Cjelobrojne funkcijske jednadžbe

Ivan Soldo[1], *Katarina Vincetić*[2]

Sažetak. *Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima je nepoznanica funkcija. Rješenje takve jednadžbe je svaka funkcija koja ju zadovoljava. U radu ćemo prikazati i primjerima potkrijepiti neke metode za rješavanje funkcijskih jednadžbi s jednom i dvije nezavisne varijable.*

Uvod

Funkcijska jednadžba je posebna vrsta jednadžbe u kojoj nepoznanica nije broj, nego funkcija. Definirane na taj način, čine veliku klasu jednadžbi. Iako su diferencijalne i integralne jednadžbe ujedno i funkcijske jednadžbe, izraz "funkcijska jednadžba" obično se ne primjenjuje na jednadžbe toga tipa. Preciznije, funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima su nepoznate funkcije povezane sa zadanim funkcijama jedne ili više varijabli pomoću operacije komponiranja funkcija. Susrećemo ih već u samim počecima gimnazijskog školovanja, primjerice kod definicija parnosti, neparnosti i periodičnosti funkcija.

Prisjetimo se da za funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kažemo da je parna ako za svaki realni broj x vrijedi $f(-x) = f(x)$, a neparna ako za svaki realni broj x vrijedi $f(-x) = -f(x)$. Osim toga, za funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kažemo da je periodična ako postoji realan broj

[1] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku; e-pošta: `isoldo@mathos.hr`, Doprinos prvoga autora podržan je od strane Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta br. 6422.

[2] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku; e-pošta: `kvincetic@mathos.hr`

$P > 0$ takav da za svaki realni broj x vrijedi $f(x+P) = f(x)$. Broj P zove se period funkcije f.

Identiteti

$$f(-x) = f(x), \tag{1}$$

$$f(-x) = -f(x), \tag{2}$$

$$f(x+P) = f(x), \tag{3}$$

su funkcijske jednadžbe s jednom nezavisnom varijablom x. Rješenje funkcijske jednadžbe je svaka funkcija koja zadovoljava tu jednadžbu. Tako su neka od rješenja jednadžbe (1) funkcije

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = ax^2, \quad a \in \mathbf{R}, \quad f(x) = ux^2 + v, \quad u,\ v \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \cos x.$$

Rješenja jednadžbe (2) su primjerice funkcije

$$f(x) = x^3 + ax, \quad a \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = x + \sin x,$$

a jednadžbe (3), uz npr. $P = 2\pi$, funkcije

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \sin x + \cos x.$$

Teorija funkcijskih jednadžbi počela se razvijati prije dva stoljeća. Unatoč tome, danas se zna vrlo malo općih metoda za rješavanje tih jednadžbi. Ne postoje čak ni opći kriteriji egzistencije niti jedinstvenosti rješenja. Mnoge funkcijske jednadžbe ni do danas nisu riješene.

Prvi primjeri funkcijskih jednadžbi susreću se već u radovima J. B. d'Alemberta, L. Eulera i J. L. Lagrangea iz 18. i 19. stoljeća (v. [1, 6]). Opću je teoriju prvi pokušao razviti francuski matematičar G. Monge (v. [1]), poznat kao osnivač nacrtne geometrije, koji je 1773. godine osjetio potrebu za rješavanjem funkcijskih jednadžbi prilikom svojih istraživanja u teoriji ploha. Poseban interes za funkcijske jednadžbe pojavio se 1821. godine kada je francuski matematičar A. L. Cauchy (v. [6]) riješio jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Ovo je funkcijska jednadžba s dvije nezavisne varijable x i y na koju je d'Alembert 1769. godine sveo zasnivanje zakona slaganja sila poznatog kao d'Alembertov princip[3]. Cauchy se bavio i drugim tipovima jednadžbi pa je tako riješio funkcijske jednadžbe oblika

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{4}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Stoga se jednadžba (4) i zove Cauchyjeva funkcijska jednadžba. Funkcijske jednadžbe koristio je u svojim radovima i veliki ruski matematičar N. I. Lobačevski, osnivač jedne grane neeuklidske geometrije, tzv. hiperboličke geometrije, gdje je definirao kut paralelnosti kao rješenje funkcijske jednadžbe

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}.$$

Mnoge funkcijske jednadžbe riješio je i poznati norveški matematičar N. H. Abel (v. [1, 6]), koji je njihovo rješavanje sveo na rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Tu se uvodi

[3] Sve vanjske sile koje djeluju na česticu u ravnoteži su sa silom inercije.

jedna velika pretpostavka na funkciju f, a to je da ona mora biti diferencijabilna. Ipak, takve se pretpostavke obično postavljaju sa zadrškom, pokušavajući ih ukloniti ukoliko nisu nužne za dokaz dobivenog rezultata.

Funkcijske jednadžbe mogu se konstruirati na razne načine. Jedan od najpoznatijih temelji se na korištenju algebarskih identiteta.

Za sve realne brojeve x vrijedi

$$(1-x)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

a to nas vodi na funkcijsku jednadžbu

$$f(1-x) = f(x) - 2x + 1,$$

kojoj je jedno rješenje funkcija $f(x) = x^2$.

Osim toga, za bilo koje realne brojeve a i b vrijedi

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab. \tag{5}$$

Stavimo li $f(t) = t^2$, tada iz (5) dobivamo

$$f(a+b) - f(a-b) = 4ab.$$

Uz uobičajene oznake $x = a$, $y = b$ za varijable, dobivamo funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy,$$

za koju smo sigurni da ima barem jedno rješenje, funkciju $f(x) = x^2$.

Kroz prethodnu analizu može se zaključiti da funkcijske jednadžbe dolaze s barem jednom nezavisnom varijablom. Stoga ćemo u sljedećim poglavljima proučiti neke od metoda za rješavanje funkcijskih jednadžbi s jednom i dvije nezavisne varijable. Veliki izbor korisnih primjera i zadataka može se pronaći npr. u [7].

Funkcijske jednadžbe s jednom nezavisnom varijablom

Iako je dostupna velika količina literature o teoriji funkcijskih jednadžbi, izdan je mali broj knjiga o samom rješavanju funkcijskih jednadžbi. Također se zna vrlo malo općih metoda za njihovo rješavanje. Neke od njih mogu se vidjeti npr. u [3, 4, 5, 8]. U ovom poglavlju navest ćemo, i primjerima potkrijepiti, najčešće metode za rješavanje funkcijskih jednadžbi s jednom nezavisnom varijablom.

Metoda zamjene varijable

Ovu metodu primjenjujemo tako da jednu varijablu zamijenimo drugom, pri čemu moramo paziti da domena originalne varijable ne smije biti promijenjena. Tako dobijemo novu funkcijsku jednadžbu iz koje lakše pronađemo nepoznatu funkciju. Pokažimo to na primjerima:

Primjer 1. *Odredite sve funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f(x-5) = x^2 - 10x + 16, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Rješenje. Uvedimo zamjenu $t = x - 5$. Onda je $x = t + 5$. Uvrštavanjem u (6) dobivamo

$$f(t) = (t+5)^2 - 10(t+5) + 16 = t^2 - 9.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$f(x)=x^2-9, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Provjerimo zadovoljava li funkcija (7) jednadžbu (6):

$$f(x-5)=(x-5)^2-9=x^2-10x+25-9=x^2-10x+16.$$

□

Primjer 2. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1+9x^2}{x^2}-\frac{6}{x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}. \tag{8}$$

Rješenje. Ako stavimo $t=\dfrac{x-1}{x}$, onda je $x=\dfrac{1}{1-t}$, pa uvrštavanjem u (8) dobivamo

$$f(t)=\frac{1+9\left(\frac{1}{1-t}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-t}\right)^2}-\frac{6}{\frac{1}{1-t}}=(t+2)^2$$

i zaključujemo

$$f(x)=(x+2)^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}. \tag{9}$$

Zaista,

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\left(\frac{x-1}{x}+2\right)^2=\left(\frac{3x-1}{x}\right)^2=\frac{9x^2-6x+1}{x^2}=\frac{1+9x^2}{x^2}-\frac{6}{x}.$$

□

Dakle, direktnom provjerom lako se možemo uvjeriti jesmo li točno riješili dani problem. Nadalje, taj ćemo dio ostaviti za samostalan rad.

Ponekad je nakon jedne zamjene varijable potrebno ponoviti postupak uvodeći novu zamjenu i taj postupak ponavljamo dok ne dođemo do sustava jednadžbi. U tom slučaju nepoznatu funkciju nalazimo tako da riješimo dobiveni sustav.

Primjer 3. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ *takve da vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2-x}{1-x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}. \tag{10}$$

Rješenje. Stavimo $t=\dfrac{1}{1-x}$. Tada je $x=\dfrac{t-1}{t}$, pa uvrštavanjem u (10) dobivamo

$$f(t)+f\left(\frac{t-1}{t}\right)=t+1$$

i zaključujemo da vrijedi

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1, \quad \forall x \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}. \tag{11}$$

Nadalje, uvedimo zamjenu $t=\dfrac{x-1}{x}$. Onda je $x=\dfrac{1}{1-t}$. Analogno, uvrštavanjem u (10) dobivamo

$$f\left(\frac{t-1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{2t-1}{t}.$$

tj.

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x},\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}. \tag{12}$$

Jednadžbe (10), (11) i (12) čine sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice: $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ i $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Rješavajući navedeni sustav dobivamo

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)},\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}. \tag{13}$$

Direktnim uvrštavanjem dobivamo da funkcija (13) zadovoljava jednadžbu (10).

□

Sljedeći primjer pojavio se na Australskoj matematičkoj olimpijadi 1992. godine. Zanimljivo je da ga je tek 6 od 105 sudionika potpuno riješilo i da je prosjek bodova na ovom zadatku bio 2.1 (od njih maksimalnih 7).

Primjer 4. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbf{R}$ *za koje je*

$$498x-f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right),\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}. \tag{14}$$

Rješenje. Uvedimo zamjenu $t=\frac{2x}{3x-2}$. Onda je $x=\frac{2t}{3t-2}$. Uvrštavanjem u (14) dobivamo

$$498\cdot\frac{2t}{3t-2}-f\left(\frac{2t}{3t-2}\right)=\frac{1}{2}f(t).$$

Zaključujemo

$$498\cdot\frac{2x}{3x-2}-f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1}{2}f(x),\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}. \tag{15}$$

Rješavajući sustav jednadžbi (14) i (15) slijedi

$$f(x)=\frac{1992x(x-1)}{3x-2},\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}. \tag{16}$$

Nije teško provjeriti da je funkcija (16) rješenje jednadžbe (14).

□

Zadatak 1. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *takve da je*

$$2f(x)+xf(1-x)=1,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Zadatak 2. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\setminus\{-3\}\to\mathbf{R}$ *takve da je*

$$f\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)=\frac{x-4}{x+3}+5,\quad \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-3\}.$$

Ovu metodu koristimo kada znamo da nepoznata funkcija zadovoljava određene uvjete, npr. kvadratna je ili kubna. Tada nepoznatu funkciju odmah možemo zapisati u tom obliku. Primjerice, ako znamo da je nepoznata funkcija kvadratna funkcija, onda je možemo zapisati kao $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tada nam se rješavanje funkcijske jednadžbe svodi na određivanje nepoznatih koeficijenata te funkcije koja je rješenje zadane funkcijske jednadžbe.

Primjer 5. *Odredite sve kubne funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f(x) - f(x+1) = 3x^2 + 7x, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{17}$$

ako znamo da je $f(0) = 5$.

Rješenje. Kako znamo da je nepoznata funkcija kubna funkcija možemo pisati

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{18}$$

Uvrštavanjem (18) u (17) imamo

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d - a(x+1)^3 - b(x+1)^2 - c(x+1) - d &= 3x^2 + 7x \\ -3ax^2 + (-3a - 2b)x - a - b - c &= 3x^2 + 7x \end{aligned}$$

i dobivamo $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$. Uvrštavanjem uvjeta $f(0) = 5$ u (18) dobivamo $d = 5$. Zaključujemo

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x + 5, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{19}$$

Direktnom provjerom vidimo da funkcija (19) zadovoljava jednadžbu (17). $\square$

Primjer 6. *Odredite sve polinome* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f(x+2)f(x-2) = f(f(2x)), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{20}$$

Rješenje. Potrebno je najprije odrediti stupanj traženog polinoma. Neka je $d = \operatorname{st} f$. Kako za proizvoljne polinome u, v vrijedi $\operatorname{st}(uv) = \operatorname{st} u + \operatorname{st} v$ i $\operatorname{st}(u \circ v) = \operatorname{st} u \cdot \operatorname{st} v$, lijeva strana funkcijske jednadžbe (20) je stupnja $2d$, dok je desna strana stupnja d^2. Prema tome, dobivamo jednadžbu $2d = d^2$ iz koje je $d = 0$ ili $d = 2$.

Ako je $d = 0$, rješenje funkcijske jednadžbe je polinom $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Kada to uvrstimo u (20) dobivamo da su jedini polinomi nultog stupnja koji zadovoljava tu funkcijsku jednadžbu $f(x) = 0$ ili $f(x) = 1$.

Ako je $d = 2$, rješenje funkcijske jednadžbe je polinom $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}$. Uvrštavanjem u (20) dobivamo da je polinom $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{3}$ jedini polinom drugog stupnja koji zadovoljava tu funkcijsku jednadžbu.

Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x) = 0, \tag{21}$$

$$f(x) = 1 \tag{22}$$

ili

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{1}{3}. \tag{23}$$

Provjerimo zadovoljavaju li polinomi (21), (22) i (23) jednadžbu (20). Redom imamo:

$$f(x+2)f(x-2) = 0 = f(f(2x)),$$
$$f(x+2)f(x-2) = 1 = f(f(2x)),$$
$$\begin{aligned} f(x+2)f(x-2) &= \left(\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{x^4}{256}+\frac{x^2}{96}+\frac{49}{144} = f(f(2x)). \end{aligned}$$

$\square$

Napomena 1. Funkcijske jednadžbe čije je rješenje polinom nazivaju se polinomske jednadžbe (v. [6, 7]).

Zadatak 3. *Odredite sve polinome $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ trećeg stupnja takve da je*

$$f(3x+2) - f(-x) = 28x^3 + 30x^2 + 4x - 2, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

ako je $f(0) = 1$.

Zadatak 4. *Odredite sve polinome $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je*

$$f(x+1) = f(f(x-1)), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Funkcijske jednadžbe s dvije nezavisne varijable

Funkcijske jednadžbe predstavljaju pogodan sadržaj za razvijanje stvaralačkih mogućnosti učenika i upravo zbog toga pojavljuju se na najvišoj razini matematičkih natjecanja za učenike srednjih škola. Određena metoda za rješavanje funkcijskih jednadžbi može funkcionirati u jednom primjeru, ali ne i u drugom. Dakle, najbolji način da se postane bolji u rješavanju zadataka tog tipa je riješiti što veći broj primjera. U ovom poglavlju prikazat ćemo jednu od najčešćih metoda za rješavanje funkcijskih jednadžbi s dvije nezavisne varijable.

Metoda supstitucije

Bit metode sastoji se u tome da se u zadanu funkcijsku jednadžbu uvrste neke posebne vrijednosti varijabli (npr. neke uobičajene vrijednosti koje se uvrštavaju su: $x = 0$, $x = 1$, $x = y = 0$, itd.), ali tako da se dobije jednadžba iz koje je moguće odrediti traženu funkciju. To je dozvoljeno napraviti, jer se kod funkcijskih jednadžbi često spominje kako neke jednakosti vrijede za sve x i y iz domene funkcije. Ako vrijede za sve, onda vrijede i za posebne vrijednosti od x i y. Uvrštavanjem njih postupno sužavamo skup mogućih funkcija koje su rješenje dane jednadžbe. Na kraju provjerom utvrđujemo koje su funkcije zaista rješenja zadane jednadžbe.

Primjer 7. *Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da vrijedi*

$$2f(x+y) + f(x-y) - 5f(x) + xf(y) = 3y^2 - 2x^2 + 2xy + xy^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

Rješenje. Ako u (24) uvrstimo $y = 0$, dobivamo

$$-2f(x) + xf(0) = -2x^2,$$

odnosno

$$f(x) = x^2 + \frac{f(0)}{2}x.$$

Odavde zaključujemo

$$f(x) = x^2 + \frac{c}{2}x, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{25}$$

gdje je $c = f(0) \in \mathbf{R}$.

Treba još odrediti c tako da (25) bude rješenje od (24). Uvrstimo li sada (25) u (24) dobivamo

$$c\left(-x + \frac{y}{2} + \frac{xy}{2}\right) = 0.$$

Kako ova jednakost mora vrijediti za sve realne brojeve x i y, to slijedi $c = 0$ pa je

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{26}$$

rješenje jednadžbe (24).

Provjerom se pokaže da funkcija (26) zaista zadovoljava jednadžbu (24). $\square$

Kako bi došli do traženog rješenja, u nekim slučajevima bit će potreban veći broj uvrštavanja posebnih vrijednosti za nepoznanicu. Sljedeći primjer je upravo takav.

Primjer 8. *Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da vrijedi*

$$f(y^2 + f(x)) = x + yf(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{27}$$

Rješenje. Uvrštavanjem $y = 0$, iz (27) dobivamo $f(f(x)) = x$, za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa vrijedi

$$f(x + yf(y)) = f(f(y^2 + f(x))) = y^2 + f(x). \tag{28}$$

Sada u (28) zamijenimo y s $f(y)$ i dobivamo $f(x + f(y)f(f(y))) = (f(y))^2 + f(x)$. Kako je $f(f(x)) = x$, dobivamo

$$f(x + yf(y)) = (f(y))^2 + f(x). \tag{29}$$

Iz usporedbe (28) i (29) je

$$(f(y))^2 = y^2. \tag{30}$$

Sada u jednadžbi (27) zamijenimo x s $f(x)$ i dobivamo

$$f(y^2 + x) = f(x) + yf(y).$$

Kvadriranje obje strane prethodne jednakosti daje nam

$$\begin{aligned}(y^2 + x)^2 &= (f(y^2 + x))^2\\ &= (f(x) + yf(y))^2\\ &= (f(x))^2 + 2yf(y)f(x) + y^2(f(y))^2\\ &= x^2 + 2yf(x)f(y) + y^4.\end{aligned}$$

Iz toga imamo

$$xy = f(x)f(y). \tag{31}$$

Zbog (30) vrijedi $f(y) = y$ ili $f(y) = -y$.

Ako je $f(y) = y$, iz (31) slijedi $f(x) = x$.

Ako je $f(y) = -y$, slijedi $f(x) = -x$.

Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x) = x \tag{32}$$

ili

$$f(x) = -x. \tag{33}$$

Nije teško provjeriti kako su funkcije (32) i (33) rješenja jednadžbe (27). □

Iako su vrlo česte na državnim natjecanjima iz matematike za učenike četvrtih razreda srednjih škola (v. [2, 7]), funkcijske jednadžbe su relativno teško i manje popularno područje istraživanja. To je uglavnom zbog toga što rješenje funkcijske jednadžbe uvelike ovisi o tome što znamo o funkciji, tj. rješenju koje tražimo. Ponekad nije lako odrediti kako početi rješavati dani zadatak. Sljedeći primjeri pojavili su se na državnim natjecanjima iz matematike za učenike četvrtih razreda srednje škole, A-varijanta.

Primjer 9. (Državno natjecanje iz matematike, Trogir, 2015.)

Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{34}$$

Rješenje. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (34) dobivamo $f(0) = 0$. Nadalje, ako je $x = y = 1$, iz (34) dobivamo $(f(1))^2 = f(1)$, pa razlikujemo dva slučaja: $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$.

Neka je $f(1) = 0$. Za $x = 1$ iz (34) dobivamo $f(y) = 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$.

Ako je $f(1) = 1$, u (34) uvrstimo $y = 1$ i dobivamo $xf(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Za $x \neq 0$ dijeljenjem prethodno dobivenog s x dobivamo $f(x) = x$. Kako je i $f(0) = 0$, slijedi $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Zaključujemo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x) = 0 \tag{35}$$

ili

$$f(x) = x. \tag{36}$$

Direktnom provjerom pokaže se da funkcije (35) i (36) zadovoljavaju jednadžbu (34). □

Primjer 10. (Državno natjecanje iz matematike, Opatija, 2011.)

Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *takve da vrijedi*

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{37}$$

Rješenje. Uvrstimo $x = 0$ u (37). Dobivamo $f(f(y)) = y$, za svaki $y \in \mathbf{R}$, pa vrijedi

$$f(y - x^2) = f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y). \tag{38}$$

Uvrštavanjem u (38) $y = x^2$ i $y = 0$ imamo

$$f(x^2) = -x^2 + f(0),$$

odnosno

$$f(-x^2) = x^2 + f(0).$$

Zaključujemo

$$f(x) = -x + c, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{39}$$

gdje je $c = f(0) \in \mathbf{R}$.

Treba još odrediti c tako da (39) bude rješenje od (37). Uvrstimo li sada (39) u (37) dobivamo

$$\begin{aligned}
-x^2 - f(y) + c &= y - x^2 \\
-x^2 + y - c + c &= y - x^2 \\
-x^2 + y &= -x^2 + y.
\end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = -x + c$ je traženo rješenje za svaki $c \in \mathbf{R}$. □

Sljedeći primjer pojavio se na Poljskoj matematičkoj olimpijadi 1990. godine. Poseban je jer se prilikom njegovog rješavanja primijenjuju i metoda zamjene varijable opisana u drugom poglavlju i metoda supstitucije.

Primjer 11. (41. Poljska matematička olimpijada, Varšava, 1990.)
Odredite sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da vrijedi

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{40}$$

Rješenje. Ako stavimo $u = x + y$ i $v = x - y$ dobivamo

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad xy = \frac{1}{4}(u^2 - v^2),$$
$$x^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2uv + v^2), \quad y^2 = \frac{1}{4}(u^2 - 2uv + v^2).$$

Uvrštavanjem u (40) dobivamo

$$vf(u) - uf(v) = (u^2 - v^2)uv.$$

Za $u \neq v$ posljednju jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2. \tag{41}$$

Uvedimo sada novu funkciju

$$g(u) = \frac{f(u)}{u}, \quad u \neq 0. \tag{42}$$

Iz (41) imamo

$$g(u) - g(v) = u^2 - v^2. \tag{43}$$

Dobili smo jednadžbu koju možemo riješiti metodom supstitucije. Stavimo u (43) $v = 1$, $g(1) = c + 1$, $c \in \mathbf{R}$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
g(u) - (c+1) &= u^2 - 1 \\
g(u) &= u^2 + c.
\end{aligned}$$

Primjenom (42) dobivamo $f(u) = u^3 + cu$. Zaključujemo da vrijedi

$$f(x) = x^3 + cx, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{44}$$

Treba još odrediti c tako da (44) bude rješenje od (40). Uvrstimo li (44) u (40), redom imamo

$$\begin{aligned}
(x-y)[(x+y)^3 + c(x+y)] - (x+y)[(x-y)^3 + c(x-y)] &= 4xy(x^2 - y^2) \\
(x^2 - y^2)[x^2 + 2xy + y^2 + c] - (x^2 - y^2)[x^2 - 2xy + y^2 + c] &= 4xy(x^2 - y^2) \\
(x^2 - y^2)[x^2 + 2xy + y^2 + c - x^2 + 2xy - y^2 - c] &= 4xy(x^2 - y^2) \\
(x^2 - y^2)4xy &= 4xy(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

Prema tome, $f(x) = x^3 + cx$ je rješenje jednadžbe (40), za svaki $c \in \mathbf{R}$. □

Zadatak 5. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *takve da je*
$$f(x+3y)+2f(x-y)+f(x)+8f(y)=4x+9y,\quad \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

Zadatak 6. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *takve da je*
$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y},\quad \forall x,y\in\mathbf{R},\quad x+y\neq 0.$$

Zadatak 7. *Odredite sve funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *za koje je* $f(2016)=1$ *i*
$$f(x)f(y)=f(x-y),\quad \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

Literatura

[1] J. ACZÉL, *Lectures of Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1966.

[2] A. HORVATEK, *Natjecanja iz matematike u RH*, 2008, dostupno na `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`

[3] *Mathematical Database*, *Functional equations*, 2007, dostupno na `http://db.math.ust.hk/notes_download/elementary/algebra/ae_A9.pdf`

[4] V. MAVREK, P. VUKOVIĆ, *Funkcijske jednadžbe*, Poučak **30** (2007), 5–8.

[5] M. PAVLEKOVIĆ, *Metodika nastave matematike s informatikom 2*, Element, Zagreb, 1999.

[6] C. G. SMALL, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, New York, 2007.

[7] T. TADIĆ, *Pripreme za matematička natjecanja za 4. razred gimnazije*, Element, Zagreb, 2014.

[8] Ž. ZRNO, *Funkcijske jednadžbe i cikličke grupe*, Poučak **48** (2011), 29–40.