ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2017. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/268.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadaci iz matematike

3553. Neka je x, y, z cjelobrojno rješenje jednadžbe $x^3+y^3=z^3$. Dokaži da je barem jedan od ova tri broja djeljiv sa 7.

3554. Realni brojevi x u y zadovoljavaju sistem jednadžbi

$$x+y+\frac{x}{y}=10$$
$$\frac{x}{y}(x+y)=20.$$

Odredi zbroj svih mogućih vrijednosti izraza $x+y$.

3555. Ako su a, b, c cijeli brojevi takvi da je $a+b+c=0$, dokaži da je $2(a^4+b^4+c^4)$ kvadrat cijelog broja.

3556. Odredi parametar a takav da rješenja jednadžbe

$$x^2-(3a+1)x+(2a^2-3a-2)=0$$

budu realna i zbroj njihovih kvadrata minimalan.

3557. Ako su a, b, c poztivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$ dokaži nejednakost

$$ab+bc+ca\geq 9abc.$$

3558. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c, za koje je $a+b+c=1$, vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{1}{a^2}+1\right)\left(\frac{1}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{c^2}+1\right)\geq 1000.$$

3559. Dokaži da za svaki prirodan broj $n\geq 2$ vrijedi

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

3560. U pravokutnom trokutu ABC točka K je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Točka M je na stranici $\overline{AC}$ tako da je $|AM|=2|MC|$. Dokaži da je $\sphericalangle MBA=\sphericalangle MKC$.

3561. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, tetivnog četverokuta $ABCD$ duljina stranica redom a, b, c, d, s vanjske strane su konstruirani pravokutnici $a\times c$, $b\times d$, $c\times a$, $d\times b$. Dokaži da su središta tih pravokutnika vrhovi pravokutnika.

3562. Dani su pravilni šesterokuti $ABCDEF$ i $CGHJKL$ tako da je vrh C na pravcu FJ. Kružnica opisana trokutu BCG siječe pravac FJ u točki O. Dokaži da je O polovište dužine $\overline{FJ}$.

3563. Kutovi trokuta ABC su u omjeru $\alpha:\beta:\gamma=1:(k+1):(k+3)$, $k\in\mathbf{R}_+$. Dokaži da za njegove stranice vrijedi $a^2+bc=c^2$.

3564. Ako su a_1, $a_2,\ldots,a_n$ realni brojevi, dokaži

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ij\cos(a_i-a_j)\geq 0.$$

3565. Dokaži da Fibonaccijevi brojevi zadovoljavaju identitet

$$F_{m+n+1}=F_{m+1}F_{n+1}+F_mF_n,\quad m,n\geq 0.$$

3566. Dokaži da se spajanjem tri vrha pravilnog tetraedra s polovištem visine iz četvrtog, dobiju tri u parovima okomita pravca.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 414. Električni bojler je za jedan sat ugrijao 50 litara vode od $20\,^\circ\mathrm{C}$ na $50\,^\circ\mathrm{C}$. Struja koja je tekla kroz njega iznosila je 8.7 ampera. Kolika je korisnost bojlera? Napon gradske mreže je 230 volti.

OŠ – 415. Vozač je utvrdio da mu put od Zagreba do njegove kuće za odmor traje 20 minuta dulje kad mu je prosječna brzina 54 km/h, nego kad je 72 km/h. Koliko je kuća za odmor udaljena od Zagreba?

OŠ – 416. U posudu s pola litre vode temperature $20\,^\circ\mathrm{C}$ je stavljeno tijelo mase 300 grama kojem je specifični toplinski kapacitet 5 puta manji od specifičnog toplinskog kapaciteta vode. Temperatura vode u posudi se nakon toga podigla na $35\,^\circ$C. Kolika je bila početna temperatura tijela?

OŠ – 417. Na visini h tijelo ima potencijalnu energiju 1000 džula, a kinetičku 500 džula. Kolika će biti njegova kinetička energija na četiri puta manjoj visini ako zbog otpora zraka izgubi 20 posto ukupne energije?

1630. Predmet klizi niz kosinu nagiba 28°. Iz stanja mirovanja, predmet stigne do dna kosine. Pritom se 40% početne energije pretvori u kinetičku energiju predmeta, a 60% se trenjem pretvori u toplinu. Odredi koeficijent trenja.

1631. Brzina nekog kometa oko Sunca iznosi 40 km/s kad je komet najbliži Suncu (perihel), a 3.5 km/s kad je najdalje od Sunca (ahel). Odredi period kometa i numerički ekscentricitet njegove putanje. Masa Sunca je $M = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg.

1632. Punjač za mobitel napuni praznu bateriju mobitela za 90 minuta. Kolika je njegova prosječna snaga punjenja, ako baterija ima kapacitet 1.8 amper sati i napon 3.7 V, uz 75%-tnu iskoristivost energije punjenja?

1633. Na kojoj je udaljenosti od Sunca njegov sjaj toliko malen da odgovara sjaju punog mjeseca gledanog sa Zemlje? Udaljenost izrazi u astronomskim jedinicama. Pun mjesec ima 14 magnituda manji sjaj od Sunca, gledano sa Zemlje.

1634. Kad na bateriju napona 24 V priključimo otpornik od 2 Ω, napon baterije padne na 20 V. Kolika je struja kratkog spoja baterije? Koliku snagu baterija troši, a koliku predaje navedenom otporniku? Izrazi korisnost u %.

1635. Prsten i disk jednakog promjera i jednake mase kotrljaju se bez klizanja jednakom linearnom brzinom. Kolika je kinetička energija diska ako je kinetička energija prstena 1 J?

1636. Dva različita radioaktivna izvora imaju jednaku početnu aktivnost (u broju raspada u sekundi, Becquerelima). Nakon 5 sati, prvi izvor ima 40% veću aktivnost od drugog. Kolika su vremena poluraspada tih izvora, ako prvi ima točno 10 sati dulje vrijeme poluraspada od drugog?

C) Rješenja iz matematike

3525. *Nađi sva rješenja sistema jednadžbi:*

$$x^2 - y = z^2$$
$$y^2 - z = x^2$$
$$z^2 - x = y^2.$$

Rješenje. Zbrajanjem svih triju jednadžbi dobivamo:

$$x + y + z = 0 \implies z = -(x + y).$$

Iz prve jednadžbe tada slijedi

$$y = x^2 - z^2 = (x - z)(x + z) = -y(2x + y)$$
$$\iff y(2x + y + 1) = 0.$$

Imamo sada dva slučaja.

1° $y = 0 \implies z = -x$ i uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $x = x^2$.

Odavde su dva rješenja:

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, -1)\}.$$

2° $2x + y + 1 = 0$. Uvjet $z = -(x + y)$ i druga jednadžba povlače

$$x + y = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$\iff (x + y)(x - y - 1) = 0.$$

Ako je $x + y = 0$ onda $x = -1 \implies y = 1$, $z = 0$, a ako je $x - y - 1 = 0$ onda je $x = 0$, $y = -1 \implies z = 1$.

Dakle sva rješenja sistema jednadžbi su

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, -1), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}.$$

Zlatko Petolas (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3526. *Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi takvi da je $a_i \geq -\frac{1}{4}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dokaži nejednakost*

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \ldots + \sqrt{4a_n + 1} \leq n + 2.$$

Rješenje. Iz A-G nejednakosti $2xy \leq x^2 + y^2$ imamo

$$\sqrt{4a_i + 1} = 1 \cdot \sqrt{4a_i + 1} \leq \frac{1 + (\sqrt{4a_i + 1})^2}{2}$$
$$= 2a_i + 1, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zbrajanjem obje strane ovih nejednakosti slijedi tvrdnja.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3527. *Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje vrijedi*

$$(a^3+b)(a+b^3)=(a+b)^4.$$

Rješenje. Množenjem faktora na lijevoj strani i razvojem desne strane slijedi:

$$a^3b^3+ab=4a^3b+6a^2b^2+4ab^3$$

$$\iff a^3b^3+2a^2b^2+ab=4a^3b+8a^2b^2+4ab^3$$

$$\iff ab(ab+1)^2=4ab(a+b)^2$$

$$\iff ab\left[(ab+1)^2-4(a+b)^2\right]=0.$$

Ako je $ab=0 \implies a=0$ ili $b=0$.

Ako je $(ab+1)^2=4(a+b)^2$ imamo dva slučaja.

1° $ab+1=2(a+b) \iff (a-2)(b-2)=3$. Cjelobrojni djelitelji od 3 su $\pm1, \pm3$ odakle je $(a-2, b-2)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}$ tj. $(a, b)\in\{(3,5),(5,3),(1,-1),(-1,1)\}$.

2° $ab+1=-2(a+b) \iff (a+2)(b+2)=3$. Dakle,

$$(a+2, b+2)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}$$

tj. $(a, b)\in\{(-1,1),(1,-1),(-3,-5),(-5,-3)\}$. Dakle, sva cjelobrojna rješenja su

$$\begin{aligned}(a, b)\in\{&(-1,1),(1,-1),(3,5),(5,3),\\ &(-3,-5),(-5,-3)\}\\ &\cup\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{(k,0)\}\cup\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\{(0,m)\}.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3528. *Dokaži da su sve nultočke polinoma*

$$z^7+7z^4+4z+1$$

sadržane unutar kruga polumjera 2 sa središtem u ishodištu.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti tako da pokažemo da zadani polinom nema nultočki van kruga polumjera 2 sa središtem u ishodištu. Pretpostavimo zato da je $|z|>2 \implies 1<\dfrac{|z|}{2}$. Imamo

$$|z|^4=1\cdot|z|^4<\left(\frac{|z|}{2}\right)^3\cdot|z|^4=\frac{|z|^7}{8}. \qquad (1)$$

Slično

$$|z|=1\cdot|z|<\left(\frac{|z|}{2}\right)^6\cdot|z|=\frac{|z|^7}{64}, \qquad (2)$$

$$1<\left(\frac{|z|}{2}\right)^7=\frac{|z|^7}{128}. \qquad (3)$$

Primjenom poznate nejednakosti

$$|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$$

i nejednakosti (1), (2), (3) slijedi

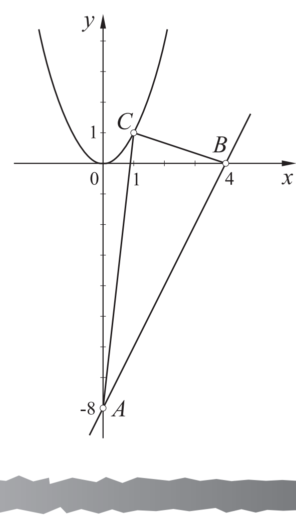
$$\begin{aligned}|z^7+7z^4+4z+1|&\geq|z|^7-\left(7|z|^4+4|z|+1\right)\\ &>|z|^7-\left(\frac{7}{8}+\frac{4}{64}+\frac{1}{128}\right)|z|^7\\ &=\frac{7}{128}|z|^7>0.\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3529. *Dane su dvije točke $A(0,-8)$ i $B(4,0)$ u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini. Odredi sve točke C na paraboli $y=x^2$ takve da je površina trokuta ABC minimalna.*

Rješenje. Točka C ima koordinate $C(x, x^2)$. Tada je

$$\begin{aligned}P_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)\\ &\quad+x_C(y_A-y_B)|\\ &=\frac{1}{2}|4(x^2+8)+x(-8-0)|\\ &=2|x^2-2x+8|\\ &=2\left[(x-1)^2+7\right]\geq 14.\end{aligned}$$



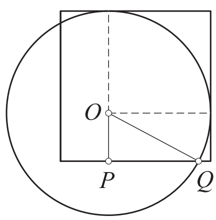
Minimalna površina trokuta ABC je 14 i dobije se za $x = 1$ tj. $C(1, 1)$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3530. *Kružnica dodiruje dvije susjedne stranice kvadrata i dijeli preostale dvije na dijelove duljina 2 i 23 cm. Koliki je polumjer kružnice?*

Rješenje. $|OQ| = r$, $|OP| = 25 - r$, $|PQ| = r - 2$. Iz pravokutnog trokuta OPQ dobivamo

$$(r-2)^2+(25-r)^2 = r^2 \iff r^2-54r+629 = 0.$$

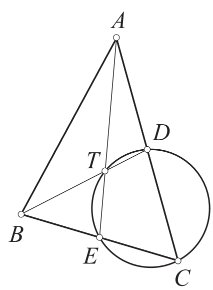


Odavde dobivamo dva rješenja $r_1 = 17$, $r_2 = 37$. Budući da mora biti $r < 25$, traženi je polumjer $r = 17$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3531. *Nađi vezu između duljina stranica a, b, c trokuta ABC ako vrh C, njegovo težište i polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ leže na kružnici.*

Rješenje.



Iz potencije točke A s obzirom na zadanu kružnicu slijedi

$$|AD| \cdot |AC| = |AT| \cdot |AE|$$

$$\iff \frac{b}{2} \cdot b = \frac{2}{3} t_a \cdot t_a$$

$$\iff 3b^2 = 4t_a^2$$

$$\iff 3b^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

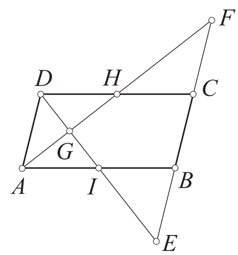
$$\iff a^2 + b^2 = 2c^2.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3532. *Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $|AB| = 2|BC|$. Na pravcu BC nalaze se točke E i F takve da vrijedi $|EB| = |BC| = |CF|$. Dokaži da su pravci AF i DE okomiti.*

Prvo rješenje. $\overline{CH}$ je srednjica trokuta ABF pa je $|CH| = \dfrac{|AB|}{2} \implies |DH| = |AD|$.

$\overline{BI}$ je srednjica trokuta CDE pa je $|BI| = \dfrac{|AB|}{2} \implies |AI| = |AD|$.



Dakle četvrokut $AIHD$ je romb, pa su njegove dijagonale $\overline{AH}$ i $\overline{DI}$ okomite.

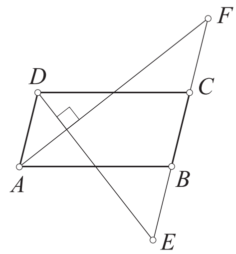
Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\jmath}$, $|\imath| = |\jmath|$.

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

$$= -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}.$$



Tada je

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE} = (2\vec{\imath}+2\vec{\jmath})(2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}) = 4(|\imath|^2-|\jmath|^2) = 0.$$

Dakle, $AF \perp DE$.

Ur.

3533. *Neka je AD simetrala kuta $\sphericalangle CAB = 120^\circ$ trokuta ABC. Dokaži jednakost*

$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$

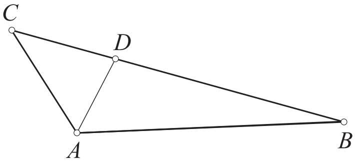
Prvo rješenje.

$$P_{\triangle ADC} + P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC}$$

$$\Longrightarrow \frac{|AD| \cdot |AC| \sin 60^\circ}{2} + \frac{|AD| \cdot |AB| \sin 60^\circ}{2} = \frac{|AB| \cdot |AC| \sin 120^\circ}{2}$$

zbog $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, dijeljenjem obje strane s $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$, slijedi

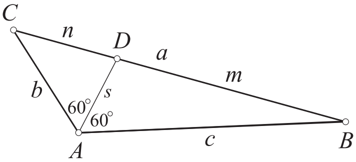
$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.$$



Zlatko Petolas (3), Zagreb

Drugo rješenje. Prema Stewartovom teoremu imamo

$$mb^2 + nc^2 = a(mn + s^2). \qquad (1)$$



Nadalje,

$$m + n = a, \quad \frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$

$$n = a - m, \quad \frac{b}{c} = \frac{a - m}{m}$$

$$m = \frac{ac}{b + c}, \quad n = \frac{ab}{b + c}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobivamo

$$\frac{ac}{b + c} b^2 + \frac{ab}{b + c} c^2 = a\left(\frac{ac}{b + c} \cdot \frac{ab}{b + c} + s^2\right) \Big/ \cdot \frac{b + c}{a}$$

$$bc(b + c) = \frac{a^2 bc}{b + c} + s^2(b + c)$$

$$s = \frac{\sqrt{(b + c)^2 - a^2 bc}}{b + c}.$$

Sada je

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff s = \frac{bc}{b + c}$$

$$\iff \frac{\sqrt{bc(b + c)^2 - a^2 bc}}{b + c} = \frac{bc}{b + c}$$

$$\iff a^2 = b^2 + c^2 + bc,$$

a ovo je posljedica kosinusovog poučka.

Ur.

3534. *Za kutove trokuta ABC vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$. Dokaži da za njima nasuprotne stranice a, b, c vrijedi jednakost*

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} = 2.$$

Rješenje. $\alpha = 2k$, $\beta = 3k$, $\gamma = 4k$

$$\Longrightarrow 9k = 180^\circ \Longrightarrow k = 20^\circ.$$

Iz poučka o sinusima:

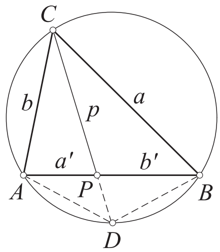
$$\begin{aligned}
\frac{b}{a} + \frac{a}{c} &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \\
&= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{2\cos 40^\circ} \\
&= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} + \frac{\cos 60^\circ}{\cos 40^\circ} \\
&= \frac{\sin 60^\circ \cos 40^\circ + \cos 60^\circ \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} \\
&= \frac{2\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 2.
\end{aligned}$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3535. *Neka su a, b dvije stranice trokuta, p duljina simetrale kuta između njih i a', b' duljine segmenata na koje simetrala dijeli treću stranicu. Dokaži jednakost $p^2 = ab - a'b'$.*

Rješenje. Trokuti CAD i CPB su slični jer $\sphericalangle ACD = \sphericalangle PCB$ (simetrala kuta) i $\sphericalangle ADC = \sphericalangle PBC$ (obodni kutevi). Dakle

$$\frac{|CD|}{b} = \frac{a}{p} \Longrightarrow |CD| = \frac{ab}{p}.$$



Iz potencije točke P s obzirom na opisanu kružnicu trokutu ABC slijedi

$$a'b' = |PC| \cdot |PD| = p(|CD| - p) = p\left(\frac{ab}{p} - p\right)$$

$$\Longrightarrow p^2 = ab - a'b'.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3536. *Duljine visina paralelograma iz vrha s tupim kutom su jednake p, q, a kut između njih je jednak α. Odredi duljinu dulje dijagonale paralelograma.*

Rješenje. Iz četverokuta $DEBF$ imamo

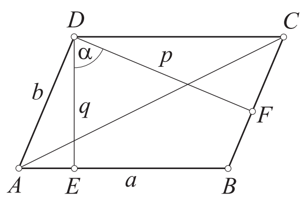
$$\alpha + 90^\circ + \sphericalangle EBF + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\Longrightarrow \sphericalangle EBF = 180^\circ - \alpha$$

$$\Longrightarrow \sphericalangle DAE = \sphericalangle FCD = \alpha$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha = \frac{q}{b} = \frac{p}{a}$$

$$\Longrightarrow b = \frac{q}{\sin\alpha}, \quad a = \frac{p}{\sin\alpha}.$$



Iz kosinusovog poučka za trokut ABC slijedi

$$|AC|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$$

$$= \frac{p^2}{\sin^2\alpha} + \frac{q^2}{\sin^2\alpha} + \frac{2pq}{\sin^2\alpha}\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow |AC| = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

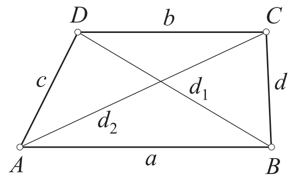
3537. *Dokaži da je zbroj kvadrata duljina dijagonala trapeza jednak zbroju kvadrata duljina bočnih stranica uvećanom za dvostruki produkt duljina baza.*

Rješenje. Označimo $\alpha = \sphericalangle DAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $d_1 = |BD|$, $d_2 = |AC|$. Tada je $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \beta$. Primjenom kosinusovog poučka na trokute ABD i ACD imamo

$$d_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - d_1^2}{2ac} = \frac{d_2^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$



Sređivanjem, iz posljednje jednakosti dobiva se

$$bd_1^2 + ad_2^2 = (a+b)(c^2 + ab). \qquad (*)$$

Analogno, primjenom kosinusovog poučka na trokute ABC i BCD imamo

$$ad_1^2 + bd_2^2 = (a+b)(d^2 + ab). \qquad (**)$$

Zbrajanjem $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab.$$

Zlatko Petolas (3), Zagreb

3538. *Neka je p cijeli broj takav da su rješenja jednadžbe*

$$5x^2 - 5px + 66p - 1 = 0$$

pozitivni cijeli brojevi. Odredi sve vrijednosti za p.

Rješenje. Uvjet na diskriminantu zadane kvadratne jednadžbe, k cijeli broj, je

$$25p^2 - 20(66p - 1) = k^2$$

$$\Longleftrightarrow 25p^2 - 1320p + 20 - k^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (5p - 132)^2 - 132^2 + 20 - k^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (5p - 132)^2 - k^2 = 17404$$

$$\Longleftrightarrow (5p - 132 - k)(5p - 132 + k)$$

$$= 4 \cdot 19 \cdot 229.$$

Razlika faktora u produktu lijeve strane zadnje jednakosti je paran broj što znači da su faktori ili oba parna ili oba neparna tj. oba su parna jer je desna strana parna.

Dakle,

$$5p - 132 - k = 38$$

$$5p - 132 + k = 458$$

tj. $k = 210$, $p = 76 \implies x_1 = 17$, $x_2 = 59$
ili

$$5p - 132 - k = -38$$

$$5p - 132 + k = -458$$

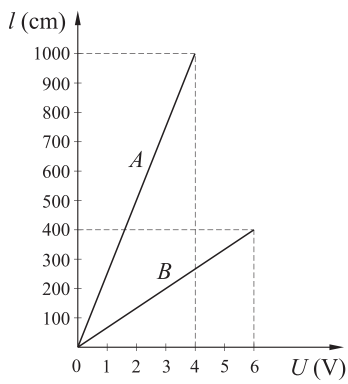
tj. $k = -210$, $p = -\dfrac{116}{5} \notin \mathbf{Z}$.

Dakle, jedino rješenje je $p = 76$.

Zlatko Petolas (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 406. *U-I graf pokazuje ovisnost struje o naponu za zavojnice A i B. Obje su napravljene od istog metala i imaju istu debljinu. Koliko je puta duljina zavojnice A manja od duljine zavojnice B?*



Rješenje.

$$I_A = 1000 \text{ mA} = 1 \text{ A}$$

$$U_A = 4 \text{ V}$$

$$I_B = 400 \text{ mA} = 0.4 \text{ A}$$

$$U_B = 6 \text{ V}$$

$$\rho_A = \rho_B$$

$$\underline{d_A = d_B}$$

$$\frac{l_B}{l_A} = ?$$

$$R_A = \frac{U_A}{I_A} = 4\ \Omega$$

$$R_B = \frac{U_B}{I_B} = 15\ \Omega$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s}$$

$$\rho_A = \rho_B, \quad d_A = d_B$$

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{l_B}{l_A}$$

$$\frac{l_B}{l_A} = \frac{15}{4}.$$

Duljina zavojnice A je 3.75 puta manja od duljine zavojnice B.

Maja Drmač (8),
OŠ Malešnica, Zagreb

OŠ – 407. *Osobni automobil je počeo pretjecati kamion s prikolicom koji se giba stalnom brzinom. U trenutku kad je započeto pretjecanje brzina automobila je bila 72 km/h, a kad je završeno brzina je iznosila 90 km/h. Pretjecanje je trajalo 4 sekunde. Kamion s prikolicom je dug 16 metara. Kolika mu je bila brzina? Pretpostavite da se osobni automobil tijekom pretjecanja jednoliko ubrzavao.*

Rješenje.

$$t = 4s$$

$$v_{A_1} = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{A_2} = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

$$\underline{s = 16 \text{ m}}$$

$$v_K = ?$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m/s}}{4s} = 1.25 \text{ m/s}^2$$

$$s_A = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_{A_1} \cdot t = 10 \text{ m} + 80 \text{ m} = 90 \text{ m}$$

$$s_K = s_A - s = 90 \text{ m} - 16 \text{ m} = 74 \text{ m}$$

$$v_K = \frac{s_K}{t} = \frac{74 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 18.5 \text{ m/s}.$$

Maja Drmač (8), Zagreb

OŠ – 408. *Učenici su promatrali kako valovi ljuljaju čamce u luci. Izmjerili su da se podižu svake 3 sekunde. Procijenili su da razmaci između susjednih valnih bregova iznose 80 centimetara. Kolika je frekvencija i brzina tih valova?*

Rješenje.

$T = 3$ s

$\underline{\lambda = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}}$

$f = ?$

$v = ?$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3} \text{ Hz}$$

$$v = \lambda \cdot f = 0.8 \text{ m} \cdot \frac{1}{3} \text{ Hz} = 0.27 \text{ m/s}.$$

Maja Drmač (8), Zagreb

OŠ – 409. *Posuda obujma 300 litara se puni kroz crijevo unutarnjeg promjera 2 centimetra. Brzina istjecanja vode je 1 m/s. Odredite vrijeme za koje će se posuda napuniti.*

Rješenje.

$V = 300 \text{ l} = 300 \text{ dm}^3 = 300\,000 \text{ cm}^3$

$2r = 2$ cm

$r = 1$ cm

$\underline{v = 1 \text{ m/s}}$

$t = ?$

Za $t = 1$ s isteče duljina l_1 vode brzinom $v = 1$ m/s.

$$l_1 = v \cdot t$$

$$l_1 = 1 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}.$$

Obujam vode koja isteče za 1 s jednak je

$$V_1 = S \cdot l_1 = r^2\pi \cdot l_1$$

$$V_1 = 1^2 \text{ cm}^2 \cdot 3.14 \cdot 100 \text{ cm} = 314 \text{ cm}^3.$$

Vrijeme punjenja posude dobit ćemo ako obujam posude V podijelimo s obujmom V_1.

$$t = \frac{V}{V_1} = \frac{300\,000 \text{ cm}^3}{314 \text{ cm}^3/\text{ s}}$$

$$t = 955.4 \text{ s} = 15 \text{ min } 55.4 \text{ s}.$$

Borna Cesarec (7),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

1616. *Odredi početnu brzinu tijela koje jednoliko ubrzava ako se nakon pređenih 60 metara brzina povećala za 25%, a u prve dvije sekunde gibanja za 15%. Koliko je ubrzanje?*

Rješenje. Brzinu nakon pređenog puta $s = 60$ m možemo izraziti pomoću početne brzine v_0 i akceleracije a kao

$$v^2 = v_0^2 + 2as,$$

što uz 25%-tno uvećanje $(v = 1.25v_0)$ daje

$$0.5625v_0^2 = 2a \cdot 60.$$

Drugi uvjet zapišemo pomoću ovisnosti brzine o vremenu:

$$v = at + v_0,$$

što daje

$$1.15v_0 = 2a + v_0$$

$$0.15v_0 = 2a.$$

Uvrštavanjem a u prethodni uvjet dobivamo:

$$0.5625v_0^2 = 60 \cdot 0.15v_0$$

$$0.5625v_0 = 60 \cdot 0.15 = 9.$$

Odatle slijedi $v_0 = 16$ m/s, a uz $a = \dfrac{0.15}{2 \cdot v_0}$ imamo $a = 1.2 \text{ m/s}^2$.

Ur.

1617. *U takozvanoj transfer-orbiti za geostacionarne satelite, objekt se giba oko Zemlje tako da je u perihelu 429 km iznad površine, a u ahelu 35 793 km iznad površine. Koristeći Keplerove zakone, odredi ophodno vrijeme, te brzinu u perihelu i ahelu. Za radijus Zemlje uzeti 6371 km, a za masu $5.972 \cdot 10^{24}$ kg.*

Rješenje. Satelit se giba po elipsi kojoj je velika os zbroj najveće i najmanje udaljenosti od središta Zemlje:

$$\begin{aligned} 2a &= r_{\min} + r_{\max} \\ &= (6371 + 429) + (6371 + 35\,793) \text{ km} \\ &= 48\,964 \text{ km}. \end{aligned}$$

Odatle je iz trećeg Keplerovog zakona ophodno vrijeme

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{4 \cdot 3.1416^2 \cdot 24\,482\,000^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}} \\ &= 1.4534 \cdot 10^9 \text{ s}^2. \end{aligned}$$

Slijedi, $T = 38\,124$ s $= 10$ sati, 35 minuta i 24 sekunde. Brzina je najveća u perihelu i najmanja u ahelu i vrijedi (drugi Keplerov zakon)

$$v_p r_{\min} = v_a r_{\max}.$$

Za umnožak tih dviju brzina iz svojstava elipse i očuvanja energije slijedi

$$v_p v_a = \frac{GM}{a},$$

pa ćemo ih odrediti iz sustava jednadžbi:

$$6800 v_p = 42\,160 v_a$$
$$v_p v_a = 16\,280\,176.5.$$

Odatle slijedi

$$v_p = 10\,047.2 \text{ m/s},$$
$$v_a = 1620.4 \text{ m/s}.$$

Ur.

1618. *Koliko iznosi otpor bakrene žice ako je težina žice 1 kg (bez izolacije), a duljina 800 metara? Gustoća bakra je* $8960\ kg/m^3$*, a električna otpornost* $16.78\ n\Omega m$.

Rješenje. Iz gustoće, mase i duljine žice izračunamo površinu poprečnog presjeka:

$$S \cdot l = V = \frac{m}{\rho_{\mathrm{Cu}}}$$
$$S = \frac{m}{l\rho_{\mathrm{Cu}}} = \frac{1}{800 \cdot 8960} = 1.395 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.$$

Zadanu otpornost bakra množimo s duljinom žice, a dijelimo s površinom presjeka da bi dobili otpor:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = 1.678 \cdot 10^{-8} \frac{800}{1.395 \cdot 10^{-7}} = 96.2\ \Omega.$$

Ur.

1619. *Konvergentna leća oblika meniska (kao naočale) načinjena je od stakla indeksa loma 1.5. Žarišna daljina veća je 10 cm od jednog radijusa zakrivljenosti leće, a 8 cm manja od drugog radijusa. Odredi jakost, žarišnu daljinu i oba radijusa zakrivljenosti leće.*

Rješenje. Veza žarišne daljine i radijusa određena je jednadžbom leće. Za menisk konvergentnu leću, veći radijus zakrivljenosti ima negativan predznak, dakle $R_2 < 0$:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Zadani uvjeti (uz duljine u centimetrima) glase:

$$R_1 = f - 10$$
$$R_2 = -f - 8.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu leće dobijemo:

$$\frac{1}{f} = 0.5\left(\frac{1}{f-10} + \frac{1}{-f-8}\right).$$

Sređivanjem dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f-10} - \frac{1}{f+8}$$
$$2(f-10)(f+8) = f(f+8) - f(f-10)$$
$$f^2 - 11f - 80 = 0$$
$$f = \frac{11 \pm 21}{2}.$$

Kako je leća konvergentna $(f > 0)$, rješenje je

$$f = 16 \text{ cm},$$
$$J = \frac{100 \text{ cm}}{f} = 6.25 \text{ dpt},$$
$$R_1 = 6 \text{ cm},$$
$$R_2 = -24 \text{ cm}.$$

Ur.

1620. *Od točno 10 kg leda napravljena je kugla. Ako kuglu uronimo u vodu gustoće* $1000\ kg/m^3$*, koliko iznad površine vode viri vrh kugle? Kolika je površina kugle iznad vode? Gustoća leda je* $920\ kg/m^3$.

Rješenje. Odredimo prvo radijus kugle,

$$V = \frac{m}{\rho} = V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\rho\pi}} = 0.137417 \text{ m}.$$

Volumen kugle uronjen u vodu jednak je omjeru mase kugle i gustoće vode:

$$V_V = \frac{m}{\rho_V} = \frac{10}{1000} = 0.01 \text{ m}^3$$

Volumen dijela izvan vode odredimo tako da od volumena cijele kugle oduzmemo dobiveni volumen uronjen u vodu:

$$V_I = \frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_V} = 869.565 \text{ cm}^3.$$

Ako taj iznos i radijus kugle $r = 13.7417$ cm uvrstimo u izraz za volumen kalote (odsječka kugle), dobit ćemo jednadžbu koja određuje visinu kalote h:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$
$$830.37 = h^2(41.2251 - h).$$

Dobivenu jednadžbu trećeg stupnja riješimo analitički (ako znamo), ili iterativnim uvrštanjem h izračunatog iz h' u izraz:

$$h = \sqrt{\frac{830.37}{41.2251 - h'}}.$$

Počnemo od $h' = 0$ i dobijemo $h = 4.48802$ cm. Ako to uvrstimo kao h', dobit ćemo $h = 4.75427$ cm. Iterativnim ponavljanjem postupka dobijemo niz h-ova:

$$h = 4.48802$$
$$h = 4.75427$$
$$h = 4.77160$$
$$h = 4.77272$$
$$h = 4.77280$$
$$h = 4.77280$$

Kako nam se h više ne mijenja (unutar navedene točnosti od 5 decimala), rješenje jednadžbe je $h = 4.7728$ cm. Pripadnu površinu iznad vode dobijemo (nešto lakše) iz omjera spram površine cijele kugle:

$$\frac{P_I}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r}$$
$$P_I = 2\pi rh = 2\pi \cdot 13.7417 \cdot 4.7728$$
$$= 412.09 \text{ cm}^2.$$

Ur.

1621. *Odredi prosječnu gustoću planeta ako je period rotacije 9 sati, a ubrzanje sile teže na polovima je 5% veće nego na ekvatoru. Zanemariti spljoštenost planeta.*

Rješenje. Sila teže na polovima jednaka je

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

gdje je M masa, a R radijus planeta ($G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2). Na ekvatoru, od toga treba oduzeti centripetalno ubrzanje rotacije:

$$g_e = \frac{GM}{R^2} - \frac{v^2}{R} = \frac{1}{1.05} g.$$

Dobivamo

$$\frac{1}{21}\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R)^2}{T^2}\frac{1}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

gdje je $T = 32\,400$ s period rotacije. Odatle je

$$\frac{M}{R^3} = \frac{21 \cdot 4\pi^2}{GT^2}.$$

Kako je gustoća omjer mase i volumena

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}$$

slijedi

$$\rho = \frac{21 \cdot 3\pi}{GT^2} = 2825 \text{ kg/m}^3.$$

Ur.

1622. *U kalorimetru se nalazi 0.8 kg leda, temperature 0 °C. Ulijemo toliko vode temperature 20 °C da se u ravnotežnom stanju sav led otopi, i dalje se ne zagrijava. Koliko smo vode ulili? Koliki je porast entropije do dostizanja ravnoteže? Gubitke topline zanemarujemo.*

Rješenje. Budući da se led otopio, ali se ne zagrijava, ravnotežna temperatura je 0 °C. Energija (toplina) potrebna za otapanje leda je

$$Q = m_l \cdot \lambda = 0.8 \cdot 330\,000 = 264\,000 \text{ J},$$

gdje je m_l masa leda, a $\lambda = 330$ kJ/kg specifična toplina taljenja. Uz zanemarive gubitke topline, jednaku je energiju izgubila ulivena voda, hladeći se sa 20 na 0 °C, što određuje masu ulivene vode m_v

$$Q = m_v c_v \Delta T_v$$
$$264\,000 = m_v \cdot 4190 \cdot 20.$$

Odatle je $m_v = 3.1504$ kg. Voda je smanjila entropiju hlađenjem za iznos

$$S_v = m_v c_v \ln\frac{\tau}{T_v} = 13\,200 \cdot \ln\frac{273}{293}$$
$$= -933.25 \text{ J/K}.$$

No istodobno je led povećao entropiju topljenjem na $0\,^\circ\text{C} = 273$ K za iznos

$$S_l = \frac{Q}{T} = \frac{264\,000}{273} = 967.03 \text{ J/K}.$$

Porast entropije iznosi

$$\Delta S = S_l + S_v = 967.03 - 933.25$$
$$= 33.78 \text{ J/K}.$$

Ur.