$. Tako, točkasti izvor svjetlosti može praviti iza predmeta proizvoljno dugu punu sjenu, u aproksimaciji geometrijske optike.



Slika 2. Mogući Hardyjev pristup problemu.

Sunce, međutim, nije točkasti izvor svjetlosti. Ako ništa drugo, svako pomračenje naše zvijezde uvjerava nas da mi vidimo sunčev disk pod ne tako sićušnim kutom. Zbog toga se trebamo kritički osvrnuti na gornji pojednostavnjeni prikaz situacije.

Pristupimo dakle malo drugačije zadatku koji je “postavio” Hardy. Poslužimo se skicom sa slike 3.



Slika 3. Sjena iza Tessinog mladića Clarea, pogled odozgo.

Veći krug promjera D predstavlja Sunce na zapadnom horizontu. Zrake sa Sunca obasjavaju čovjeka (manji krug) koji je modeliran kao pravi kružni valjak promjera $2b$ i visine h . Od čovjeka se proteže puna sjena duljine s . Ako uočimo na slici 3 pravokutni trokut čije su katete s i b , vidimo da je njegova hipotenuza c . Udaljenost do Sunca

obilježena je s R . Za kut pod kojim čovjek vidi disk Sunca pišemo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{D}{R}. \quad (2)$$

To je mali kut te je, približno, radijanska mjera Sunčevog diska

$$\varphi \approx \frac{D}{R}. \quad (3)$$

Stavljajući poznate vrijednosti za promjer Sunca $D = 1.393 \cdot 10^6$ km i polumjer Zemljine putanje (udaljenost Zemlja-Sunce, astronomska jedinica) $R = 1.496 \cdot 10^8$ km, izračunamo

$$\varphi = 9.3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}. \quad (4)$$

Sunce je za nas svijetli, užareni disk kojeg uočavamo pod kutom od 0.533° (približno pola stupnja). Ovo je standardna i odavno poznata vrijednost. Ponekad se daje ovakva efektna usporedba: ako čitamo knjigu i na stranici uočimo slovo o veličine 2.3 mm s daljine jasnog vida $L = 25$ cm, tada ga gledamo pod kutom iz relacije (4). (Posebno je zabavno da i Mjesečev disk ima skoro istu mjeru kuta.)

Naglasimo ovaj važan zahtjev: Dana točka će ležati u potpunoj sjeni samo ako je za nju mjera kuta β zaklona koji stvara sjenu veća od mjere kuta Sunca, tj. ako je ispunjen uvjet $\beta > 0.533^\circ$. Dužina $2b$ vidi se pod kutom φ s udaljenosti s i iz spomenutog

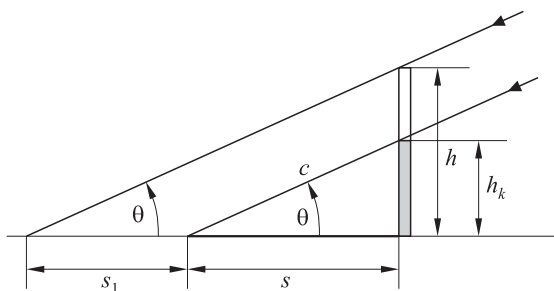
trokuta sa slike 3 vidimo da je $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{c}$, odakle je

$$c = \frac{b}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (5)$$

Budući da je $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.00465$ dobivamo

$$c = 215b. \quad (6)$$

Ova formula ponekog može iznenaditi. Duljina sjene je povezana s debljinom valjka. Ali što je s visinom književnog junaka Clarea? Tko nepažljivo prilazi problemu, povezuje instinktivno duljinu sjene s visinom osobe. Istina, i taj se aspekt mora analizirati. Zato pogledajmo sliku 4.



Slika 4. Utjecaj visine valjka na duljinu pune sjene.

blemu, povezuje instinktivno duljinu sjene s visinom osobe. Istina, i taj se aspekt mora analizirati. Zato pogledajmo sliku 4.

Tamo vidimo valjak visine h obasjan zracima Sunca koji upadaju pod malim kutom θ prema horizontalnoj ravnini. Uzmimo neku konkretnu vrijednost, na primjer $\theta = 2^\circ$. Pravokutni trokut s katetama s i h_k upravo ima izračunatu hipotenuzu c i šiljasti kut θ . Neka točka na kateti s je sigurno u sjeni i jedino je dio stupca visine h_k relevantan za izračunavanje duljine potpune sjene; tu smo duljinu nazvali kritičnom duljinom. Ostatak stupca duljine $\Delta h = h - h_k$ ovdje je nebitan i sudjeluje u formiranju polusjene u području s_1 ; ta je polusjena blijeda i najvjerojatnije teško uočljiva [5]. To znači da je duljina sjene

$$s = c \cos \theta = 215b \cos \theta. \quad (7)$$

Modelirajmo Clarea ovako: On je valjak visine $h = 180$ cm i širine $2b = 50$ cm. Tada izračunamo iz formule (7) $s = 53.7$ m; slobodno možemo zaokružiti $s \approx 54$ m. Ovo je duljina sjene kratko vrijeme prije zalaska Sunca ($\theta = 2^\circ$). Da budemo sasvim točni, izračunajmo još kritičnu visinu Clarea. Sa slike 4 vidimo

$$h_k = c \sin \theta = 215b \sin \theta \quad (8)$$

odnosno $h_k = 1.88$ m. To znači da je u ovom primjeru $h < h_k$. Čitatelj Hardyjevog romana ima utisak da je Tessa za nekoliko cm niža od Clarea. Tako su duljine sjena mladića i djevojke proporcionalne njihovim visinama.

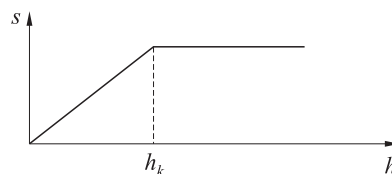
Zaključujemo da je Hardyjeva opisana sjena (1) oko osam puta dulja od najveće realne sjene koja je nešto malo dulja od pedeset metara. Možemo simbolično stati na stranu velikog pisca koji je za života trpio ogromne pritiske javnog mnijenja zbog navodnog kvarenja društvenog morala kasne viktorijske ere u Engleskoj. Hardy je najbolje znao kakva se licemjerna sjena nadvila nad njegovim podnaslovom koji Tessu kvalificira kao čistu dušu, te je njenu sjenu produžio preko njene fizičke mjere. Sjene Clarea i Tesse ostaju nedeformirane isto kao i njihovi karakteri. Ova činjenica snažno podržava opisanu emotivnu sjedinjenost para, ali i sumoran je znak bliske zle sreće jedne nedužne mlade žene i čovjeka upletenog u složenu mrežu društvenih odnosa.

Vrijeme je sada da se vratimo pitanju koje smo postavili na početku članka. Ostavili smo naša dva nepomirljiva oponenta svim nepravdama ovog svijeta kako umorno, ali odlučno koračaju ravnicom prema zapadu gdje će za koju minutu zaći Sunce. Pitali smo se kao fizičari kolike se sjene pružaju iza njihovih figura i u kakvom su one odnosu. Relevantne parametre koji se odnose na formiranje sjena (pri $\theta = 2^\circ$) ova dva putnika, izračunali smo prema gore obrazloženim formulama i prikazali ih u tablici:

duljine	Don Quijote	Sancho Panza	komentar
$2b$ [m]	0.4	0.8	slika 2
h [m]	2	1.5	slika 3
c [m]	43	86	slika 2, jednađžba (5)
h_k [m]	1.5	3	slika 3, jednađžba (7)
s [m]	43	86	slika 2, jednađžba (6)

Ako je netko prebrzo zaključio da je vitezova sjena dulja, i to za faktor $\frac{4}{3}$, moramo ga razočarati. Iz prethodnog izlaganja proizlazi da širina čovjeka preko leđa (debljina valjka) presudno određuje duljinu sjene. Tako je sjena Sancha Panze dulja od sjene visokog Don Quijota! Za ne mali broj čitatelja ovaj odgovor će biti paradoksalan i u tome je i primjetna heuristička vrijednost ovog zadatka.

Na kraju još naglasimo: linearna ovisnost dužine geometrijske sjene o visini valjka, $s = f(h)$, vrijedi samo do jedne kritične visine, h_k , koja ovisi o debljini valjka i kuta upada Sunčevih zraka. Na slici 5 prikazana je ovisnost duljine sjene o visini valjka.



Slika 5. Ovisnost geometrijske sjene o visini valjka.

Nadamo se da izložena lekcija iz geometrijske optike u svojoj egzaktnosti nije pokvarila Hardyjev prvorazredni prikaz sentimentalne veze dvije časne jedinice s kraja devetnaestog stoljeća, koje su bezuspješno tragale za svojom ljudskom srećom u predjelima Engleske oko poganskog kompleksa Stonehengea. Niti je umanjila dostojanstvo jednog viteza od prije 400 godina koji služi kao etički svjetionik mnogim generacijama čitatelja, sve do današnjih dana.

Literatura

- [1] THOMAS HARDY, *Tess of the D'Urbervilles – The pure woman*, Macmillan and Co. Limited St. Martin's Street London, 1928.
- [2] THOMAS HARDY, *TESSA iz porodice D'Urberville ili Čista žena*, Zora, Zagreb, 1965.
- [3] U prijevodu [2] može se ovo mjesto naći na strani 200.
- [4] <https://simple.wikipedia.org/wiki/Mile>
- [5] NIKOLA POLJAK, *Par zanimljivih crtica o pomrčini Sunca*, Matematičko fizički list LXV 4 (2014. – 2015.).