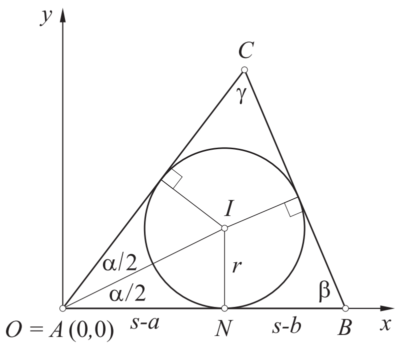
Još o udaljenostima karakterističnih točaka trokuta

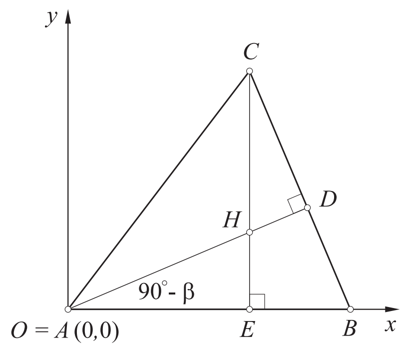
Dragoljub Milošević, Aleksandar Sredojević[1]

U MFL-u br. 3/ 255, str. 163–168, određene su udaljenosti težišta (G), ortocentra (H) i središta upisane kružnice (I) od središta opisane kružnice (O) trokuta ABC[2]. Ovdje ćemo se pozabaviti određivanjem dviju udaljenosti, $|IH|$ i $|IG|$, šiljastokutnog trokuta.

a) Primijenit ćemo metodu koordinata i upotrijebiti Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u vrhu A i apcisom AB (slika 1). Neka je $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle BCA = \gamma$. S R i r označimo duljine radijusa opisane i upisane kružnice trokuta ABC. Lako se određuju koordinate središta upisane kružnice (v. $\triangle ION$ na slici 1): $I(s-a, r)$.



Slika 1.



Slika 2.

Iz pravokutnog trokuta ACE sa slike 2 dobivamo $|AE| = b\cos\alpha$, a iz pravokutnog trokuta AEH: $\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \dfrac{|HE|}{|AE|}$, tj. $|HE| = |AE|\operatorname{ctg}\beta$. Odavde zbog $|AE| = b\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$ i $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$, imamo $|HE| = 2R\cos\alpha\cos\beta$. Prema tome, koordinate ortocentra trokuta ABC su $H(b\cos\alpha, 2R\cos\alpha\cos\beta)$.

Sada je

$$\begin{aligned}|IH|^2 &= ((s-a) - b\cos\alpha)^2 + (r - 2R\cos\alpha\cos\beta)^2\\ &= (s-a)^2 - 2b(s-a)\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + r^2 - 4rR\cos\alpha\cos\beta + 4R^2\cos^2\alpha\cos^2\beta.\end{aligned}$$

Radi

$$b^2 + 4R^2\cos^2\beta = b^2 + 4R^2(1-\sin^2\beta) = b^2 + 4R^2 - (2R\sin\beta)^2 = b^2 + 4R^2 - b^2 = 4R^2,$$

dobivamo

$$|IH|^2 = (s-a)^2 - 2b(s-a)\cos\alpha + 4R^2\cos^2\alpha - 4rR\cos\alpha\cos\beta + r^2.$$

[1] Autori su profesori matematike u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

[2] Korištena je potencija karakterističnih točaka u odnosu na opisanu kružnicu trokuta.

Nadalje, korištenjem teorema o kosinusima i sinusima, adicione formule za kosinus zbroja i formula za površinu trokuta dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
|IH|^2 &= s^2-2as+a^2-2b(s-a)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+4R^2(1-\sin^2\alpha)-4Rr(\cos(\alpha+\beta)\\
&\quad+\sin\alpha\sin\beta)+r^2\\
&= s(s-2a)+a^2-\frac{1}{2c}(b+c-a)(b^2+c^2-a^2)+4R^2-a^2+4Rr\cos\gamma-4Rr\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}+r^2\\
&= s^2-a(a+b+c)-\frac{1}{2c}(b+c-a)(b^2+c^2-a^2)+4Rr\cos\gamma-\frac{r}{R}\cdot ab+r^2+4R^2\\
&= s^2-a^2-ab-ac-\frac{1}{2c}(b+c-a)(b^2+c^2-a^2)+4\cdot\frac{abc}{4P}\cdot\frac{P}{s}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\
&\quad-\frac{\frac{P}{s}}{\frac{abc}{4P}}ab+r^2+4R^2\\
&= s^2-a^2-ab-ac-\frac{(b+c-a)}{2c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2s}-\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{c}\\
&\quad+r^2+4R^2.
\end{aligned}$$

Odavde, zbog

$$\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2s}=\frac{c}{2s}(a+b+c)(a+b-c)-\frac{abc}{s}=c(a+b-c)-4Rr,$$

$$\frac{b+c-a}{2c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{c}=2b(s-a)=b(-a+b+c)$$

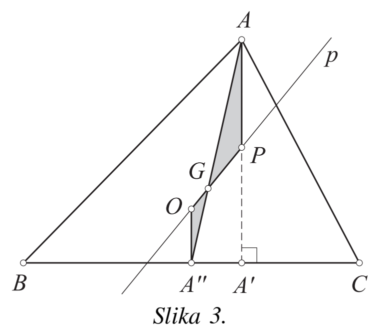
$a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$ (v. MFL br. 3/ 255, str. 174), dobijemo

$$\begin{aligned}
|IH|^2 &= s^2-a^2-ab-ac-b(-a+b+c)+c(a+b-c)-4Rr+r^2+4R^2\\
&= s^2-(a^2+b^2+c^2)-4Rr+r^2+4R^2\\
&= -s^2+4R^2+4Rr+3r^2,
\end{aligned}$$

tj.

$$|IH|=\sqrt{4R^2+4Rr+3r^2-s^2}. \tag{1}$$

b) Najprije konstruirajmo pravac $p(O,G)$ koji siječe visinu $\overline{AA'}$ u točki P (slika 3). Neka je točka A'' polovište stranice $\overline{BC}$. S obzirom da je $\sphericalangle A''GO=\sphericalangle AGP$ i $\sphericalangle OA''G=\sphericalangle GAP$ trokuti $A''GO$ i AGP su slični, odakle je $|GP|:|OG|=|GA|:|GA''|$. Kako je $|GA|:|GA''|=2$ (svojstvo težišta) dobijemo $|GP|:|OG|=2$. Sada dokažimo da je točka P ortocentar trokuta ABC. Pretpostavimo suprotno, tj. da pravac p siječe preostale dvije visine u točkama različitim od P.



Slika 3.

Tada bi postojale barem dvije različite točke pravca p na istoj strani od težišta i na istoj udaljenosti, što je nemoguće. Time potvrđujemo da točka P pripada svakoj od visina, tj. da je ona ortocentar trokuta. To znači da se točke P i H podudaraju. Zaključak: *Točke* O (središte opisane kružnice), G (težište) i H (ortocentar) *su kolinearne, pri čemu vrijedi jednakost* $|GH| : |OG| = 2$ (Eulerov teorem)[3].

Sada odredimo udaljenost točaka G i I, tj. duljinu $|GI|$. Stewartov teorem glasi: *Ako je D točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC, $|CD| = d$, $|AD| = m$ i $|BD| = n$, tada vrijedi jednakost $c(mn + d^2) = a^2m + b^2n$ (njegov dokaz nalazi se u MFL-u br. 1/257, str. 36). Primjenom ovog teorema na ΔIOH dobivamo*

$$|OH| \cdot (|GO| \cdot |GH| + |GI|^2) = |OI|^2 \cdot |GH| + |IH|^2 \cdot |GO|.$$

Odavde, radi $|GO| = \frac{1}{3}|OH|$ i $|GH| = \frac{2}{3}|OH|$ (Eulerov teorem), slijedi

$$|GI|^2 = \frac{2}{3}|OI|^2 + \frac{1}{3}|IH|^2 - \frac{2}{9}|OH|^2. \tag{2}$$

U MFL-u br. 3/ 255, str. 164–165, dane su jednakosti

$$|GO|^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \qquad \text{i} \qquad |OI|^2 = R^2 - Rr.$$

Kako je $|OH| = 3 \cdot |GO|$ imamo

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2 + 2r(4R + r) - 2s^2.$$

Uvrštavanjem jednakosti za $|IH|^2$, $|OI|^2$ i $|OH|^2$ u (2) dobivamo

$$|GI|^2 = \frac{2}{3}(R^2 - 2Rr) + \frac{1}{3}(-s^2 + 4R^2 + 4Rr + 3r^2) - \frac{2}{9}(9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2),$$

odakle je $|GI|^2 = \frac{1}{9}(s^2 - 16Rr + 5r^2)$, tj.

$$|GI| = \frac{1}{3}\sqrt{s^2 - 16Rr + 5r^2}. \tag{3}$$

Napomena 1. S obzirom da je $|IH|^2 \geqslant 0$ i $|GI|^2 \geqslant 0$ iz (1) i (3) slijedi

$$r(16R - 5r) \leqslant s^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + r^2,$$

što predstavlja dvojnu nejednakost 5.8 iz [2].

Na kraju preporučujemo čitateljima da provjere točnost nejednakosti $|OH|^2 - |OI|^2 \geqslant 2 \cdot |IH|^2$.

Napomena 2. Navedene nejednakosti vrijede i za tupokutan trokut.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters–Noordhoff, Groningen, 1969.

[3] Pravac određen tim trima točkama naziva se *Eulerov pravac*, jer je kolinearnost točaka O, G i H prvi dokazao veliki švicarski matematičar Leonard Euler (1707. – 1783.).