Međunarodna matematička olimpijada 2016. g.

Na 57. Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Hong Kongu nastupila je hrvatska ekipa izabrana na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi: *Adrian Beker*, *Domagoj Bradač*, *Andrija Mandić*, *Petar Orlić*, *Daniel Paleka* i *Leon Starešinić*. Voditelji su bili *Tonći Kokan* i *Nikola Adžaga*.

Pripreme za ovogodišnju olimpijadu bile su još obuhvatnije i zahjevnije nego prošle godine. Nakon dvadesetak dana intenzivnog rada u Zagrebu (uglavnom na Fakultetu elektrotehnike i računarstva), neposredno prije puta na Daleki istok naša ekipa je provela tjedan dana u Fužinama uz veliku pažnju voditelja i ponajboljih bivših natjecatelja.

Dug put u Hong Kong, preko Frankfurta, prošao je mirno, a ekipa se psihički pripremala za ono što je za pet od šest članova bilo posljednje srednjoškolsko olimpijsko natjecanje.

Program samog natjecanja većinom se održavao u velikom kampu HKUST-a, prelijepom mjestu na oblali Južnokineskog mora, okruženog brojnim otocima i šumovitim brežuljcima. Kamp je ogroman, s barem 100 metara visinske razlike između najviše i najniže točke, s nekoliko mostova koji su povezivali zgrade. Naše sobe i mjesto gdje smo doručkovali bili su udaljeni desetak minuta lagane šetnje, a s prozora se vidjelo prostranstvo "prljave" vode.

Ceremonija otvaranja Olimpijade bila je vrlo zanimljiva, ispunjena izvrsnim glazbenim točkama. Organizatori su zabranili tradicionalno nošenje zastava prilikom predstavljanja pojedinih država, što su natjecatelji popratili izrazima nezadovoljstva, dobacivanjem papirnatih aviončića.

Prvi dan natjecanja prošao je prekasno i prerano. Nismo briljirali na standardnim zadacima, iako smo geometriju na prvom zadatku svi riješili vrlo brzo. Treći zadatak je bio nedohvatljiv, ali drugi, koji je bio lakši, riješio je samo *Adrian*. Šteta, neki od nas bi ga sigurno riješili u nekim drugim uvjetima ili na nekom drugom natjecanju. Drugi dan je bio dosta neuobičajen. Bez očekivane geometrije, s petim zadatkom koji je izgledao kao zadatak za osnovnu školu, te šestim kojeg je vjerojatno samo trebalo jako poželjeti riješiti. Svi smo riješili samo četvrti zadatak, ali su neki riješili ponešto od jednog ili oba preostala zadatka. Bili smo poprilično sigurni da ove godine nećemo imati zlatnu medalju, za razliku od nekoliko zadnjih godina, ali nadali smo se da ćemo osvojiti šest medalja.

Gledanje preliminarnih rezultata nakon susreta s *Tonćijem* ipak je dalo nadu za nešto bolje rezultate, jer smo se nadali da smo bili blizu rješenja drugog, petog i šestog zadatka.

Dok su voditelji koordinirali naša rješenja, ekipe su išle na izlete, između ostalog i u hongkonški Disneyland. Ovdje treba spomenuti postepeni organizacijski raspad natjecanja, koji je počeo još tijekom drugog dana natjecanja kada su natjecatelji čekali odlazak na toalet više od sat vremena, a nastavio se velikim kašnjenjem svega u odnosu na termine određene prije natjecanja.

Nakon završne sjednice žirija bili su poznati i sami rezultati. Neki od nas su bili oko očekivanih granica za medalje i nadali se da će na kraju biti još i bolje. Nažalost, sreća ovaj puta nije baš bila na našoj strani, te su *Adrian*, *Andrija* i *Leon* ostali prekratki za bod, što je možda i najviše natjecatelja upravo ispod granice za medalju u povijesti hrvatske ekipe.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	apsolutni rang	relativni rang	osvojeno
D. Paleka	7	3	0	7	4	4	25	78	87.19%	srebrna
A. Beker	7	7	0	7	0	0	21	146	75.87%	brončana
L. Starešinić	7	3	0	7	4	0	21	146	75.87%	brončana
D. Bradač	7	0	0	6	4	3	20	169	72.05%	brončana
P. Orlić	7	2	0	7	0	0	16	253	58.07%	brončana
A. Mandić	7	1	0	7	0	0	15	281	53.41%	pohvala
ekipni rez.	42	16	0	41	12	7	118	30		S,B,B,B,B,P

Na kraju, 30. mjesto, jedna srebrna i četiri brončane medalje je odličan rezultat, iako smo prije natjecanja očekivali još mnogo bolje. Nadamo se da će nova generacija iduće godine u Brazilu biti barem tako uspješna kao i ovogodišnja.

Daniel Paleka

Zadaci

Prvi dan, Hong Kong, ponedjeljak 11. srpnja 2016.

Zadatak 1. Trokut BCF ima pravi kut u vrhu B. Neka je A točka na pravcu CF takva da je $|FA| = |FB|$ i da točka F leži između točaka A i C. Točka D je izabrana tako da je $|DA| = |DC|$ i da je pravac AC simetrala kuta $\sphericalangle DAB$. Točka E je izabrana tako da je $|EA| = |ED|$ i da je pravac AD simetrala kuta $\sphericalangle EAC$. Neka je točka M polovište dužine $\overline{CF}$. Neka je točka X takva da je četverokut $AMXE$ paralelogram ($AM \parallel EX$ i $AE \parallel MX$). Dokaži da se pravci BD, FX i ME sijeku u jednoj točki.

Zadatak 2. Nađi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svako polje tablice $n \times n$ ispuniti jednim od slova I, M i O tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- u svakom retku i svakom stupcu, jedna trećina svih slova su I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O;
- u svakoj dijagonali, ako je broj slova upisanih u tu dijagonalu višekratnik broja 3 onda su jedna trećina tih slova I, jedna trećina su M, a jedna trećina su O.

Napomena. Redci i stupci tablice $n \times n$ su označeni brojevima od 1 do n na uobičajeni način. Tako je svakom polju tablice pridružen uređeni par prirodnih brojeva (i,j), pri čemu je $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Ako je $n > 1$, tablica ima $4n-2$ *dijagonala* koje pripadaju jednoj od dvije vrste. Dijagonala prve vrste se sastoji od svih polja (i,j) za koje $i+j$ konstantno, a dijagonala druge vrste se sastoji od svih polja (i,j) za koje je $i-j$ konstantno.

Zadatak 3. Neka je $P = A_1A_2\ldots A_k$ konveksni mnogokut u ravnini. Vrhovi A_1, $A_2,\ldots,A_k$ imaju cjelobrojne koordinate i leže na jednoj kružnici. Neka je S površina mnogokuta P. Dan je neparni prirodni broj n takav da su kvadrati duljina svih stranica mnogokuta P prirodni brojevi djeljivi brojem n. Dokaži da je $2S$ cijeli broj koji je djeljiv brojem n.

Drugi dan, Hong Kong, utorak 12. srpnja 2016.

Zadatak 4. Skup prirodnih brojeva se naziva *mirisnim* ako sadrži barem dva elementa i ako svaki njegov element ima barem jedan zajednički prosti djelitelj s barem jednim od preostalih elemenata. Neka je $P(n) = n^2 + n + 1$. Koja je najmanja moguća vrijednost prirodnog broja b takva da postoji nenegativni cijeli broj a za koji je skup

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

mirisan?

Zadatak 5. Jednadžba

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

je napisana na ploči, pri čemu se sa svake strane nalazi 2016 linearnih faktora. Koja je najmanja moguća vrijednost broja k za koju je moguće izbrisati točno k od ova 4032 linearna faktora tako da sa svake strane ostane barem jedan faktor i da dobivena jednadžba nema realnih rješenja?

Zadatak 6. U ravnini se nalazi $n \geqslant 2$ dužina tako da se svake dvije dužine sijeku u unutrašnjoj točki i da nikoje tri dužine nemaju zajedničku točku. Geoff mora izabrati po jednu krajnju točku svake dužine i na nju postaviti žabu okrenutu prema drugoj krajnjoj točki te dužine. Potom će pljesnuti rukama $n-1$ puta. Svaki put kada pljesne, svaka žaba odmah skoči prema naprijed do sljedeće točke presjeka na svojoj dužini. Žabe nikada ne mijenjaju smjer svojih skokova. Geoff želi postaviti žabe tako da nikoje dvije od njih niti u jednom trenutku ne zauzimaju istu točku presjeka.

a) Dokaži da Geoff uvijek može ispuniti svoju želju ako je n neparan broj.

b) Dokaži da Geoff nikada ne može ispuniti svoju želju ako je n paran broj.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Naša ekipa s voditeljem.

Rang-lista

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
SAD	6				214
Južna Koreja	4	2			207
Kina	4	2			204
Singapur	4	2			196
Tajvan	3	3			175
Sjeverna Koreja	2	4			168
Rusija	4	1	1		165
Velika Britanija	2	4			165
Hong Kong	3	2	1		161
Japan	1	4	1		156
Vijetnam	1	4	1		151
Kanada	2	2	1	1	148
Tajland	2	2	1	1	148
Mađarska	1	3	2		145
Brazil		5	1		138
Italija	1	3		2	138
Filipini	2	2		2	133
Bugarska		3	3		132
Njemačka		3	3		131
Indonezija		3	3		130
Rumunjska		5	1		130
Izrael		3	3		127
Meksiko		4	1	1	126
Iran		3	3		125
Australija		2	4		124
Francuska		3	2	1	124
Peru		2	3	1	124
Kazahstan	1	1	3	1	122
Turska		2	4		121
Armenija		1	4	1	118
Hrvatska		1	4	1	118
Ukrajina		2	4		118
Mongolija		2	2	2	115
Indija		1	5		113
Bangladeš		1	3	2	112
Bjelorusija		1	4	1	112
Češka		2	1	2	109
Švedska		3		2	109
Makau	1	1		4	108
Srbija		1	4	1	106
Saudijska Arabija			4	2	104
Poljska		2	2	2	102
Švicarska		1	4		99
Nizozemska			3	3	98
Bosna i Hercegovina			4	2	97
Austrija			3	3	89
Portugal			1	5	88
Sirija			3	3	87
Španjolska			2	3	86
Grčka			2	3	84
Litva			3	3	84
Belgija			3	1	82
Novi Zeland		1	1	2	81
Azerbejdžan			1	4	79
Slovačka			2	3	78

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Malezija			2	3	77
Argentina			2	3	75
Južnoafrička Republika			1	4	73
Gruzija			1	4	69
Kostarika			2	2	69
Estonija			1	3	67
Tadžikistan				6	66
Cipar		1		3	65
Moldavija			1	3	65
Slovenija				5	65
Kolumbija			2	1	63
Šri Lanka			1	4	63
Salvador (5)			1	4	60
Albanija			1	3	58
Turmenistan				5	58
Finska				3	55
Paragvaj			2	1	55
Makedonija				3	53
Latvija				2	52
Irska				3	51
Tunis				4	50
Kosovo			1	2	47
Uzbekistan			1	2	47
Maroko			1	2	46
Nikaragva (5)			1	3	45
Danska				2	44
Alžir (4)				2	41
Ekvador				2	38
Kirgistan				3	34
Norveška				2	34
Venecuela (3)			1	1	29
Portoriko (2)			1		27
Crna Gora (2)		1			24
Nigerija				1	24
Island					23
Čile (3)				2	18
Pakistan					18
Urugvaj (1)			1		17
Trinidad i Tobago (4)				1	15
Luksemburg (3)					14
Kambodža				1	13
Mianmar					13
Uganda				1	12
Kenija					11
Honduras (2)					10
Madagaskar (5)					10
Jamajka (1)					9
Bocvana				1	7
Egipat (5)					5
Gana (3)					5
Tanzanija (2)					3
Irak (5)					2
Lihtenštajn (1)					2
Laos					0

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.