Što je prirodno u prirodnom logaritmu?

Maja Karaga[1], *Marko Stojanović*[2]

Uvod i povijest

Postoje tri tipa logaritama koje susrećemo u standardnoj upotrebi: logaritmi s bazom 2 (koji se uglavnom koriste u računarstvu i teoriji glazbe), logaritmi s bazom 10 (koji se uglavnom koriste u inženjerstvu i tehnici), te prirodni logaritmi (koji se uglavnom koriste u matematici, fizici i ekonomiji). I dok su logaritmi s bazom 10 najpogodniji za računanje s brojevima u dekadskom sustavu, kao što je to običaj (i biološki odjek prakse brojanja na naših deset prstiju), baza 2 je korisna jer ima više malih pozitivnih cijelih brojeva čiji su logaritmi u bazi 2 također cijeli brojevi. No, unatoč tome, naziv *prirodni logaritam* rezerviran je za logaritam sa, čini se, posve umjetno konstruiranom bazom $e \approx 2.71828182845904523536$. Dapače, u literaturi često viđamo rečenicu "logaritmi s bazom e su toliko važni da ih nazivamo prirodni logaritmi". Ali malo gdje se nudi objašnjenje zašto je tome tako. Kako išta može biti prirodnije nego računanje s bazom 10? Zašto upravo taj čudan broj? S brojem e nipošto nije lako računati. Udžbenici obično uvode broj e kao limes[3] niza $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ili kao[4] $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$. Niti jedna od tih definicija ne izgleda ohrabrujuće za aritmetičke operacije s e. Štoviše, poznato je da se e ne može dobiti kao nultočka nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima (to jest radi se o *transcendentnom broju*). Očito, broj e nije izabran zbog lakoće provođenja osnovnih aritmetičkih operacija.

Broj e bio je poznat matematičarima i prije nego se pojavio kao baza logaritma. U Europi 16. i 17. stoljeća trgovina i bankarstvo su postajali sve razvijeniji i profesionalniji te se pojavila potreba za čestim računanjem kamata. Švicarac Joost Bürgi (1552. – 1632.) želio je izraditi tablicu za računanje kamata koja je brža za upotrebu od svih postojećih. Prilikom konstruiranja takvih tablica primijećena je sljedeća činjenica: ako glavnicu P ukamaćujemo n puta godišnje kroz period od t godina s godišnjom kamatnom stopom r, i ako pustimo da n neograničeno raste, količina novca S (koju računamo po formuli $S = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$) teži k određenom iznosu. Taj iznos, za $P = r = t = 1$, iznosi približno 2.718 (to jest e). Nezavisno od toga, broj e se pojavio prilikom računanja još jednog problema – računanja površine ispod hiperbole $y = \dfrac{1}{x}$. Broj e je konačno prvi put objavljen u literaturi u dodatku engleskog prijevoda djela *Descriptio* škotskog matematičara Johna Napiera 1618. godine. Sam dodatak je najvjerojatnije napisao William Oughtred i u njemu se pojavljuje ekvivalent izjave da je $\log_a 10 = 2.302585$, gdje je $a \approx 2.71828$. Simbol e kao oznaku za broj 2.71828 prvi je koristio švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. ili 1728. u neobjavljenom članku o eksplozivnoj

[1] Autorica je predavač, vanjska suradnica na PMF-MO; e-pošta: `karaga@math.hr`

[2] Autor je softverski inženjer u AVL-AST; e-pošta: `marko.stojanovic222@gmail.com`

[3] Limes je broj kojem neki niz brojeva teži, na primjer niz 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999... teži k broju 1.

[4] $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

snazi topova, a prvi put se oznaka e pojavila u objavljenom rukopisu u, također, Eulerovoj *Mechanici* 1736. godine. O razlozima zašto je Euler izabrao upravo simbol e možemo samo nagađati. Neki smatraju da je to povezano s riječju eksponencijalna, neki da je to naprosto bilo prvo slovo po redu nakon što je već iskoristio a, b, c i d, a neki da ga je nazvao po sebi. Kako bilo da bilo, neki broj e nazivaju i *Eulerov broj*.

Koji su dakle razlozi da je upravo taj broj prirodna baza za logaritme? Možemo ih možda već donekle naslutiti iz primjera različitih i naoko nepovezanih problema rješenje kojih se broj e pokazao kroz povijest. e je broj koji se pojavljuje često i neizbježno u prirodi. Razni procesi su često mnogo bolje prikazani korištenjem prirodnih logaritama. Nadalje, prirodni logaritmi (i s njima povezana eksponencijalna funkcija) imaju zbog svojih svojstava veliku važnost u diferencijalnom i integralnom računu. I konačno, da bi izračunali logaritme u bilo kojoj drugoj bazi, možemo prvo izračunati prirodne logaritme, i zatim ih pomnožiti određenom konstantom. Osvrnut ćemo se detaljnije na svaki od tih razloga.

Pojave prirodnih logaritama u prirodi

Zakon prirodnog rasta ilustrira kako je broj e nezaobilazan u prirodi. Promotrimo primjer množenja bakterija. Neka je N_0 broj bakterija u kulturi u trenutku t_0, a N_t broj bakterija nakon t sati. Ako kulturu održavamo u konstantnim fizičkim uvjetima, broj bakterija će se povečavati za određeni postotak r, te možemo napisati jednadžbe:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^1 \\ N_2 &= N_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \\ &\vdots \\ N_t &= N_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t. \end{aligned}$$

Naravno, ti izrazi su samo aproksimacije jer neke od bakterija mogu dosegnuti zrelost i početi se reproducirati prije nego što istekne jedan sat. Bolja aproksimacija može se dobiti ako gledamo kraće vremenske intervale, na primjer pola sata:

$$N_t = N_0\left(1+\frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^{2t}.$$

Ako podijelimo naš početni sat na još manje dijelove (na n dijelova), dobivamo

$$N_t = N_0\left(1+\frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt}$$

Za najtočniji opis ovog fenomena moramo gledati limes gornjeg izraza kad je broj podintervala sve veći i veći[5] (i posljedično, vremenski intervali koje promatramo sve

[5] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ je oznaka za limes niza a_1, a_2, a_3,... gdje broj njegovih članova teži beskonačnosti.

manji i manji), to jest

$$N_t = \lim_{n\to\infty} N_0 \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt}$$
$$= N_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt} = N_0 e^{\frac{r}{100}t}$$

Analogan postupak, osim za prirodni rast, može se primijeniti i na mnoštvo drugih fenomena u prirodi: širenje i skupljanje zagrijanih objekata, vrijeme poluraspada radioaktivnih materijala, količinu danog materijala u nekom vremenskom trenutku u kemijskoj reakciji, usporavanje tijela koje pada uslijed otpora zraka, apsorpciju svjetla dok prolazi kroz dani prozirni materijal bilo koje debljine, prigušenje vibracionog gibanja i druge slične probleme.

S obzirom da kretanja na financijskim tržistima imitiraju kretanja u prirodi, nalazimo i mnoštvo sličnih pojava u ekonomiji, počev s onom najstarijom primjenom ukamaćivanja: ako uložimo iznos P_1 na godinu dana po kamatnoj stopi od $r\%$, na kraju godine imat ćemo iznos

$$P_2 = P_1\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1.$$

Ako se kamate pripisuju svakih 6 mjeseci, imamo formulu

$$P_2 = P_1\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^2.$$

Analogno kao kod bakterija, koristeći sve kraće periode ukamaćivanja, dolazimo do formule

$$P_2 = P_1\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n,$$

a ako računamo kamate neprekidno, imamo

$$P_2 = \lim_{n\to\infty} P_1\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n = P_1 e^{\frac{r}{100}}.$$

Dakle, na kraju godine, naš novac je narastao za $\frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{r}{100}}$. Jer je prirodni logaritam inverzna funkcija eksponencijalnoj funkciji e^x, djelujemo na obje strane tog izraza prirodnim logaritmom i imamo $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \ln(e^{\frac{r}{100}})$. Iz toga slijedi[6] $\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{r}{100}$, to jest $\ln(P_2) - \ln(P_1) = \frac{r}{100} = r\%$. Dakle, ako oduzmemo prirodni logaritam vrijednosti, na primjer dionica, pred godinu dana od prirodnog logaritma vrijednosti dionica u drugoj godini, dobit ćemo postotak od tih dionica.

Općenito, postotak promjene neke vrijednosti P u vremenskom periodu t je približno jednak $\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$, i ta aproksimacija je dovoljno dobra da je gotovo potpuno točna kad je postotak promjene mali (vidi tablicu 1) i zbog toga je prirodni logaritam od velike vrijednosti u ekonomiji.

[6] jer se djelovanje inverznih funkcija poništava

% promjene u P	razlika $\ln(P)$
-50%	-0.693
-40%	-0.511
-30%	-0.357
-20%	-0.223
-10%	-0.105
-5%	-0.051
-2%	-0.020
-0%	0.000
-2%	0.020
5%	0.049
10%	0.095
20%	0.182
30%	0.262
40%	0.336
50%	0.405
100%	0.693

Tablica 1. Usporedba stvarnog postotka promjene i postotka promjene dobivenog razlikom prirodnih logaritama. Vrijednosti ostaju vrlo točne do $\pm 20\%$.

Broj e (a onda i prirodni logaritam) ima primjene i u teoriji vjerojatnosti, gdje se pojavljuje na način koji nema veze s prirodnim rastom. Neka kockar igra kockarsku igru na automatu na kome je dobitno jedno povlačenje od njih n i neka odigra n povlačenja. Uzmimo n jako velik, na primjer $n = 10^6$. Vjerojatnost da je kockar svih tih n puta izgubio, to jest nije ostvario dobitak, je $\left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^{10^6}$. Dakle, ponovno imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

Još jedan problem koji vodi do prirodnih logaritama je problem *deranžmana*: n gostiju dolazi na zabavu i pri dolasku svaki od njih preda svoj šešir garderobijeru koji ih sprema u unaprijed pripremljenih n kutija, od kojih je svaka označena imenom gosta. Ali, garderobijer ne zna identitet gostiju, pa smješta šešire u nasumično izabrane kutije. Kolika je vjerojatnost da niti jedan šešir nije u pravoj kutiji?[7].

Zanimljiva je i primjena u datiranju starih predmeta pomoću atoma ugljika. Poluživot tipa ugljika koji koristimo je 5730 godina. Datiranje se provodi tako da izjednačimo postotak tog tipa ugljika prisutan u predmetu s e^{Ct}, gdje je C neka konstanta, a t starost predmeta koju želimo odrediti. Ukoliko postavimo postotak ugljika koji imamo, i znamo C, tada ćemo lako izračunati t. Odredimo najprije C. S obzirom da znamo da je poluživot ugljika 5730 godina, to znači da nam nakon toliko godina preostane 50% ugljika. Dakle, 50% ugljika $= e^{5730C}$, to jest $0.5 = e^{5730C}$. Djelujemo na obje strane jednadžbe prirodnim logaritmom imamo $\ln(0.5) = 5730C$. Odavde je $C = \frac{\ln(0.5)}{5730} = -0.000121$. Uvrstimo C u našu polaznu jednadžbu i dobijemo: postotak

[7] Kada je broj gostiju velik, ta vjerojatnost ispada približno $\frac{1}{e}$.

ugljika = $e^{-0.000121t}$. Odredimo sada starost antikne matematičke knjige koja sadrži 30% naše specijalne vrste ugljika. Znači, $0.3 = e^{-0.000121t}$, pa je $\ln(0.3) = -0.000121t$, što daje $t = \dfrac{\ln(0.3)}{-0.000121} = 9950$ godina je starost naše vrlo stare knjige.

Prirodni logaritmi i broj e pojavljuju se i u računarstvu. U početcima se postavljalo pitanje koji je brojevni sustav najbolji za prikaz brojeva u računalu, u smislu da zahtijeva najmanju cijenu, to jest minimizira funkciju koštanja[8]. Cijena elementa C proporcionalna je broju vrijednosti koje taj element može poprimiti i broju pozicija p koje su potrebne za prikazivanje brojeva u nekom području $0 \le N \le D$. U bazi b različite vrijednosti koje element može poprimiti su $0, 1, 2, \ldots, b-1$, to jest, ima ukupno b različitih vrijednosti. Dakle, $C = b \cdot p$. Najveći broj koji u bazi b možemo ispisati na p pozicija je

$$N = \underbrace{\underline{b-1}\,\underline{b-1}\,\underline{b-1}\cdots\underline{b-1}}_{p \text{ pozicija}}$$

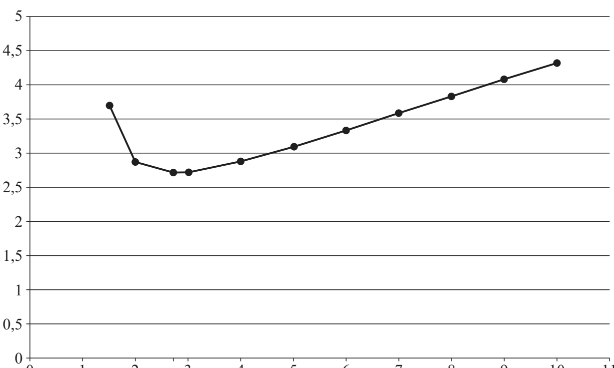
Kada na to dodamo 1 imamo[9]

$$N + 1 = 1\,\underbrace{\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\cdots\underline{0}}_{p \text{ pozicija}}$$

Dakle, $N + 1 = b^p$. To ćemo iskoristiti da cijenu izrazimo samo preko b (jer nas zanima najbolja baza). Djelujemo prirodnim logaritmom i imamo

$$\ln(N+1) = \ln(b^p) \implies \ln(N+1) = p \ln b,$$

pa je $p = \left\lceil \dfrac{\ln(N+1)}{\ln b} \right\rceil$ i cijena[10] je $C = b \cdot \left\lceil \dfrac{\ln(N+1)}{\ln b} \right\rceil \ge b \cdot \dfrac{\ln(N+1)}{\ln(b)}$. Dakle, funkcija troškova, cijena koju želimo minimizirati, je $f(b) = \ln(N+1)\dfrac{b}{\ln(b)}$.



Slika 1. Graf funkcije $\dfrac{b}{\ln(b)}$ *za različite baze* b. *Tražimo minimum te funkcije.*

Iz grafa na slici 1 vidimo da se minimum postiže za $b = e$. Dakle, najbolja baza bila bi e. Kako je s e očito nepraktično računati, iduća najbolja je broj 3. Međutim, između

[8] Znamo da je izabran binarni sustav, to jest sustav s bazom 2.

[9] Kada na $b - 1$ dodamo 1 u bazi b imamo 0 i "1 dalje".

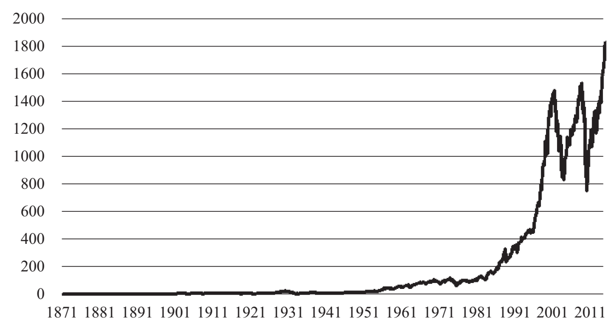
[10] $\lceil x \rceil$ je najmanji cijeli broj koji nije manji od x. Broj pozicija mora biti cijeli broj.

baza 2 i 3 razlika u cijeni je vrlo mala[11], a za bazu 2 je jeftinija i jednostavnija izvedba sklopova. Zbog toga danas u upotrebi imamo bazu 2.

Dakle, možemo opravdano zaključiti da je jedan razlog zašto je baza e prirodna baza to što se pojavljuje tako često, prirodno i neizbježno, u tako mnogo različitih primjena.

Linearizacija eksponencijalnog rasta i grafički prikazi

Logaritam produkta jednak je sumi logaritama $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Dakle, logaritmiranje pretvara multiplikativne odnose u aditivne, odnosno eksponencijalne izraze u linearne. Logaritmiranjem varijabli koje rastu eksponencijalno tijekom vremena, često možemo objasniti njihovo ponašanje linearnim modelima. To za posljedicu ima (osim očitih koristi u računarstvu gdje je operaciju zbrajanja velikih brojeva mnogo lakše provesti i podaci mnogo sporije rastu) da je bitno lakše očitati neki trend i značenje podataka iz logaritmiranog grafa nego iz nelogaritmiranog. Na primjer, uzmimo graf indeksa ukupne cijene dionica u SAD-u počeši od 1871. godine.



Slika 2. Indeks cijena dionica u SAD-u 1871–2014.

Na običnoj, nelogaritamskoj skali (slika 2) ne vidimo ništa značajno, a podaci u zadnjem desetljeću izgledaju kao da fluktuiraju bez nekog reda. S druge strane, graf logaritmiranih podataka (slika 3) jasno pokazuje uzroke i posljedice velike ekonomske krize u SAD-u 1930-ih godina, kao i slične, ali ipak mnogo skromnijih razmjera, trendove u 2000-im godinama.

Slika 3. Prirodni logaritam indeksa cijena dionica u SAD-u.

[11] Uočite, cijena je ista za bazu 2 i bazu 4.

Mnogi teorijski odnosi u ekonomiji su nelinearni na nivou varijabli, ali linearni kad na jednadžbe koje ih opisuju primijenimo prirodne logaritme. Na primjer, Cobb-Douglasova funkcija koja povezuje uloženi kapital K i rad L s dobiti Q: $Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, gdje su A, α i β konstante. Ako znamo K, L i Q često je pitanje koliki su α i β. To se čini teškim za odrediti iz originalnog oblika jednadžbe, no primjenom prirodnog logaritma dobivamo mnogo jednostavniji oblik $\ln(Q) = \ln(A) + \alpha\ln(K) + \beta\ln(L)$.

Osim u ekonomiji, slični postupci provode se i za, na primjer, grafički prikaz grešaka u numeričkoj matematici.

Diferencijalni i integralni račun

Deriviranje i integriranje su operacije koje su temelj više matematike. Pojednostavnjeno, derivacija je operacija koja uzima funkciju te vraća drugu funkciju koja nam govori koji je nagib polazne funkcije. Na primjer, derivacija funkcije $\mathrm{tg}x$ je $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, funkcije x^2 je $2x$, a funkcije $\arcsin x$ je $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Derivacija funkcije e^x je e^x, i to je jedina funkcija koju derivacija ne mijenja (ako izuzmemo varijante poput $5e^x$ i slično). To znači da u svakoj točki grafa funkcije e^x vrijednost e^x je također i nagib grafa u toj točki. Na primjer, za $x = 0$, $e^x = 1$, a i nagib je 1 (to jest $45°$). Derivacija logaritamske funkcije s bazom b, $\log_b x$, je $\dfrac{1}{x\ln b}$, a kad je ta baza $b = e$ dobijemo $\dfrac{1}{x\ln b} = \dfrac{1}{x}$, što znači da prirodni logaritmi imaju mnogo jednostavniju derivaciju od logaritama s bilo kojom drugom bazom. S obzirom da je deriviranje vrlo važno u višoj matematici, računi s prirodnim logaritmima su zbog toga mnogo jednostavniji.

Integriranje je operacija suprotna deriviranju. Integral $\dfrac{1}{x}$ je $\ln x$. To za posljedicu ima da kad god želimo integrirati $\dfrac{1}{p(x)}$ gdje je $p(x)$ neki polinom (a to često trebamo u primjeni), dobit ćemo, kao rezultat, mnogo prirodnih logaritama.

Prirodni logaritmi za računanje ostalih logaritama

Pri računanju logaritama u bilo kojoj bazi, najprije računamo logaritme u bazi e, te ih zatim množimo konstantom. Naime, kada računamo $\log_b x$ u nekoj bazi b, najprije razvijemo $\log_b x$ u Maclaurinov ili Taylorov red[12]. Ti redovi zahtijevaju uzastopne derivacije $\log_b x$. Uzastopne derivacije $\log_b x$ su zapravo uzastopne derivacije $\dfrac{\log_e x}{\log_e b} = \dfrac{\ln x}{\ln b}$. S obzirom da se konstantan izraz $\dfrac{1}{\ln b}$ pojavljuje u svakom članu reda možemo ga izlučiti i dobijemo $\log_b x = \dfrac{1}{\ln b} \cdot$ (razvoj izraza $\ln x$) te zapravo računamo

[12] Razvoj u red je prikaz funkcije kao sume nekih članova po točno određenim pravilima.

razvoj od $\ln x$ i množimo ga s konstantom. Ovaj postupak također učvršćuje dojam da su prirodni logaritmi baza za sve ostale logaritme.

Literatura

[1] E. MAOR, *e: the story of a number*, Princeton University Press, 2015.

[2] R. KÓS, G. KÓS, *What makes e natural?*, KöMaL – Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools, Vol. 2, No. 1, 2004.

[3] Z. ŠIKIĆ, *Prirodni logaritmi*, Istorija matematičkih i mehaničkih nauka 4, Matematički institut, Beograd, 1990., 95–105.

[4] J. E. EVANS, *Why Logarithms to the Base e Can Justly Be Called Natural Logarithms*, National Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, Vol. 14, No. 2, 1939., 91–95.

[5] J. HAMILTON, *Use of logarithms in economics*, Econbrowser, February 2014.

[6] E. LENNON, *Exponentials, Logarithms & the Natural Log*, Lesson Transcript, `Study.com` 2016.